ÁLGEBRA COMUTATIVA EM EXERCÍCIOS

Sasha Anan′in

1. Álgebras, localizações e produto tensorial

Seja k um anel comutativo. Uma *k-álgebra* é um anel comutativo A munido de um homomorfismo de anéis $k \to A$. Em particular, A é um k-módulo. Sejam $i : k \to A$ e $i' : k \to A'$ k-álgebras. Um *k-homorfismo* $h : A \to A'$ é um homomorfismo de anéis tal que $h \circ i = i'$. Em outras palavras, além de ser um homomorfismo de anéis, h é um homomorfismo de k-módulos. Denotamo por $\mathbf{Alg}_k$ a categoria de todas as k-álgebras. Uma *k-subágebra* $S \leqslant A$ é um subanel de A que é simultaneamente um k-submódulo. A menor subálgebra de A que contém um subconjunto $G \subset A$ é dita *gerada* por G e se denota por $k[G]$; é fácil ver que $k[G]$ é a interseção de todas as subálgebras de A que contêm G; os elementos de G se chamam *geradores* de $k[G]$. A k-álgebra de polinômios $k[x_1, \dots, x_n]$ é gerada pelos geradores (*livres*) $x_1, \dots, x_n$. Se uma k-álgebra A é finitamente gerada, $A = k[g_1, \dots, g_n]$, então temos um k-homomorfismo sobrejetivo $k[x_1, \dots, x_n] \to A$ tal que $x_i \mapsto g_i$. Deste modo, cada elemento $a \in A$ admite a forma $a = p(g_1, \dots, g_n)$ para algum polinômio apropriado $p(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$. Note que, neste caso, $A \simeq k[x_1, \dots, x_n]/I$ para algum ideal $I \lhd k[x_1, \dots, x_n]$ e, vice-versa, qualquer quociente de $k[x_1, \dots, x_n]$ por um ideal é uma k-álgebra que admite n geradores.

Qualquer A-módulo $M \in {}_A\mathbf{Mod}$ sobre uma k-álgebra A é naturalmente um k-módulo. Em particular, qualquer ideal de A é um k-submódulo de A.

Uma k-álgebra K é um *corpo* se $1 \neq 0$ em K e cada elemento não-nulo de K possui um inverso multiplicativo. Um k-álgebra não-nula K é um corpo se e só se K não possui ideais próprios. Os módulos sobre um corpo K se chamam *espaços K-lineares.* Neste contexto, funciona toda a álgebra linear.

Uma k-álgebra D é um *domínio* se $1 \neq 0$ em D e D não possui *divisores de zero*; isto significa que $d_1 d_2 = 0$ implica $d_1 = 0$ ou $d_2 = 0$ para quaisquer $d_1, d_2 \in D$. Cada corpo é claramente um domínio. Por um procedimento análogo ao da construção de números racionais $\mathbb{Q}$ a partir de números inteiros $\mathbb{Z}$, podemos construir o *corpo de frações* $D \hookrightarrow \mathrm{K}\,D$ do domínio D (vide também o item 1.9). A propriedade universal de $\mathrm{K}\,D$: cada mergulho $D \hookrightarrow K$ de D para um corpo K se estende univocamente ao mergulho $\mathrm{K}\,D \hookrightarrow K$.

Um elemento $a \in A$ de uma k-álgebra A é *inteiro* sobre k se existe um polinômio mônico $p(x) \in k[x]$ tal que $p(a) = 0$. Caso k seja um corpo, os elementos inteiros sobre k são ditos *algébricos* sobre k e $a \in A$ é *transcendente* sobre k se a não é algébrico sobre k. No último caso, a subálgebra $k[a]$ é isomorfa a k-álgebra de polinômios.

1.1. Exercício. Seja A é uma k-álgebra gerada por um número finito de elementos inteiros sobre k. Mostre que A é um k-módulo finitamente gerado.

1.2. Nullstellensatz (D. Hilbert)**.** *Seja A uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo k. Se A é um corpo, então $\dim_k A < \infty$.*

1.2.1. Exercício. Pelo Exercício 1.1, pode-se supor que um dos geradores $g \in A$ é transcendente sobre k. Por indução sobre o número de geradores, conclua que $\dim_{k(g)} A < \infty$, onde $k(g)$ denota o subcorpo de A gerado por k e g.

1.2.2. Exercício. Sejam $g_1,\dots,g_m$ geradores da k-álgebra A. Escolhendo uma base $b_1,\dots,b_n\in A$ de A sobre $k(g)$ tal que $b_1=1$, observe que $b_ib_j=\sum\limits_{k=1}^n c_{ijk}b_k$ e $g_l=\sum\limits_{k=1}^n c_{lk}b_k$ para alguns $c_{ijk},c_{lk}\in k(g)$, onde $1\leqslant i,j,k\leqslant n$ e $1\leqslant l\leqslant m$.

1.2.3. Exercício. Seja $A_0:=k[c_{ijk},c_{lk}]$, uma k-subálgebra finitamente gerada. Mostre que $A_0b_1+\dots+A_0b_n$ é uma k-subálgebra de A que contém todos os g_l's. Levando em conta que $b_1=1$, conclua que $k(g)=A_0$.

1.2.4. Exercício. Sendo $k(g)$ uma k-álgebra finitamente gerada, mostre, encontrando um denominador comum d de geradores, que $k(g)=k[g,d^{-1}]$, onde $0\neq d\in k[g]$ é um polinômio em g.

1.2.5. Exercício. Conclua que cada elemento $a\in k(g)$ admite a forma $a=pd^{-i}$, onde $p,d\in k[g]$ são polinômios em g.

1.2.6. Exercício. Mostre que $(dg+1)^{-1}\notin k[g,d^{-1}]$ e complete a demonstração de 1.2.

1.3. Corolário. *Seja $k\subset K$ uma extensão de corpos. Se k é algebricamente fechado e K é uma k-álgebra finitamente gerada, então $k=K$.*

1.4. Exercício. Seja $k\subset K$ uma extensão algébrica de corpos, isto é, todo elemento de K é algébrico sobre k. Mostre que qualquer k-subálgebra de K é um corpo.

Seja A uma k-álgebra. Então o conjunto $\mathrm{N}\,A:=\{a\in A\mid \exists n\in\mathbb{N}\ a^{n+1}=0\}$ de todos os *elementos nilpotentes* é um ideal em A chamado *nilradical* de A. Para um ideal $I\lhd A$, denotamos por $\sqrt{I}$ o ideal de A que corresponde a $\mathrm{N}(A/I)$, isto é, $\sqrt{I}/I=\mathrm{N}(A/I)$, ou seja, $\sqrt{I}=\{a\in A\mid \exists n\in\mathbb{N}\ a^{n+1}\in I\}$. Um ideal $I\lhd A$ é *radical* se $\sqrt{I}=I$.

1.5. Exercício. Mostre que a interseção de qualquer família de ideais radicais é um ideal radical.

Um ideal $p\lhd A$ é dito *primo,* denotando $p\lhd_p A$, se A/p é um domínio. Equivalentemente, $p\lhd_p A$ se e só se $1\notin p$ e $a_1a_1\in p$ implica $a_1\in p$ ou $a_2\in p$ para quaisquer $a_1,a_2\in A$. Um outro critério útil de primalidade: $1\notin p$ e, para quaisquer ideais $I_1,I_2\lhd A$ tais que $I_1I_2\subset p\subset I_1,I_2$, necessariamente $p=I_1$ ou $p=I_2$. Denotamos $\mathrm{k}\,p:=\mathrm{K}(A/p)$.

Um ideal $m\lhd A$ é *maximal,* denotando $m\lhd_m A$, se A/m é um corpo, chamado também o *corpo de resíduos módulo m.* Equivalentemente, $m\lhd A$ é maximal se e só se $m\neq A$ e $m\subset I\lhd A$ implica $m=I$ ou $I=A$. Já que cada corpo é um domínio, cada ideal maximal é primo.

Denotamos $\operatorname{Spec}A:=\{p\mid p\lhd_p A\}$ e $\operatorname{Specm}A:=\{m\mid m\lhd_m A\}$.

1.6. Exercício. Mostre que $\bigcap\limits_{p\lhd_p A}p=\mathrm{N}\,A$. (Dica: para $a\in A\setminus\mathrm{N}\,A$, considere um ideal maximal de A que não intercepta o conjunto $\{a^n\mid n\in\mathbb{N}\}$ usando o lema de Zorn e mostre que ele é primo.)

1.7. Exercício. Seja $I\lhd A$ um ideal. Mostre que $\bigcap\limits_{I\subset p\lhd_p A}p=\sqrt{I}$.

1.8. Teorema do resto Chinês. Seja $A\in\mathbf{Alg}_k$. Dizemos que ideais $I,J\lhd A$ são *coprimos* se $I+J=A$.

Sejam $I_1,\dots,I_n\lhd A$ ideais. Temos um homomorfismo $h:A\to\prod\limits_{i=1}^n A/I_i$, $h:a\mapsto(a+I_1,\dots,a+I_n)$.

1.8.1. Exercício. Mostre que $\operatorname{Ker}h=\bigcap\limits_{i=1}^n I_i$.

1.8.2. Exercício. Mostre que h é sobrejetivo se e só se os I_i's são coprimos por pares. (Dica: Se h é sobrejetivo, existe $a\in A$ tal que $ha=(1,0,\dots,0)$, ou seja, $a\in 1+I_1$ e $a\in I_2$, implicando

$I_1 + I_2 \ni 1$. Reciprocamente, basta encontrar elementos $a_i \in A$ tais que $ha_i = (\underbrace{0,\dots,0,1}_{i\text{-ésimo lugar}},0,\dots,0)$, pois $h\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i a_i\Big) = (b_1 + I_1,\dots,b_n + I_n)$. Para todo $1 \leqslant i < n$, existem $c_i \in I_i$ e $d_i \in I_n$ tais que $c_i + d_i = 1$. Portanto, $I_1 \cap \dots \cap I_{n-1} \ni d := (1-d_1)\cdot \ldots \cdot (1-d_{n-1}) \in 1 + I_n$ e $hd = (0,\dots,0,1)$.)

1.8.3. Exercício. Supondo que os I_i's são coprimos por pares, mostre que $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = I_1 \cap \dots \cap I_n$. (Dica: Por indução sobre n, temos $J := I_1 \cdot \ldots \cdot I_{n-1} = I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}$ e $J \cdot I_n = J \cap I_n$ se $n > 2$, isto é, $I_1 \cdot \ldots \cdot I_{n-1} \cdot I_n = I_1 \cap \dots \cap I_{n-1} \cap I_n$. Para $n = 2$, temos $I_1 \cap I_2 = (I_1 \cap I_2)\cdot(I_1 + I_2) = (I_1 \cap I_2)\cdot I_1 + (I_1 \cap I_2)\cdot I_2 \subset I_1 \cdot I_2$.)

1.9. Funtor de localização. Seja $A \in \mathbf{Alg}_k$ e seja $S \subset A$. Entre todos os homomorfismos de k-álgebras $h : A \to B$ tais que qualquer elemento de hS é inversível em B, podemos encontrar um homomorfismo universal $i : A \to A[S^{-1}]$, chamado *localização* de A com respeito a S. A propriedade característica de $i : A \to A[S^{-1}]$ é a seguinte: para qualquer k-homomorfismo $h : A \to B$ com todos os elementos de hS inversíveis em B, existe um único k-homomorfismo $g : A[S^{-1}] \to B$ tal que $h = g \circ i$.

Podemos construir $A[S^{-1}]$ explicitamente. Para simplificar a tarefa, sem perda de generalidade, podemos supor que $SS \subset S \ni 1$, pois o produto de elementos inversíveis é inversível. Neste caso S é dito um *sistema multiplicativo* em A. No conjunto de pares $\big\{(s,a) \mid s \in S,\ a \in A\big\}$, introduzimos uma relação de equivalência: $(s_1,a_1) \sim (s_2,a_2)$ se existe $s \in S$ tal que $s(s_1a_2 - s_2a_1) = 0$. Denotando a classe de equivalência de (s,a) por $s^{-1}a$, definimos as operações pelas regras $s_1^{-1}a_1 + s_2^{-1}a_2 := (s_1s_2)^{-1}(s_2a_1 + s_1a_2)$ e $(s_1^{-1}a_1)\cdot(s_2^{-1}a_2) := (s_1s_2)^{-1}(a_1a_2)$. Obtemos um anel $A[S^{-1}]$ no qual o elemento do tipo $s^{-1}a$ tem um sentido natural. O homomorfismo $i : A \to A[S^{-1}]$ é dado por $a \mapsto 1^{-1}a$. As verificações formais são fáceis e imediatas. O núcleo de i se calcula pela fórmula $\operatorname{Ker} i = \{a \in A \mid \exists s \in S\ sa = 0\}$.

Uma construção semelhante produz de um A-módulo M um $A[S^{-1}]$-módulo $M[S^{-1}]$ e um homomorfismo natural $i : M \to M[S^{-1}]$ de A-módulos cujo núcleo é $\operatorname{Ker} i = \{m \in M \mid \exists s \in S\ sm = 0\}$. É fácil verificar que $[S^{-1}] : {}_A\mathbf{Mod} \to {}_{A[S^{-1}]}\mathbf{Mod}$ é um funtor.

O funtor $[S^{-1}]$ é exato. Realmente, se a sequência $M_1 \xrightarrow{h_1} M_2 \xrightarrow{h_2} M_3$ é exata, então a sequência induzida $M_1[S^{-1}] \to M_2[S^{-1}] \to M_3[S^{-1}]$ é obviamente semiexata. Se $s_2^{-1}m_2 \mapsto 0$, então $m_2 \mapsto 0$, ou seja, h_2m_2 é nulo em $M_3[S^{-1}]$. Isto significa que $h_2(sm_2)$ é nulo em M_3 para algum $s \in S$. Logo, $sm_2 = h_1m_1$ para algum $m_1 \in M_1$. Resta observar que $(ss_2)^{-1}m_1 \mapsto s_2^{-1}m_2$.

1.9.1. Lema. *Seja A uma k-álgebra e seja $S \subset A$ tal que $SS \subset S \ni 1$. Consideramos $i : A \to A[S^{-1}]$, o homomorfismo de localização com respeito a S. Para um ideal $I \triangleleft A$, temos o ideal $I[S^{-1}] = A[S^{-1}]iI \triangleleft A[S^{-1}]$ gerado pela imagem iI. Para um ideal $J \triangleleft A[S^{-1}]$, temos o ideal $i^{-1}J \triangleleft A$. Então $(i^{-1}J)[S^{-1}] = J$. Além disto, $i^{-1} : \operatorname{Spec} A[S^{-1}] \to \{p \in \operatorname{Spec} A \mid p \cap S = \varnothing\}$ é uma bijeção.*

Demonstração. Obviamente, $(i^{-1}J)[S^{-1}] \subset J$. Seja $s^{-1}a \in J$. Então $1^{-1}a \in J$ e $a \in i^{-1}J$. Logo, $ia \in i(i^{-1}J)$ e $s^{-1}a \in (i^{-1}J)[S^{-1}]$.

É claro que $i^{-1}\operatorname{Spec} A[S^{-1}] \subset \{p \in \operatorname{Spec} A \mid p \cap S = \varnothing\}$. Seja $p \triangleleft_p A$ tal que $p \cap S = \varnothing$. A sequência de A-módulos $0 \to p \to A \to A/p \to 0$ é exata. Portanto, a sequência $0 \to p[S^{-1}] \to A[S^{-1}] \to (A/p)[S^{-1}] \to 0$ é exata. Pela propriedade universal da localização, obtemos $(A/p)[S^{-1}] = (A/p)[\bar S^{-1}]$, onde $\bar S$ denota a imagem de S em A/p. Mas $(A/p)[\bar S^{-1}]$ é a localização do domínio A/p com respeito a $\bar S \not\ni 0$, pois $p \cap S = \varnothing$. Concluímos que $(A/p)[S^{-1}]$ é um domínio e, assim, que $p[S^{-1}] \triangleleft_p A[S^{-1}]$.

Resta verificar que $i^{-1}\big(p[S^{-1}]\big) = p$. A inclusão $i^{-1}\big(p[S^{-1}]\big) \supset p$ é óbvia. Se $ia = s^{-1}b$ com $a \in A$, $s \in S$ e $b \in p$, então $s'(sa - b) = 0$ para algum $s' \in S$. Daí, $s'sa \in p$. De $p \cap S = \varnothing$, segue $a \in p$ ■

1.9.2. Nullstellensatz (D. Hilbert). *Seja k um corpo algebricamente fechado e seja $I \triangleleft k[x_1,\dots,x_n]$ um ideal. Então $\sqrt{I} = \big\{f \in k[x_1,\dots,x_n] \mid f(\mathbf{V}\,I) = 0\big\}$, onde $\mathbf{V}\,I := \{p \in \mathbb{A}_k^n \mid Ip = 0\}$.*

Demonstração. A inclusão $\subset$ é trivial. Denotamos $A := k[x_1,\dots,x_n]/I$. Se $f(\mathbf{V}\,I) = 0$ e $f \notin \sqrt{I}$, então $\bar f \in A$ não é nilpotente. Portanto, a localização $A[\bar f^{-1}]$ não é nula e, sendo $A[\bar f^{-1}]$ uma k-álgebra finitamente gerada, obtemos um homomorfismo $A[\bar f^{-1}] \to k$ pelo Colorário 1.3. Compondo os homomorfismos $k[x_1,\dots,x_n] \to A \to A[\bar f^{-1}] \to k$, obtemos um ponto $p \in \mathbf{V}\,I$ tal que $fp \neq 0$ ∎

1.9.3. Definição. Um anel A é dito *local* se possui um único ideal maximal.

1.9.4. Exercício. Seja A um anel e seja $m \triangleleft A$ um ideal tal que $m \neq A$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes: (1) A é local com ideal maximal m; (2) todo elemento $a \in A \setminus m$ é inversível em A; (3) m é maximal e todo elemento $a \in 1 + m$ é inversível em A.

1.9.5. Exercício. Seja $p \triangleleft A$ um ideal primo. Denotamos $S := A \setminus p$. Mostre que $SS \subset S \ni 1$ e que $A[S^{-1}]$ é um anel local com ideal maximal $p[S^{-1}]$. Tal anel local é dito a *localização* de A em p e se denota por A_p. (Para um A-módulo M, denotamos por M_p a localização semelhante em p.) Mostre que $\mathrm{k}\,p = A_p/A_p(ip)$, onde $i : A \to A_p$ é o homomorfismo canônico de localização.

1.10. Produto tensorial. Seja A uma k-álgebra e sejam M_1, M_2, M, N A-módulos. Dados uma função A-bilinear $b : M_1 \times M_2 \to M$ (isto significa que $x_1 \mapsto b(x_1, m_2)$ e $x_2 \mapsto b(m_1, x_2)$ são homomorfismos de A-módulos para todos $m_1 \in M_1$ e $m_2 \in M_2$) e um homomorfismo de A-módulos $h : M \to N$, a função $h \circ b : M_1 \times M_2 \to N$ é A-bilinear. Será que existe uma função A-bilinear $b : M_1 \times M_2 \to M$ tal que qualquer função bilinear $M_1 \times M_2 \to N$ (onde N está variando) aparece como acima?

1.10.1. Definição. Seja A uma k-álgebra e sejam M_1, M_2 A-módulos. Uma função A-bilinear $\otimes : M_1 \times M_2 \to M_1 \otimes_A M_2$ é dita o *produto tensorial* de M_1 e M_2 sobre A se, para quaisquer A-módulo N e função A-bilinear $b : M_1 \times M_2 \to N$, existe um único homomorfismo de A-módulos $h : M_1 \otimes_A M_2 \to N$ tal que $b = h \circ \otimes$.

Para mostrar a existência do produto tensorial, a gente pode simplesmente quocientar o A-módulo $A(M_1 \times M_2)$ livremente gerado pelo conjunto $M_1 \times M_2$ pelas relações R necessárias para providenciar que a composta da função $M_1 \times M_2 \to A(M_1 \times M_2)$ com o homomorfismo canônico do quociente $A(M_1 \times M_2) \to A(M_1 \times M_2)/R$ seja A-bilinear. Mas, na prática, o mais adequado é usar a propriedade universal do produto tensorial: dada uma fórmula A-bilinear $b(x_1, x_2)$ com valores em um A-módulo N, definindo $h : m_1 \otimes m_2 \mapsto b(m_1, m_2)$ no nível de *tensores simples,* obtemos um único homomorfismo $h : M_1 \otimes_A M_2 \to N$.

1.10.2. Exercício. Mostre que cada elemento de $M_1 \otimes_A M_2$ é uma soma finita de tensores simples.

1.10.3. Exercício. Mostre que $\otimes_A : {}_A\mathbf{Mod} \times {}_A\mathbf{Mod} \to {}_A\mathbf{Mod}$ é um funtor.

1.10.4. Exercício. Mostre que a regra $a \otimes m \mapsto am$ define um isomorfismo $A \otimes_A M \simeq M$ natural em $M \in {}_A\mathbf{Mod}$.

1.10.5. Exercício. Mostre que a regra $m_1 \otimes m_2 \mapsto m_2 \otimes m_1$ define um isomorfismo $M_1 \otimes_A M_2 \simeq M_2 \otimes_A M_1$ natural em $M_1, M_2 \in {}_A\mathbf{Mod}$.

1.10.6. Exercício. Mostre que a regra $(m_1 \otimes m_2) \otimes m_3 \mapsto m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$ define um isomorfismo $(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \simeq M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)$ natural em $M_1, M_2, M_3 \in {}_A\mathbf{Mod}$.

1.10.7. Exercício. Mostre que a regra $i : \varphi \mapsto \Big(m_1 \mapsto \big(m_2 \mapsto \varphi(m_1 \otimes m_2)\big)\Big)$ define um isomorfismo $\mathbf{Mod}_A(M_1 \otimes_A M_2, M_3) \simeq \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$ natural em $M_1, M_2, M_3 \in {}_A\mathbf{Mod}$ com a inversa dada por $j : \psi \mapsto \big(m_1 \otimes m_2 \mapsto \psi(m_1)(m_2)\big)$.

1.10.8. Exercício. Mostre que existe um isomorfismo $\mathbf{Mod}_A\big(M_2, \mathbf{Mod}_A(M_1, M_3)\big) \simeq \mathbf{Mod}_A\big(M_1, \mathbf{Mod}_A(M_2, M_3)\big)$ natural em $M_1, M_2, M_3 \in {}_A\mathbf{Mod}$.

1.10.9. Exercício. Mostre que existe um isomorfismo $(M_1 \oplus M_2) \otimes_A M_3 \simeq (M_1 \otimes_A M_3) \oplus (M_2 \otimes_A M_3)$ natural em $M_1, M_2, M_3 \in {}_A\,\mathbf{Mod}$.

1.10.10. Exercício. Seja $h : A \to B$ um homomorfismo de k-álgebras e seja $M \in {}_A\,\mathbf{Mod}$. Introduza em $B \otimes_A M$ uma estrutura de B-módulo e mostre que os funtores $B \otimes_A -$ e $[h] : {}_B\,\mathbf{Mod} \to {}_A\,\mathbf{Mod}$ são adjuntos, isto é, que existe um isomorfismo ${}_B\,\mathbf{Mod}(B \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} {}_A\,\mathbf{Mod}\big(M, [h]N\big)$ natural em $M \in {}_A\,\mathbf{Mod}$ e $N \in {}_B\,\mathbf{Mod}$.

1.10.11. Exercício. Sejam $A, B \in \mathbf{Alg}_k$. Introduza uma estrutura de k-álgebra em $A \otimes_k B$ e mostre que $A \otimes_k B$ é um coproduto em $\mathbf{Alg}_k$, onde as setas $A \to A \otimes_k B$ e $B \to A \otimes_k B$ são dadas pelas regras $a \mapsto a \otimes 1$ e $b \mapsto 1 \otimes b$, respectivamente.

1.10.12. Exercício. Estabeleça isomorfismos $M[S^{-1}] = A[S^{-1}] \otimes_A M$ e $A[S'^{-1}] \otimes_A M[S^{-1}] = M\big[(S'S)^{-1}\big] = A\big[(SS')^{-1}\big] \otimes_{A[S^{-1}]} M[S^{-1}]$ naturais em $M \in {}_A\,\mathbf{Mod}$, onde $S, S' \subset A$. (Dica: mostre que $A[S'^{-1}] \otimes_A A[S^{-1}] = A\big[(S'S)^{-1}\big]$.)

2. Álgebras e módulos noetherianos

2.1. Definição. Seja A uma k-álgebra. Um A-módulo M é dito *noetheriano/artiniano* se satisfaz a condição de maximalidade/minimalidade para submódulos. Uma k-álgebra é *noetheriana/artiniana* se é noetheriana/artiniana como módulo sobre si mesma.

2.2. Exercício. Mostre que um A-módulo M é noetheriano se e só se cada submódulo de M é finitamente gerado. (Dica: Se a união de uma cadeia crescente de submódulos $S_n \subset S_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, é um submódulo finitamente gerado, os geradores estão em um certo S_m. Dado um submódulo S, considere um submódulo maximal finitamente gerado de S.)

2.3. Exercício. Seja $0 \to M_1 \hookrightarrow M_2 \to M_3 \to 0$ uma sequência exata de módulos. Mostre que M_2 é noetheriano se e só se M_1 e M_3 são noetherianos. (Dica: supondo que M_1 e M_3 são noetherianos e observando que, para qualquer submódulo $S \leqslant M_2$, a sequência $0 \to M_1 \cap S \hookrightarrow S \to (M_1 + S)/M_1 \to 0$ é exata, “una” os geradores de $M_1 \cap S$ e de $(M_1 + S)/M_1$.)

2.4. Exercício. Sejam $M \geqslant S_1, S_2$ submódulos noetherianos. Mostre que o módulo $S_1 + S_2$ é noetheriano. (Dica: considere a sequência exata $S_1 \oplus S_2 \to S_1 + S_2 \to 0$.)

2.5. Exercício. Sejam A uma k-álgebra noetheriana e M um A-módulo finitamente gerado. Mostre que M é noetheriano.

2.6. Exercício. Seja A uma k-álgebra, seja $S \subset A$ e seja M um A-módulo noetheriano. Mostre que $M[S^{-1}]$ é um $A[S^{-1}]$-módulo noetheriano. Em particular, se A é noetheriana, então $A[S^{-1}]$ também é noetheriana.

2.7. Teorema (D. Hilbert)**.** *Seja A uma k-álgebra noetheriana. Então a k-álgebra de polinômios $A[x]$ é noetheriana.*

2.7.1. Exercício. Para $0 \neq I \triangleleft A[x]$, mostre que os coeficientes dos termos de grau maior formam um ideal $I_0 \triangleleft A$, $I_0 := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \exists\ ax^n + \cdots \in I\}$.

2.7.2. Exercício. Escolha $n \in \mathbb{N}$ e uma coleção finita de polinômios $p_i(x) := g_i x^n + \cdots \in I$ tais que os g_i's geram I_0.

2.7.3. Exercício. Mostre que I é gerado pelos $p_i(x)$'s e por $I \cap A[x]_{<n}$ e use o Exercício 2.5.

2.8. Exercício. Seja A uma k-álgebra. Denotamos por $A[[x]]$ a k-álgebra de séries em x com coeficientes em A. Mostre que $A[[x]]$ é noetheriana se A é noetheriana. (Dica: aproveite a ideia da demonstração do Teorema 2.7 com o uso dos coeficientes de grau menor: $I_0 := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}\, \exists\, ax^n + \dots \in I\}$ para um ideal $I \lhd A[[x]]$.)

2.9. Lema (C. Chevalley)**.** *Seja D um k-domínio finitamente gerado sobre uma k-subálgebra $B \leqslant D$ e seja $0 \neq d \in D$. Então existe um elemento $0 \neq b \in B$ com a seguinte propriedade: qualquer homomorfismo $h : B \to K$ tal que $hb \neq 0$, onde K é um corpo algebricamente fechado, se estende a um homomorfismo $\widetilde{h} : D \to K$ tal que $\widetilde{h}d \neq 0$.*

2.9.1. Exercício. Por indução sobre o número de geradores de D sobre B, reduza o Lema 2.9 ao caso de D gerado por um elemento, $D = B[g]$.

2.9.2. Exercício. Caso o homomorfismo $f : B[x] \to D$ dado por $f : x \mapsto g$ seja um isomorfismo, temos $d = p(g)$, onde $p(x) = bx^n + \dots \in B[x]$ com $b \neq 0$. Seja $h : B \to K$ um homomorfismo tal que $hb \neq 0$, onde K é um corpo algebricamente fechado. Usando que K é infinito, mostre que h se estende a um homomorfismo $\widetilde{h} : D \to K$ tal que $\widetilde{h}d \neq 0$.

2.9.3. Exercício. Seja $0 \neq q(x) \in B[x]$ um polinômio de menor grau com a propriedade $q(g) = 0$, isto é, $0 \neq q(x) \in \operatorname{Ker} f$. Mostre que $q(x)$ é irredutível sobre $F := \mathrm{K}\, B$, o corpo de frações de B.

2.9.4. Exercício. Para algum polinômio $p(x) \in B[x]$, temos $d = p(g)$. Mostre que $d \neq 0$ implica que $q(x)$ não divide $p(x)$ em $F[x]$.

2.9.5. Exercício. Mostre que existem polinômios $p_0(x), q_0(x) \in B[x]$ tais que $0 \neq b_0 := p_0(x)q(x) + q_0(x)p(x) \in B$.

2.9.6. Exercício. Fazendo $b := b_0b'$, onde b' é o coeficiente do termo de grau maior de $p(x)$, considere um homomorfismo $h : B \to K$ tal que $hb \neq 0$, onde K é um corpo algebricamente fechado. Seja $r \in K$ uma raiz do polinômio $hq(x) \in K[x]$ (note que $\deg hq(x) > 0$) e seja $h' : B[x] \to K$ o homomorfismo mandando $h' : x \mapsto r$ que estende h (assim, $q(x) \in \operatorname{Ker} h'$). Supondo que $\operatorname{Ker} h' \supset \operatorname{Ker} f$, mostre que h' induz o homomorfismo desejado $D = B[g] = B[x]/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\widetilde{h}} K$. (Dica: use o Exercício 2.9.5.)

2.9.7. Exercício. Caso $\operatorname{Ker} h' \not\supset \operatorname{Ker} f$, tome um polinômio $u(x) \in \operatorname{Ker} f \setminus \operatorname{Ker} h'$ de menor grau possível. Note que, pela escolha de $q(x)$, temos $m := \deg u(x) \geqslant \deg q(x) =: k$. Conclua que $\deg\big(cu(x) - c'x^{m-k}q(x)\big) < \deg u(x)$, onde $0 \neq c, c' \in B$ são os coeficientes dos termos de grau maior de $q(x)$ e de $u(x)$, respectivamente. Observando que $cu(x) - c'x^{m-k}q(x) \in \operatorname{Ker} f \setminus \operatorname{Ker} h'$, encontre uma contradição.

3. A melhor dependência é a dependência integral

Um A-módulo M é dito *fiel* se, para qualquer $a \in A$, $aM = 0$ implica $a = 0$.

3.1. Definição. Um elemento $a \in A$ de uma k-álgebra A é *inteiro* sobre k se existe um polinômio mônico $p(x) \in k[x]$ tal que $p(a) = 0$. Uma k-álgebra A é dita *integral* (sobre k) se todo elemento de A é inteiro sobre k. Um k-domínio D é dito *integralmente fechado* se todos os elementos inteiros sobre D de seu corpo de frações $\mathrm{K}\, D$ pertencem a D.

3.2. Lema. *Seja A uma k-álgebra, seja M um A-módulo gerado por m elementos, seja $A \rhd I$ um ideal e seja $h : M \to M$ um A-endomorfismo tal que $hM \subset IM$. Então existem $i_1, \dots i_m \in I$ tais que $h^m + i_1h^{m-1} + \dots + i_m = 0$.*

Demonstração. Sejam $M \ni g_1, \dots, g_m$ geradores de M e seja $L := Ab_1 + \dots + Ab_m$ um A-módulo livremente gerado por $b_1, \dots, b_m$. Para alguns $i_{jk} \in I$, temos $hg_j = \sum_{k=1}^{m} i_{jk}g_k$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Por uma fórmula semelhante, a matriz $u := [i_{jk}]$ determina um endomorfismo $\widetilde{h} : L \to L$. Em outras palavras, temos um epimorfismo $\pi : L \to M$ tal que $\pi\widetilde{h} = h\pi$. Note que o polinômio característico

$p(x) = \det(x \cdot 1 - u)$ de u é mônico e os coeficientes restantes de $p(x)$ estão em I. Sabendo que $p(u) = 0$, obtemos $0 = \pi p(\tilde{h}) = p(h)\pi$, implicando $p(h) = 0$ ■

3.3. Exercício. Mostre que qualquer domínio fatorial é integralmente fechado. (Dica: experimente inicialmente com $\mathbb{Z}$.)

3.4. Exercício. Seja A uma k-álgebra e seja $a \in A$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a. a é inteiro sobre k;
b. $k[a]$ é um k-módulo finitamente gerado;
c. existe uma k-subálgebra $B \leqslant A$ finitamente gerada como um k-módulo tal que $a \in B$;
d. existe um $k[a]$-módulo fiel M que é finitamente gerado como k-módulo.

(Dica: Para a implicação **c** $\Rightarrow$ **d**, tome $M := B$. Para a implicação **d** $\Rightarrow$ **a**, considere o k-endomorfismo $h : M \to M$ dado pela regra $h : m \mapsto am$ e use o Lema 3.2.)

3.5. Exercício. Seja A uma k-álgebra. Mostre que o conjunto de todos os elementos de A inteiros sobre k é uma k-subálgebra em A chamada o *fecho inteiro* de k em A. (Dica: se $a_1, a_2 \in A$ são inteiros sobre k, então $k[a_1] \cdot k[a_2]$ é uma k-subálgebra em A finitamente gerada como k-módulo.)

3.6. Exercício. Seja A uma k-álgebra finitamente gerada. Mostre que A é integral sobre k se e só se A é um k-módulo finitamente gerado.

3.7. Exercício. Seja A uma k-álgebra e seja B uma A-álgebra. Mostre que B é integral sobre k se A é integral sobre k e B é integral sobre A. (Dica: reduza a questão ao caso $B = Ab_1 + \cdots + Ab_n$ e $A = ka_1 + \cdots + ka_m$ e observe que $B = \sum_{i,j} ka_i b_j$.)

3.8. Exercício. Seja D um domínio integral sobre seu subanel $k \leqslant D$. Mostre que D é um corpo se e só se k é um corpo.

3.9. Exercício. Seja A uma k-álgebra integral e sejam $A \triangleright I$ e $k \triangleright I_0$ ideais tais que $I_0 A \subset I$. Mostre que A/I é integral sobre k/I_0.

3.10. Exercício. Seja A uma k-álgebra integral e seja $S \subset k$. Mostre que a $k[S^{-1}]$-álgebra $A[S^{-1}]$ é integral.

3.11. Exercício. Seja $h : k \to A$ uma k-álgebra integral e sejam $A_p \triangleright p', p$ ideais primos tais que $p' \subset p$. Mostre que $h^{-1}p' = h^{-1}p$ implica $p' = p$. (Dica: Tomando $k/(h^{-1}p')$ e A/p' no lugar de k e A, reduza, pelo Exercício 3.9, a questão ao caso em que A é um domínio $k \leqslant A$ e $p' = 0 = k \cap p$. Fazendo $S := \{c \in k \mid c \neq 0\}$, note que $k[S^{-1}]$ é um corpo. Use os Exercícios 3.10 e 3.8. Aplique o Lema 1.9.1.)

3.12. Exercício. Seja A uma k-álgebra e seja $S \subset k$. Denotamos por $\overline{k}$ o fecho inteiro de k em A. Mostre que $\overline{k}[S^{-1}]$ é o fecho inteiro de $k[S^{-1}]$ em $A[S^{-1}]$. (Dica: Se $A[S^{-1}] \ni s^{-1}a$ é inteiro sobre $k[S^{-1}]$, então $(s^{-1}a)^m + s^{-1}c_1(s^{-1}a)^{m-1} + \cdots + s^{-1}c_m = 0$ em $A[S^{-1}]$ para alguns $m > 0$, $s \in S$ e $c_1, \dots, c_m \in k$, pois podemos escrever um número finito de elementos com um denominador comum s. Concluindo daí que $s'(a^m + c_1 a^{m-1} + \cdots + s^{m-1}c_m) = 0$ em A para algum $s' \in S$, observe que $A \ni s'a$ é inteiro sobre k.)

3.13. Exercício. Seja A uma k-álgebra e seja M um A-módulo. Mostre que $M = 0$ se $M_m = 0$ para todo ideal maximal $m \triangleleft_m A$. (Dica: note que, para $0 \neq x \in M$, o ideal $\{a \in A \mid ax = 0\}$ está contido em um ideal maximal $m \triangleleft_m A$.)

3.14. Exercício. Seja D um domínio. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a. D é integralmente fechado;
b. D_p é integralmente fechado para todo ideal primo $p \triangleleft D$;

c. D_m é integralmente fechado para todo ideal maximal $m \lhd_m D$.

(Dica: Para a implicação **c** $\Rightarrow$ **a**, considere a sequência exata $0 \to D \to \overline{D} \to \overline{D}/D \to 0$ de D-módulos, onde $\overline{D}$ denota o fecho inteiro de D em seu corpo de frações. Sabendo que $D_m = \overline{D}_m$ pelo Exercício 3.12, deduza que $(\overline{D}/D)_m = 0$ para todo ideal maximal $m \lhd_m D$ e use o Exercício 3.13.)

3.15. Exercício. Seja B uma k-álgebra integral sobre uma subálgebra $A \leqslant B$ e seja $p \lhd_p A$ um ideal primo. Mostre que existe um ideal primo $q \lhd_p B$ tal que $A \cap q = p$. (Dica: usando os Exercícios 3.10, 3.9 e 3.8, considere as localizações $A_p \leqslant B_p$ e um ideal maximal $m \lhd_m B_p$ e conclua de $A_p/(A_p \cap m) \leqslant B_p/m$ que $A_p/(A_p \cap m)$ é um corpo.)