INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ALGÉBRICA

Sasha Anan′in

1. Variáveis, equações, pontos, funções e homomorfismos de álgebras

Seja k um anel comutativo, sejam $x_1,\dots,x_n$ variáveis[1] e seja $E\subset k[x_1,\dots,x_n]$ um conjunto de "equações". Grosso modo, a geometria algébrica estuda soluções do sistema $e(x_1,\dots,x_n)=0$, $e\in E$, de equações polinomiais com coeficientes em k.

Reformulando, queremos estudar o conjunto $\mathbf{V}\,E:=\{p\in\mathbb{A}_k^n\mid Ep=0\}$, onde $\mathbb{A}_k^n:=k^n$ é o *espaço afim* sobre k. Caso $k=\mathbb{R}$, por exemplo, a equação $x^2+1=0$ não admite soluções, mas existem soluções complexas! Assim, é melhor já reformular a tarefa. Seja A uma k-álgebra, isto é, um homomorfismo $k\to A$ de anéis comutativos; escrevemos $A\in\mathbf{Alg}_k$, onde $\mathbf{Alg}_k$ é a categoria de todas as k-álgebras. Queremos estudar os conjuntos $\mathbf{V}_A\,E:=\{p\in\mathbb{A}_A^n\mid Ep=0\}$, onde $E\subset k[x_1,\dots,x_n]$ e $A\in\mathbf{Alg}_k$.

Sistemas de equações podem ser equivalentes, ou seja, pode acontecer que $\mathbf{V}_A\,E=\mathbf{V}_A\,E'$ para diferentes E e E'. Como escapar desta dependência chata de E ? Basta considerar $I:=\operatorname{ideal}E\lhd k[x_1,\dots,x_n]$, o ideal gerado por E ! Deste modo, uma escolha particular de um sistema de equações é nada mais do que uma escolha de geradores de I.

Para $V:=\mathbf{V}\,I$, onde $I\lhd k[x_1,\dots,x_n]$, denotamos por $k[V]:=k[x_1,\dots,x_n]/I$ a *k-álgebra coordenada* de V. Note que um ponto $p\in\mathbf{V}_A\,I$ é nada mais do que um homomorfismo de k-álgebras $k[V]\to A$.

1.1. Observação. *Sejam $I\lhd k[x_1,\dots,x_n]$ e $C:=k[x_1,\dots,x_n]/I$ a k-álgebra cooordenada de $\mathbf{V}\,I$. Então $\mathbf{V}_A\,I=\mathbf{Alg}_k(C,A)$* $\blacksquare$

1.2. Exercício. Mostre que sistemas de equações $E,E'\subset k[x_1,\dots,x_n]$ são equivalentes, isto é, para qualquer $A\in\mathbf{Alg}_k$, os conjuntos de soluções $\mathbf{V}_A\,E$ e $\mathbf{V}_A\,E'$ coincidem, se e só se $\operatorname{ideal}E=\operatorname{ideal}E'$. (Dica: considere as álgebras $A:=k[x_1,\dots,x_n]/\operatorname{ideal}E$ e $A':=k[x_1,\dots,x_n]/\operatorname{ideal}E'$.)

Voltando à descrição de $V:=\mathbf{V}\,I\subset\mathbb{A}_k^n$ por meio de equações, enxergamos mais um problema: mudando as variáveis $x_1,\dots x_n$, isto é, as "coordenadas" em $\mathbb{A}_k^n$, chegamos a uma descrição bem diferente de V. Levando em conta um estudo intrínseco de $\mathbf{V}\,I$, em particular, aquele que independe de um mergulho específico em $\mathbb{A}_k^n$, seria ridículo distinguir, por exemplo, $\mathbb{A}_k^n$ e $\mathbf{V}\,x_{n+1}\subset\mathbb{A}_k^{n+1}$. Felizmente, tal problema já é resolvido: uma escolha de coordenadas em $\mathbb{A}_k^n\supset V$ corresponde a uma escolha de geradores da k-álgebra $k[V]$.

1.3. Pré-definição. Um *k-esquema afim* $\operatorname{Spec}C$ (do *tipo finito*) sobre k é uma k-álgebra $C\in\mathbf{Alg}_k$ (finitamente gerada). Seja $A\in\mathbf{Alg}_k$. Um *A-ponto* de $\operatorname{Spec}C$ é um homomorfismo de k-álgebras $p:A\leftarrow C$. Tal ponto será denotado por $\operatorname{Spec}p:\operatorname{Spec}A\to\operatorname{Spec}C$. Caso A seja um corpo, o ponto é dito *geométrico.* Os elementos de C podem ser vistos como *funções* em pontos: Sejam $c\in C$ e $p:A\leftarrow C$ um A-ponto em $\operatorname{Spec}C$. Então o valor $cp\in A$ de c em p é simplesmente a imagem de c pelo homomorfismo $p:A\leftarrow C$, isto é, $cp:=pc\in A$. Note que as operações da k-álgebra C correspondem às operações usuais com funções, ou seja, a soma, o produto e a multiplicação por constantes (esta última é αc para $\alpha\in k$ e $c\in C$) em C correspondem às respectivas operações calculadas pelos valores de funções.

[1] Às vezes, a gente pode lidar com infinitas variáveis.

Um *morfismo* entre k-esquemas afins $\operatorname{Spec} h : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} C$ é um homomorfismo de k-álgebras $h : B \leftarrow C$. Tal morfismo manda qualquer A-ponto $p : A \leftarrow B$ de $\operatorname{Spec} B$ para o A-ponto de $\operatorname{Spec} C$ dado pela fórmula $(\operatorname{Spec} h)p := p \circ h : A \leftarrow C$.

De fato, a categoria $\mathbf{ASch}_k$ de todos os k-esquemas afins foi definida como sendo dual à categoria $\mathbf{Alg}_k$ e $\operatorname{Spec} : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{ASch}_k$, como o funtor contravariante que providencia esta antiequivalência de categorias. A ideia da definição é simples: um morfismo $\varphi : S_1 \to S_2$ entre espaços induz, por meio de compor com φ, um homomorfismo $h : A_1 \leftarrow A_2$ entre anéis de funções (algébricas, analíticas, diferenciáveis, etc.) sobre os espaços. Em outras palavras, exploramos uma ideia louca, mas muito frutífera, de Alexander Grothendieck, que a expressão fp, onde f é uma função e p é um ponto, pode ser interpretada de modo oposto: p é um homomorfismo sobre as funções, isto é, a avaliação de funções em p.

O conceito de A-ponto, introduzido também por A. Grothendieck, apela à visão intuitiva de que um morfismo $P \to S$ de P para um espaço S produz uma cópia de P em S, talvez um pouco amassada (por exemplo, um simplexo singular em S, um laço (contrátil) em S, etc.).

Denotamos por $\mathrm{K}\, D$ o corpo de frações do domínio D e por $\mathrm{k}\, p := \mathrm{K}(C/p)$, o corpo de frações do domínio C/p, onde $p \lhd_p C$ é um ideal primo.

1.4. Observação. *Seja $C \in \mathbf{Alg}_k$. Um ponto geométrico de* $\operatorname{Spec} C$ *é nada mais do que um ideal primo $p \lhd_p C$ junto com uma extensão de corpos $\mathrm{k}\, p \hookrightarrow A$.*

Demonstração. Se $h : A \leftarrow C$ é um homomorfismo para um corpo A, então seu núcleo p é um ideal primo em C, pois $C/p \hookrightarrow A$. O último mergulho se estende univocamente a $\mathrm{k}\, p \hookrightarrow A$ pela propriedade universal do corpo de frações ■

1.5. Exemplos. **1.** Para $C := k[x_1, \dots, x_n]$, o conjunto de todos os k-pontos de $\operatorname{Spec} C$ é exatamente o espaço afim $\mathbb{A}^n_k$. Em particular, o esquema $\operatorname{Spec} k$ possui um único k-ponto.

2. Caso C seja uma k-álgebra sobre um corpo k, o conjunto de todos os k-pontos de $\operatorname{Spec} C$ "coincide" com o conjunto de todos os ideais maximais $m \lhd_m C$ tais que $C/m = k$. Caso k seja algebricamente fechado e C seja finitamente gerada sobre k, $C/m = k$ para qualquer ideal maximal $m \lhd_m C$ pelo Corolário ac.1.3.

3. Seja $k \neq 0$ um anel sem elementos nilpotentes. Consideremos o esquema afim $\uparrow_k := \operatorname{Spec} C$ sobre k, onde $C := k[\varepsilon]/\operatorname{ideal} \varepsilon^2$. É fácil ver que $\uparrow_k$ possui um único k-ponto $\operatorname{Spec} * : \operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} C$ dado pelo óbvio homomorfismo de k-álgebras $* : k \leftarrow C$, $* : \varepsilon \mapsto 0$.

Seja $S := \operatorname{Spec} A$, onde $A \in \mathbf{Alg}_k$. Como descrever todos os C-pontos de S ? Cada C-ponto $v : C \leftarrow A$ de S providencia um determinado k-ponto de S por meio da composta $* \circ v$ com $* : k \leftarrow C$. Fixando tal k-ponto p de S, ou seja, fixando um homomorfismo $p : k \leftarrow A$, quais são os possíveis C-pontos de S ? Tais k-homomorfismos $v : A \to C = k + k\varepsilon$ podem ser descritos como $a \mapsto pa + (da)\varepsilon$, onde $d : A \to k$ é um homomorfismo de k-módulos. Para quaisquer $a_1, a_2 \in A$, a propriedade $v(a_1 a_2) = (va_1)(va_2)$ equivale à propriedade $d(a_1 a_2) = (da_1)(pa_2) + (pa_1)(da_2)$, levando em conta que p é um homomorfismo. Interpretando a_1, a_2 como funções de acordo com a Pré-definição 1.3, obtemos a famosa regra de Leibniz: $d(a_1 a_2) = (a_1 p)(da_2) + (a_2 p)(da_1)$.

Formalizando, seja $A \in \mathbf{Alg}_k$ uma k-álgebra e seja $M \in \mathbf{Mod}_A$ um A-módulo. Dizemos que um homomorfismo de k-módulos $d : A \to M$ é uma *k-derivação* de A com valores em M se $d(a_1 a_2) = a_1(da_2) + a_2(da_1)$ para todos $a_1, a_2 \in A$. Denotamos por $\operatorname{Der}_k(A, M)$ o k-módulo de todas tais derivações.

Voltando ao exemplo acima, note que o k-ponto $p : k \leftarrow A$ de S define uma estrutura de A-módulo sobre k. Assim, $\operatorname{Der}_k(A, k)$ coincide com o conjunto de todos os C-pontos de S cujo k-ponto p é fixo. Da topologia diferencial, sabemos que o espaço de todas as derivações de funções diferenciáveis em um ponto $p \in S$ de uma variedade diferenciável S se identifica com o espaço tangente $\mathrm{T}_p S$ a S em p. Por analogia, definimos o espaço tangente a $S = \operatorname{Spec} A$ no k-ponto $p : k \leftarrow A$ por $\mathrm{T}_p S := \operatorname{Der}_k(A, k)$.

Ainda mais elegante, o conjunto $\mathbf{ASch}_k(\uparrow_k, S)$ de todos os C-pontos de S pode ser visto como o "fibrado tangente" do espaço $\mathbf{ASch}(\operatorname{Spec} k, S)$ de todos os k-pontos de S e o morfismo $\operatorname{Spec} * : \operatorname{Spec} k \to \uparrow_k$ induz a projeção canônica $\mathbf{ASch}_k(\uparrow_k, S) \to \mathbf{ASch}(\operatorname{Spec} k, S)$ do fibrado.

O exemplo que acabamos de considerar é uma excelente ilustração do conceito de A. Grothendieck de ponto: o fibrado tangente é formado por todas as possíveis imagens do "vetor tangente padrão" $\uparrow_k$. Note também que a função nilpotente ε pode ser vista como uma "grandeza infinitesimal". Deste modo, conseguimos elaborar uma formalização do cálculo de grandezas infinitesimais.

2. Topologia de Zariski de $\operatorname{Spec} C$, funções racionais

Seja $C \in \mathbf{Alg}_k$. Os elementos de C são funções sobre A-pontos de $\operatorname{Spec} C$ para qualquer $A \in \mathbf{Alg}_k$. Mas se lidar com todos tais pontos, chegamos a um espaço enorme, mesmo se nos restringirmos aos pontos geométricos, como pode ser visto pela Observação 1.4. Por outro lado, se C é uma k-álgebra finitamente gerada sobre um corpo algebricamente fechado k, pelo Exemplo 1.5.2, os ideais maximais de C "formam" exatamente o conjunto de todos os k-pontos de $\operatorname{Spec} C$ e este conjunto pode ser mergulhado em um espaço afim $\mathbb{A}_k^n$, basta escolher n geradores da k-álgebra C. Neste caso, o espaço de pontos parece bem manso. A Observação 1.4 dá uma dica para resolver o problema.

2.1. Definição. Seja $C \in \mathbf{Alg}_k$. Definimos $\operatorname{Spec} C := \{p \mid p \lhd_p C\}$. Se $h : A \leftarrow C$ é um homomorfismo de k-álgebras, então a função $\operatorname{Spec} h : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} C$ é dada pela regra $p \mapsto h^{-1}p$. (Note que $p \lhd_p A$ implica $h^{-1}p \lhd_p C$.) Pelo lema de Zorn, $\operatorname{Spec} C \neq \varnothing$ se $C \neq 0$, pois C possui um ideal maximal neste caso.

Se k é um corpo e queremos lidar apenas com esquemas afins do tipo finito sobre k, podemos ainda diminuir $\operatorname{Spec} C$ até $\operatorname{Specm} C := \{m \mid m \lhd_m C\}$ pelos Nullstellensatz ac.1.2 e Exercício ac.1.4, pois a imagem inversa de um ideal maximal é um ideal maximal neste caso. Entretanto, isto não é conveniente por vários motivos (que é melhor não discutir agora). Além disto, os ideais primos não-maximais têm uma interpretação geométrica bem bacana e útil: eles exibem os pontos genéricos de subespaços fechados irredutíveis.

Falando sobre espaços, seria bom ter uma topologia em $\operatorname{Spec} C$. Parece natural pensar que qualquer ideal $I \lhd C$ produz um conjunto fechado V (lembre-se o início da Seção 1): enfim, os conjuntos dados por equações devem ser fechados. Como já entendemos, a álgebra (coordenada) deste conjunto é C/I e a inclusão $V \hookrightarrow \operatorname{Spec} C$ deve corresponder ao homomorfismo sobrejetivo $C/I \leftarrow C$. Em outras palavras, o conjunto $\mathbf{V}\, I := \{p \in \operatorname{Spec} C \mid p \supset I\}$ deve ser fechado em $\operatorname{Spec} C$. Sendo minimalistas, verificaremos que realmente obtemos uma topologia:

2.2. Exercício. Sejam $I, J, I_\alpha \lhd C$, $\alpha \in A$, ideais em C. Mostre que $\mathbf{V}\, I \cup \mathbf{V}\, J = \mathbf{V}(I \cap J) = \mathbf{V}(IJ)$ e $\bigcap\limits_{\alpha \in A} \mathbf{V}\, I_\alpha = \mathbf{V}\Big(\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha\Big)$. (Dica: $I \cap J \subset p \lhd_p C$ e $IJ \subset I \cap J$ implicam $I \subset p$ ou $J \subset p$, pois p é primo.)

2.3. Exercício. Sejam $A, C \in \mathbf{Alg}_k$ e seja $h : A \leftarrow C$ um homomorfismo de k-álgebras, então a função $\operatorname{Spec} h : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} C$ é contínua. (Dica: se $I \lhd C$, então $\{p \in \operatorname{Spec} A \mid h^{-1}p \supset I\} = \{p \in \operatorname{Spec} A \mid p \supset hI\} = \mathbf{V} \operatorname{ideal}(hI)$.)

A topologia que acabamos de definir se chama *topologia de Zariski.* Note que um ponto $p \lhd_p C$ é fechado se e só se $p \lhd_m C$. Assim, a topologia de Zariski é em geral extremamente não Hausdorff. Mesmo se $k = \mathbb{C}$ e C é finitamente gerada, considerando apenas as funções algébricas, não há como definir a topologia em $\operatorname{Specm} C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ induzida pela topologia usual em $\mathbb{C}$. Porém, comparando em seções posteriores a topologia usual com a de Zariski, encontraremos várias surpresas.

Para ideais $I, J \lhd C$, é claro que $I \subset J$ implica $\mathbf{V}\, I \supset \mathbf{V}\, J$. É fácil ver também que $\mathbf{V}\, I = \mathbf{V} \sqrt{I}$. Logo, para produzir todos os conjuntos fechados em $\operatorname{Spec} C$, basta considerar apenas ideais radicais de C. Pelo

Exercício ac.1.7, $\bigcap\limits_{p\in\mathbf{V}\,I} p=\sqrt{I}$. Portanto, obtemos uma bijeção entre os conjuntos fechados de $\operatorname{Spec} A$ e os ideais radicais de C. Tal bijeção reverte a inclusão.

A seguinte definição é útil apenas para topologias não Hausdorff do tipo da topologia de Zariski.

2.4. Definição. Um espaço topológico X que é a união de dois subconjuntos próprios fechados é dito *redutível.* Caso contrário, X é *irredutível.* Por definição, um espaço irredutível é obrigatoriamente não-vazio.

Note que o fecho de um subespaço irredutível é um subespaço irredutível e que o espaço de um ponto só é sempre irredutível. Logo, o fecho de um ponto é irredutível.

2.5. Lema. *Seja $C\in\mathbf{Alg}_k$ e seja $\operatorname{Spec} C\supset F$ um subconjunto fechado irredutível. Então F é o fecho de um ponto.*

Demonstração. Temos $F=\mathbf{V}\,I$ para algum ideal radical $I\lhd C$. Basta mostrar que I é primo. Caso contrário, existem ideais $I_1,I_2\lhd C$ tais que $I_1I_2\subset I$ e $I\subset I_1,I_2\neq I$. De $I\subset I_1,I_2$ e $I_1I_2\subset I$, concluímos $\mathbf{V}\,I\supset\mathbf{V}\,I_1,\mathbf{V}\,I_2$ e $\mathbf{V}\,I_1\cup\mathbf{V}\,I_2=\mathbf{V}(I_1I_2)\supset\mathbf{V}\,I$, implicando $\mathbf{V}\,I_1\cup\mathbf{V}\,I_2=\mathbf{V}\,I$. Agora, $\mathbf{V}\,I_i=\mathbf{V}\,I$ significa $\sqrt{I_i}=I$, ou seja, $I_i=I$ ■

Em outras palavras, cada subconjunto fechado irredutível $F\subset\operatorname{Spec} C$ possui um único *ponto genérico* p, $F=\overline{p}$.

2.6. Observação. *Seja $C\in\mathbf{Alg}_k$ e seja $X\subset\operatorname{Spec} C$. Então $\overline{X}=\mathbf{V}(\cap X)$.*

Demonstração. Obviamente, $X\subset\mathbf{V}(\cap X)$. Se $X\subset\mathbf{V}\,I$ para algum ideal $I\lhd C$, então $\cap X\supset I$ e, portanto, $\mathbf{V}(\cap X)\subset\mathbf{V}\,I$ ■

Dizemos que um k-esquema afim $\operatorname{Spec} C$ é *reduzido* se $\operatorname{N} C=0$. Um *k-subesquema fechado* de $\operatorname{Spec} C$ é simplesmente um morfismo do tipo $\operatorname{Spec}(C/I)\hookrightarrow\operatorname{Spec} C$, onde $I\lhd C$. Os ideais I e $\sqrt{I}$ determinam um mesmo subconjunto fechado, mas providenciam em geral diferentes k-subesquemas fechados. Isto significa que a topologia de Zariski não sente alguns aspectos do k-esquema. Entretanto, com cada subconjunto fechado em $\operatorname{Spec} C$ é relacionado um único k-subesquema reduzido, aquele dado pelo ideal radical. Em particular, para cada k-esquema afim S, obtemos seu k-subesquema fechado reduzido $S_{\mathrm{red}}\hookrightarrow S$: se $S=\operatorname{Spec} C$, então $S_{\mathrm{red}}=\operatorname{Spec}(C/\operatorname{N} C)$. O Exemplo 1.5.3 mostra que lidar apenas com k-esquemas reduzidos não parece uma boa ideia.

Pelo Exercício 2.2, $\mathbf{V}\,I\cap\mathbf{V}\,J=\varnothing$ em $\operatorname{Spec} C$ se e só se $I+J=C$, ou seja, se e só se I e J são coprimos. Sejam $\operatorname{Spec}(C/I_i)\hookrightarrow\operatorname{Spec} C$ subesquemas fechados tais que os I_i's são coprimos por pares e $\bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i=0$. Então $\operatorname{Spec} C=\mathbf{V}\,I_1\sqcup\dots\sqcup\mathbf{V}\,I_n$ pelo Exercício 2.2. Pelo Teorema ac.1.8, $C=\prod\limits_{i=1}^{n} C_i$, onde $C_i:=C/I_i$. Deste modo, obtemos a *união desconexa* de k-esquemas afins: $\operatorname{Spec}\Big(\prod\limits_{i=1}^{n} C_i\Big)=\bigsqcup\limits_{i=1}^{n}\operatorname{Spec} C_i$.

2.7. Observação. *Seja $h:A\leftarrow C$ um homomorfismo de k-álgebras e seja $\varphi:\operatorname{Spec} A\to\operatorname{Spec} C$ o morfismo induzido por h, $\varphi:=\operatorname{Spec} h$. Então $\overline{\varphi X}=\mathbf{V}(h^{-1}I)$ para qualquer subconjunto fechado $X\subset\operatorname{Spec} A$, onde $X=\mathbf{V}\,I$ e $I\lhd A$. Em particular, se C é uma k-subálgebra em A, $h:A\hookleftarrow C$, então a imagem de φ é densa em $\operatorname{Spec} C$.*

Demonstração. Realmente, $\varphi X=h^{-1}X$. Pela Observação 2.6, $\overline{\varphi X}=\mathbf{V}\big(\cap(h^{-1}X)\big)$. De $\cap(h^{-1}X)=h^{-1}(\cap X)=h^{-1}\sqrt{I}=\sqrt{h^{-1}I}$, concluímos que $\overline{\varphi X}=\mathbf{V}\sqrt{h^{-1}I}=\mathbf{V}(h^{-1}I)$. Caso C seja uma k-subálgebra em A, basta tomar $I=0$ ■

Qualquer homomorfismo de k-álgebras é composto de um homomorfismo sobrejetivo (que corresponde a um k-subequema fechado) e de um mergulho de k-álgebras (que corresponde a um morfismo com a imagem densa). Assim, temos uma ideia breve sobre o comportamento de um morfismo entre k-esquemas afins. Não é verdade que a imagem de um morfismo entre k-esquemas (afins) é fechada ou aberta ou localmente fechada.[2] Porém, em seções posteriores, mostraremos um teorema de Chevalley que afirma em particular que a imagem é um conjunto construtivo, caso k-esquemas sejam razoáveis.

Estudaremos agora k-subesquemas abertos. Sendo $\operatorname{Spec} C \supset \mathbf{V}\, c$ o subconjunto fechado de "zeros da função" $c \in C$, seu complementar $\mathbf{D}\, c := \operatorname{Spec} C \setminus \mathbf{V}\, c$ é um local, chamado *aberto principal,* onde deveria ser bem definida a "função" c^{-1}.

2.8. Observação. *Seja $C \in \mathbf{Alg}_k$ e seja $S \subset C$. Então o morfismo $\operatorname{Spec} i : \operatorname{Spec} C[S^{-1}] \to \operatorname{Spec} C$ induzido pelo homomorfismo de localização $i : C \to C[S^{-1}]$ é um homeomorfismo com sua imagem.*

Demonstração. Pelo Lema ac.1.9.1, a função $\operatorname{Spec} i$ é injetora. Seja $X \subset \operatorname{Spec} C[S^{-1}]$ um subconjunto fechado. Basta mostrar que $i^{-1}X$ é fechado na imagem $i^{-1} \operatorname{Spec} C[S^{-1}]$. Se $i^{-1}q \in \overline{i^{-1}X}$, então $i^{-1}q \supset \cap(i^{-1}X)$ pela Observação 2.6. Levando em conta que $\cap(i^{-1}X) = i^{-1}(\cap X)$, obtemos $i^{-1}q \supset i^{-1}(\cap X)$. Pelo Lema ac.1.9.1, $q \supset \cap X$. Sendo X fechado, $q \in X$ ■

Consequentemente, é natural definir a estrutura de k-esquema afim no aberto principal pela fórmula $\mathbf{D}\, c := \operatorname{Spec} C[c^{-1}]$ e interpretar o homomorfismo $i : C \to C[c^{-1}]$ como a restrição de funções para o aberto $\mathbf{D}\, c$. Olhando para a decomposição $\operatorname{Spec} C = \mathbf{D}\, c \sqcup \mathbf{V}\, c$, podemos dizer que, focando-se em $\mathbf{D}\, c = \operatorname{Spec} C[c^{-1}]$, mandamos $\mathbf{V}\, c = \operatorname{Spec}(C/Cc)$ para o "infinito" onde a "função" c^{-1} não é definida. Isto explica o termo "localização" na álgebra comutativa.

2.9. Observação. *Seja $C \in \mathbf{Alg}_k$. Para quaisquer $c_1, c_2 \in C$, temos $\mathbf{D}\, c_1 \cap \mathbf{D}\, c_2 = \mathbf{D}(c_1c_2)$. Os abertos principais formam uma base da topologia em $\operatorname{Spec} C$. O espaço $\operatorname{Spec} C$ é quase-compacto.*[3]

Demonstração. Com efeito, para qualquer $p \in \operatorname{Spec} C$, o fato que $c_1c_2 \notin p$ é equivalente ao fato que $c_1 \notin p$ e $c_2 \notin p$, pois p é primo.

A segunda afirmação é imediata: $\operatorname{Spec} C \setminus \mathbf{V}\, I = \bigcup_{c\in I} \mathbf{D}\, c$.

Para a quase-compacidade, basta considerar uma cobertura por abertos principais, $\operatorname{Spec} C = \bigcup_{c\in X} \mathbf{D}\, c$. Equivalentemente, $\bigcap_{c\in X} \mathbf{V}\, c = \varnothing$, ou seja, $\sum_{c\in X} Cc = C$ pelo Exercício 2.2. Em outras palavras, $\sum_{c\in X} Cc \ni 1$. Portanto, $\sum_{c\in X_0} Cc \ni 1$ para um subconjunto finito $X_0 \subset X$ ■

O k-esquema $\operatorname{Spec} C[S^{-1}]$ pode ser visto como a interseção de abertos principais $\bigcap_{s\in S} \mathbf{D}\, s$. Em particular, o k-esquema $\operatorname{Spec} C_p \hookrightarrow \operatorname{Spec} C$ é a interseção de todos os abertos que contêm o ponto $p \in \operatorname{Spec} C$. Note que o k-esquema $\operatorname{Spec} C_p$ pode conter pontos diferentes de p, mas p é o único ponto fechado em $\operatorname{Spec} C_p$! Grosso modo, $\operatorname{Spec} C_p$ é uma vizinhança infinitesimal de p e os elementos de C_p são os germes de "funções" definidas em uma vizinhança aberta de p.

Seja $\mathbf{D}\, d$ um aberto principal em $\operatorname{Spec} C$. Os elementos da forma $d^{-n}c \in \operatorname{Spec} C[d^{-1}]$ são "*funções*" *racionais* definidas (com frequência, apenas) sobre $\mathbf{D}\, d$. Quais são funções racionais sobre um aberto arbitrário $U \subset \operatorname{Spec} C$? Para definir tais funções, podemos cobrir U por abertos principais, $U = \bigcup_{d\in D} \mathbf{D}\, d$, e considerar uma família de funções $c_d \in C[d^{-1}]$, $d \in D$, tal que as restrições de c_{d_1} e de c_{d_2} para $\mathbf{D}\, d_1 \cap \mathbf{D}\, d_2 = \mathbf{D}(d_1d_2)$ coincidem para todos $d_1, d_2 \in D$. (Observe que, felizmente, já sabemos como restringir funções para abertos principais, apesar que ainda não sabemos como funções funcionam.) Será

[2] Um subconjunto *localmente fechado* é simplesmente a interseção de um subconjunto aberto com um subconjunto fechado.

[3] Isto significa que qualquer cobertura aberta do espaço admite uma subcobertura finita; note que o axioma de Hausdorff não é pressuposto.

que desta maneira podemos encontrar algumas funções novas sobre $\operatorname{Spec} C$ que não pertencem a C ? Nesta situação, pela Observação 2.9, podemos lidar com uma cobertura finita de $\operatorname{Spec} C$.

2.10. Lema. *Seja $C \in \mathbf{Alg}_k$. Suponha que $\operatorname{Spec} C = \mathbf{D}\, d_1 \cup \dots \cup \mathbf{D}\, d_n$ para alguns $d_1, \dots, d_n \in C$ e que funções racionais $f_i \in C[d_i^{-1}]$ são compatíveis, isto é, as imagens de f_i e de f_j em $C\big[(d_i d_j)^{-1}\big]$ coincidem para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Então existe uma única função $f \in C$ tal que f_j é a imagem de f em $C[d_j^{-1}]$ para todos $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Demonstração. Para alguns $m_i \in \mathbb{N}$ e $c_i \in C$, temos $f_i = d_i^{-m_i} c_i \in C[d_i^{-1}]$. Sem perda de generalidade, podemos supor que os m_i's são iguais, $m_i = m$. Trocando os d_i's pelos d_i^m's (isto não altera os $\mathbf{D}\, d_i$'s), podemos supor que $m = 1$, isto é, $f_i = d_i^{-1} c_i$. O fato que f_i e f_j coincidem sobre $\mathbf{D}(d_i d_j)$ significa que $(d_i d_j)^{m_{ij}}(d_i c_j - d_j c_i) = 0$ em C para alguns $m_{ij} \in \mathbb{N}$ e todos $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Podemos supor que os m_{ij}'s são iguais, $m_{ij} = m$. Trocando os c_i's pelos $d_i^m c_i$'s e os d_i's pelos d_i^{m+1}'s, não alteramos os f_i's e obtemos $d_i c_j = c_i d_j$ em C para todos i, j.

A condição que $\operatorname{Spec} C = \mathbf{D}\, d_1 \cup \dots \cup \mathbf{D}\, d_n$ significa que $\mathbf{V}\, d_1 \cap \dots \cap \mathbf{V}\, d_n = \varnothing$. Pelo Exercício 2.2, obtemos $C = \sum\limits_{i=1}^{n} C d_i$. Logo,[4] $1 = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i d_i$ para alguns $b_1, \dots, b_n \in C$. Portanto, $c_j = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i d_i c_j = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i c_i d_j = f d_j$ para todo j, onde $f := \sum\limits_{i=1}^{n} b_i c_i \in C$. Em outras palavras, f_j é a imagem de f em $C[d_j^{-1}]$ para todos j.

Para unicidade, podemos supor que a imagem de f pelo homomorfismo $C \to C[d_j^{-1}]$ é nula para todo j. Isto significa que $d_j^{m_j} f = 0$ para alguns $m_j \in \mathbb{N}$ e todos j. Supondo que os m_j's são iguais a 1 como acima, obtemos $f = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j d_j f = 0$ ■

Por enquanto, nada é claro sobre como descrever funções sobre outros abertos. De fato, para colar funções locais precisamos do conceito de feixe. Sem tal conceito, a demonstração apresentada acima parece bastante tosca.

3. Feixes sobre espaços topológicos

Os feixes, por um lado, são os coeficientes locais para cálculo de invariantes chamados cohomologias; por outro lado, são uma ferramenta para expressar propriedades geométricas. Tal ferramenta é mais relevante ao estudo de propriedades de espaços com uma estrutura rígida (tais como espaços analíticos, variedades algébricas, etc.) do que ao estudo de invariantes topológicos, mas abrange ambos os casos.

3.1. Definição. Seja X um espaço topológico e seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Denotamos por $\operatorname{Top} X$ a categoria cujos objetos são conjuntos abertos em X e cujos morfismos são inclusões de conjuntos abertos, i.e., uma seta $U \to V$ é simplesmente a inclusão $U \hookleftarrow V$.

Um *pré-feixe* sobre X é um funtor $P : \operatorname{Top} X \to \mathcal{C}$. Formalmente, pedimos também que $P\varnothing = f$, onde $f \in \mathcal{C}$ é um objeto final.

Decifrando esta definição: para cada conjunto aberto $U \subset X$, temos um objeto $PU \in \mathcal{C}$; para $U \supset V$, é dado um *morfismo de restrição* $|_V^U : PU \to PV$ sendo $|_U^U = 1$; caso $U \supset V \supset W$, vale $|_W^V \circ |_V^U = |_W^U$. Em seguida, omitimos U em $|_V^U$ escrevendo $|_V$ por simplicidade.

Uma outra variante que vamos precisar é a seguinte. Seja $\operatorname{Top} X \supset B$ uma base de topologia (i.e., cada aberto em X é a união de uma família de abertos de B e a interseção finita de abertos de B está em B) considerada como uma subcategoria completa. Um *pré-feixe* sobre X é um funtor $P : B \to \mathcal{C}$.

Um *morfismo* $\varphi : P \to P'$ entre pré-feixes é uma transformação natural entre funtores. Para $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$, denotamos por $\mathbf{PSh}_X$ a categoria de pré-feixes (de conjuntos) sobre X.

[4] Note uma analogia do resto da demonstração com um uso típico da partição da unidade!

Decifrando: um morfismo $\varphi : P \to P'$ é nada mais do que uma coleção de morfismos $\varphi_U : PU \to P'U$ em $\mathcal{C}$, onde U percorre $\operatorname{Top} X$ (ou B), tal que $|_V \circ \varphi_U = \varphi_V \circ |_V$ para quaisquer abertos $U \supset V$ (em B).

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "|_V"'] & P'U \arrow[d, "|_V"'] \\ PV \arrow[r, "\varphi_V"] & P'V \end{tikzcd}$$

Em nossas considerações, a categoria $\mathcal{C}$ será ou a categoria de conjuntos **Set**, ou a categoria de grupos abelianos **Ab**, ou a categoria de k-álgebras $\mathbf{Alg}_k$, etc. Deste modo, cada elemento $s \in PU$ é uma *seção* de P sobre U. Em seguida, omitimos com frequência U em φ_U, pois na expressão φs com $s \in PU$ a seção s "sabe" seu $U \in B$.

3.2. Definição. Um pré-feixe $F : \operatorname{Top} X \to \mathcal{C}$ é um *feixe* sobre X se, para qualquer cobertura aberta $\bigcup_{i \in I} U_i = U$, são válidos os seguintes axiomas.

- Se $s, s' \in FU$ são seções cujas restrições para U_i coincidem para todo $i \in I$, $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$, então $s = s'$.
- Se $s_i \in FU_i$, $i \in I$, são seções *compatíveis*, isto é, tais que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos $i, j \in I$, então existe uma (única pelo axioma anterior) seção $s \in FU$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$.

Morfismos entre feixes continuam sendo transformações naturais. Denotamos por $\mathbf{Sh}_X$ a categoria de feixes de conjuntos sobre X.

Caso $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$, podemos reformular os axiomas acima para uma dada cobertura aberta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ dizendo que a sequência

$$0 \longrightarrow FU \longrightarrow \prod_{i \in I} FU_i \longrightarrow \prod_{i,j \in I} F(U_i \cap U_j) \tag{3.3}$$

é exata.[5] A segunda seta nesta sequência é induzida pelos morfismos de restrição $|_{U_i} : FU \to FU_i$. A terceira seta é induzida pelas diferenças dos morfismos compostos $\prod_{i \in I} FU_i \xrightarrow{\pi_i} FU_i \xrightarrow{|_{U_i \cap U_j}} F(U_i \cap U_j)$ e $\prod_{i \in I} FU_i \xrightarrow{\pi_j} FU_j \xrightarrow{|_{U_i \cap U_j}} F(U_i \cap U_j)$.

3.4. Exemplo. Seja $\pi : E \to X$ uma função contínua entre espaços topológicos. Para qualquer conjunto aberto $U \subset X$, definimos $FU := \{s : U \to E \mid s \text{ é contínua e } \pi \circ s = i_U : U \hookrightarrow X\}$. Então F é um feixe de conjuntos, chamado *feixe de seções* de π.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, hook, "i_U"'] & X \end{tikzcd}$$

Acontece que feixes podem ser caracterizados como feixes de seções de funções étales.

3.5. Definição. Uma função contínua $\pi : E \to X$ entre espaços topológicos é *étale* se, para cada ponto $e \in E$, existe uma vizinhança aberta $e \in U \subset E$ tal que πU é aberto em X e π induz um homeomorfismo $U \to \pi U$. Funções étales para X formam uma categoria $\mathbf{Et}_X$: um *morfismo* de $\pi : E \to X$ para $\pi' : E' \to X$ é uma função contínua $\varphi : E \to E'$ tal que $\pi' \circ \varphi = \pi$. Denotamos por $\mathrm{F} : \mathbf{Et}_X \to \mathbf{Sh}_X$ o funtor que toma o feixe de seções de uma função étale como no Exemplo 3.4.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

3.6. Teorema. *Seja X um espaço topológico com uma base de topologia B. Então existe um funtor* $\mathrm{E} : \mathbf{PSh}_X \to \mathbf{Et}_X$ *que providencia uma equivalência de categorias* $\mathrm{E} : \mathbf{Sh}_X \to \mathbf{Et}_X$ *com o funtor inverso* F. *Além disto, há uma bijeção* $b : \mathbf{Et}_X(\mathrm{E}\,P, E) \xrightarrow{\sim} \mathbf{PSh}_X(P, \mathrm{F}\,E)$ *natural em* $P \in \mathbf{PSh}_X$ *e* $E \in \mathbf{Et}_X$.

Demonstração. Seja $P : B \to \mathbf{Set}$ um pré-feixe. Consideramos o coproduto na categoria de espaços topológicos $\tilde{P} := \bigsqcup_{s \in PU} s \times U$, onde s percorre PU e U percorre B. Na verdade, $\tilde{P}$ é o coproduto das

[5] Existe uma reformulação semelhante para pré-feixes de conjuntos. Basta introduzir um certo conceito de sequências exatas utilizando equilizadores. Mas a gente não vai precisar disto.

cópias dos $U\in B$, onde cada U tem tantas cópias quantos elementos há em PU. A função $\tilde\pi:\tilde P\to X$ dada por $\tilde\pi:(s,x)\mapsto x$ é obviamente étale. Note que $\widetilde{\ \ }:\mathbf{PSh}_X\to\mathbf{Et}_X$ é um funtor e que cada seção $s\in PU$ define uma seção $\tilde s:U\to\tilde P$ de $\tilde\pi$ sobre U dada por $x\mapsto(s,x)$. Introduzimos uma relação de equivalência em $\tilde P$:

• $(s_1,x_1)\sim(s_2,x_2)$ para $s_i\in PU_i$ e $x_i\in U_i$, se existe um conjunto aberto $V\in B$ tal que $x_1=x_2\in V\subset U_1\cap U_2$ e $s_1|_V=s_2|_V$.

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde P' \arrow[rr, "p'"] \arrow[dd, "\tilde\pi'"'] & & \mathrm{E}\,P' \arrow[ddll, "\pi'"] \\
\tilde P \arrow[ur, "\tilde\varphi"] \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\tilde\pi"'] & & \mathrm{E}\,P \arrow[ur, "\mathrm{E}\,\varphi"] \arrow[dl, "\pi"] & \\
 & X & &
\end{tikzcd}$$

Obtemos o espaço $\mathrm{E}\,P:=\tilde P/\sim$ munido da topologia do quociente, a função contínua $p:\tilde P\to\mathrm{E}\,P$ e a função $\pi:\mathrm{E}\,P\to X$ tal que $\pi\circ p=\tilde\pi$; logo, π é contínua pela propriedade do quociente. É fácil ver que o morfismo $\tilde\varphi:\tilde P\to\tilde P'$ induzido pelo morfismo de pré-feixes $\varphi:P\to P'$ preserva a equivalência $\sim$. Daí obtemos uma função contínua $\mathrm{E}\,\varphi:\mathrm{E}\,P\to\mathrm{E}\,P'$. Assim, E é um funtor.

Seja $s\in PU$. Então, para qualquer $s'\in PU'$, o conjunto $p^{-1}\big(p(s\times U)\big)\cap(s'\times U')=\bigcup\limits_{\substack{U\cap U'\supset V\in B\\ s|_V=s'|_V}}s'\times V$ é aberto em $s'\times U'$. Portanto, $p^{-1}\big(p(s\times U)\big)$ é aberto em $\tilde P$ e $p(s\times U)$ é aberto em $\mathrm{E}\,P$ com $\pi p(s\times U)=U$. Agora é claro que π induz um homeomorfismo $p(s\times U)\to U$. Concluímos que π é étale. Logo, obtemos um funtor $\mathrm{E}:\mathbf{PSh}_X\to\mathbf{Et}_X$.

Seja $E\in\mathbf{Et}_X$. Dado um morfismo $\varphi:\mathbf{Et}_X(\mathrm{E}\,P,E)$, definamos um morfismo $\psi:P\to\mathrm{F}\,E$: para $s\in PU$, façamos $\psi s:U\to E$ como sendo a composta $U\to s\times U\hookrightarrow\tilde P\xrightarrow{p}\mathrm{E}\,P\xrightarrow{\varphi}E$. Para verificar que ψ é um morfismo, observe que $(s|_V,x)\sim(s,x)$ para quaisquer $x\in V\subset U$ e $V\in B$. Obtemos uma função $b:\mathbf{Et}_X(\mathrm{E}\,P,E)\to\mathbf{PSh}_X(P,\mathrm{F}\,E)$, $b:\varphi\mapsto\psi$. Por uma verificação direta, b é natural em $P\in\mathbf{PSh}_X$ e $E\in\mathbf{Et}_X$. Para mostrar que b é uma bijeção, indicamos sua inversa. Seja $\psi:P\to\mathrm{F}\,E$ um morfismo. Para quaisquer $U\in B$ e $s\in PU$, definimos $\tilde P\supset s\times U\xrightarrow{\tilde\varphi}E$ como sendo a composta $s\times U\to U\xrightarrow{\psi s}E$. O fato que $\tilde\varphi:\tilde P\to E$ identifica pontos equivalentes segue imediatamente do fato que ψ é um morfismo. Assim obtemos um morfismo $\varphi:\mathrm{E}\,P\to E$. Deixamos as verificações restantes ao cargo do leitor.

Suponha agora que P é um feixe. Para $1_{\mathrm{E}\,P}\in\mathbf{Et}_X(\mathrm{E}\,P,\mathrm{E}\,P)$, temos $\eta:=b1_{\mathrm{E}\,P}\in\mathbf{Sh}_X(P,\mathrm{F}\,\mathrm{E}\,P)$. Por definição, para $s\in PU$, a seção ηs é a composta $U\to s\times U\hookrightarrow\tilde P\xrightarrow{p}\mathrm{E}\,P$. Se $\eta s_1=\eta s_2$ para $s_1,s_2\in PU$, ou seja, se $(s_1,x)\sim(s_2,x)$ para todo $x\in U$, então $s_1|_{V_x}=s_2|_{V_x}$ para uma vizinhança aberta $x\in V_x\subset U$ e $s_1=s_2$ pelo primeiro axioma de feixe (vide a Definição 3.2). Em outras palavras, η é injetivo sobre cada PU.

Seja $t:U\to\mathrm{E}\,P$ uma seção de $\mathrm{E}\,P$ sobre U. Tomemos um ponto $x\in U$. Como percebemos acima, existe $s_x\in PV_x$ tal que $tx\in p(s_x\times V_x)$ e $x\in V_x$. Diminuindo V_x e restringindo s_x, podemos supor que $V_x\subset U$. Em outras palavras, $\eta s_x=t|_{V_x}$ para todo $x\in U$. Sabendo que η é injetivo, concluímos que $s_{x_1}|_{V_{x_1}\cap V_{x_2}}=s_{x_2}|_{V_{x_1}\cap V_{x_2}}$ para quaisquer $x_1,x_2\in U$. Pelo segundo axioma de feixe aplicado a $\bigcup\limits_{x\in U}V_x=U$, obtemos uma seção $s\in PU$ tal que $\eta s=t$. Logo, η é um isomorfismo (conhecidamente natural em P).

Seja $E\in\mathbf{Et}_X$. Para $1_{\mathrm{F}\,E}\in\mathbf{Sh}_X(\mathrm{F}\,E,\mathrm{F}\,E)$, temos $\varepsilon:=b^{-1}1_{\mathrm{F}\,E}\in\mathbf{Et}_X(\mathrm{E}\,\mathrm{F}\,E,E)$. Pela definição acima, a função $\varepsilon:\mathrm{E}\,\mathrm{F}\,E\to E$ é induzida pela função $\tilde\varepsilon:\widetilde{\mathrm{F}\,E}\to E$ montada das compostas $\widetilde{\mathrm{F}\,E}\supset s\times U\to U\xrightarrow{s}E$, onde U percorre todo B e $s:U\to E$ percorre todas as seções de E sobre U. Se, para algum ponto $x\in U\cap U'$, temos $s_1x=s_2x$, onde $s_i:U_i\to E$ são seções de E, então $s_1|_V=s_2|_V$ para uma vininhança aberta $x\in V\subset U_1\cap U_2$, pois a função $E\to X$ é étale (pela mesma razão, $\tilde\varepsilon$ é sobrejetiva.) Portanto, $\tilde\varepsilon(s_1,x_1)=\tilde\varepsilon(s_2,x_2)$ implica $(s_1,x_1)\sim(s_2,x_2)$. Concluímos que ε é bijetora. Por ser um morfismo entre funções étales, ε é um homeomorfismo.

Resta lembrar que ε é natural em E ∎

Cabe ressaltar aqui que os conceitos de feixe da forma $\operatorname{Top} X \to \mathcal{C}$ e da forma $B \to \mathcal{C}$ são obviamente equivalentes (mas os de pré-feixe não o são).

Em seguida, não distinguimos o *espaço étale* $\mathrm{E}\, F$ do feixe F. Para enfatizar a qual interpretação de feixe apelamos, escrevemos $F \in \mathbf{Sh}_X$ se tratamos um feixe F como um funtor, e $\mathrm{E}\, F$ se tratamos um feixe como sua função étale.

3.7. Definição. Seja X um espaço topológico com uma base de topologia B e seja $P : B \to \mathbf{Set}$ um pré-feixe. O feixe $\mathrm{A}\, P := \mathrm{F}\, \mathrm{E}\, P$ munido do morfismo $\eta : P \to \mathrm{A}\, P$ é dito o feixe *associado* ao prefeixe P ou o feixe *gerado* por P.

Sendo burocratas, usamos o funtor $\mathrm{P} : \mathbf{Sh}_X \to \mathbf{PSh}_X$ que "esquece" a estrutura de um feixe, mas "lembra" a estrutura de pré-feixe:

3.8. Exercício. Encontre um isomorfismo $\mathbf{Sh}_X(\mathrm{A}\, P, F) \simeq \mathbf{PSh}_X(P, \mathrm{P}\, F)$ natural em $P \in \mathbf{PSh}_X$ e $F \in \mathbf{Sh}_X$. Mostre que para qualquer morfismo $\varphi : P \to F$ existe um único morfismo $\psi : \mathrm{A}\, P \to F$ tal que $\varphi = \psi\eta$.

Um exemplo simples de feixe é o feixe constante: Sejam X um espaço topológico e C um conjunto. Definimos $PU := C$ para todo conjunto aberto não-vazio $\varnothing \neq U \subset X$ com (quase) todos os morfismos de restrição iguais a 1_C. Chamamos $C_X := \mathrm{A}\, P$ de *feixe constante* sobre X (com valores em C).

3.9. Exercício. Descreva o espaço étale de C_X e calcule $C_X U$ para cada conjunto aberto $U \subset X$. Construa um exemplo quando $C_X U \neq C$ com $U \neq \varnothing$.

Feixes constantes se usam com frequência na topologia algébrica.

3.10. Definição. Seja X um espaço topológico e seja $F \in \mathbf{Sh}_X$ um feixe. Dado um conjunto aberto $U \subset X$, definimos a *restrição* $F|_U \in \mathbf{Sh}_U$ de F para U, fazendo $F|_U V := FV$ para qualquer conjunto aberto $V \subset U$. (O fato que $F|_U$ é um feixe é imediato.)

Na topologia algébrica, usam-se também feixes *localmente constantes* ou *sistemas locais*: um feixe $F \in \mathbf{Sh}_X$ é *localmente constante* se $F|_U$ é um feixe constante, onde U percorre uma cobetrura aberta de X. A função étale de um sistema local $\pi : \mathrm{E}\, F \to X$ é o que se chama um *recobrimento* de X.

3.11. Definição. Sejam X um espaço topológico, $x \in X$ um ponto e C um conjunto. Denotamos por $\mathtt{pt}$ um conjunto de um elemento só (um objeto final em $\mathbf{Set}$). Para qualquer conjunto aberto $U \subset X$, definimos $C_x U = C$ caso $x \in U$ e $C_x U = \mathtt{pt}$ caso contrário. Tal feixe se chama *arranha-céu.*

3.12. Exercício. Mostre que $C_x \in \mathbf{Sh}_X$. Descreva o espaço étale $\mathrm{E}\, C_x$ para $X := \mathbb{R}$, $x := 0$ e $C := \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$; é Hausdorff?

3.13. Definição. Seja X um espaço topológico, seja B uma base de topologia em X e seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dados um pré-feixe $P : B \to \mathcal{C}$ e um ponto $x \in X$, definimos a *fibra* P_x de P em x por $P_x := \pi^{-1}x$, onde $\pi : \mathrm{E}\, P \to X$ é a função étale de P. Lembrando-nos da demonstração do Teorema 3.6, entendemos que a fibra P_x é formada pelos *germes* s_x de seções $s \in PU$ tais que $x \in U \in B$: duas seções $s_1 \in PU_1$ e $s_2 \in PU_2$, onde $x \in U_1, U_2 \in B$, são *equivalentes,* escrevendo $s_1 \sim_x s_2$, se existe uma vizinhança $x \in V \in B$ tal que $V \subset U_1 \cap U_2$ e $s_1|_V = s_2|_V$; a classe de equivalência s_x de $s \in PU$, $x \in U \in B$, é o *germe* da seção s em x. É claro agora que a seção $\eta s : U \to \mathrm{E}\, P$ manda $U \ni x \mapsto s_x \in \pi^{-1}x = P_x$. Obviamente, P_x é um funtor em P.

3.14. Observação. *Sejam $F, F' \in \mathbf{Sh}_X$ feixes sobre um espaço topológico X e seja $\varphi : F \to F'$ um morfismo tal que $\varphi_x : F_x \to F'_x$ é uma bijeção para todo $x \in X$. Então φ é um isomorfismo.*

Demonstração. Sendo $\mathrm{E}\, \varphi : \mathrm{E}\, F \to \mathrm{E}\, F'$ uma bijeção e $\pi : \mathrm{E}\, F \to X$ e $\pi' : \mathrm{E}\, F' \to X$ étales, concluímos que $\mathrm{E}\, F$ é um homeomorfismo ■

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[rr, "|_V"] \arrow[dr, "s \mapsto s_x"'] & & PV \arrow[dl, "t \mapsto t_x"] \\ & P_x & \end{tikzcd}$$

Note que P_x é um objeto de $\mathcal{C}$ e que temos os morfismos $_x : PU \to P_x$, $x \in U \in B$, `na categoria` $\mathcal{C}$ que calculam germes, ou seja, que mandam seções para seus germes em x. (Tais morfismos são compatíveis com restrições. Isto significa que $s_x = (s|_V)_x$ para quaisquer $U, V \in B$ e $s \in PU$ tais que $x \in V \subset U$.) Realmente, caso $\mathcal{C} = \mathbf{Alg}_k$ ou $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$, por exemplo, podemos definir as operações em P_x no nível de representantes: se $s \in PU$ e $s' \in PU'$ com $x \in U, U' \in B$, definimos $s_x + s'_x := \big(s|_{U\cap U'} + s'|_{U\cap U'}\big)_x$, $s_x \cdot s'_x := \big(s|_{U\cap U'} \cdot s'|_{U\cap U'}\big)_x$ e $\alpha \cdot s_x := (\alpha s)_x$ para $\alpha \in k$.

Mais um exemplo desta natureza:

3.15. Definição. Seja X um espaço topológico e seja B uma base de topologia em X. Dados um pré-feixe de k-álgebras $A : B \to \mathbf{Alg}_k$ e um pré-feixe de grupos abelianos $M : B \to \mathbf{Ab}$, dizemos que M é um pré-feixe de A-*módulos* se, para todo $U \in B$, uma estrutura de AU-módulo está fixa em MU, e tais estruturas são compatíveis com restrições, ou seja, os homomorfismos $|_V : MU \to MV$ são homomorfismos de AU-módulos para quaisquer $U, V \in B$ com $U \supset V$, observando que o homomorfismo de k-álgebras $|_V : AU \to AV$ está munindo MV de uma estrutura de AU-módulo. Como acima, M_x é um A_x-módulo e, para qualquer $x \in U \in B$, o morfismo $MU \to M_x$ é um homomorfismo de AU-módulos com respeito ao homomorfismo de k-álgebras $AU \to A_x$.

Na verdade, a definição categórica da fibra P_x é simples: $P_x := \operatorname*{colim}\limits_{B \ni U \ni x} PU$ e as setas $PU \to P_x$ fazem parte da estrutura do colimite. Caso colimites existam na categoria $\mathcal{C}$, o que será sempre válido em nossas considerações e que exigimos da categoria $\mathcal{C}$, a fibra P_x de um pré-feixe $P : B \to \mathcal{C}$ está automaticamente em $\mathcal{C}$.

É útil também pensar no espaço étale $\mathrm{E}\,F$ de um feixe $F \in \mathbf{Sh}_X$ e em um morfismo entre feixes como sendo uma família de fibras e uma família de morfismos entre fibras correspondentes, ambas as famílias parametrizadas por X. Assim, $\mathrm{E}\,F = \bigsqcup\limits_{x\in X} F_x$ como conjuntos.

Pela Definição 3.13 e pelo Teorema 3.6, as fibras de um pré-feixe $P \in \mathbf{PSh}_X$ e de seu feixe associado coincidem. Deste modo, poderíamos definir $\mathrm{E}\,P := \bigsqcup\limits_{x\in X} P_x$ e introduzir uma topologia em tal $\mathrm{E}\,P$, tomando a mais forte possível com a propriedade que as funções $U \ni x \mapsto s_x \in \mathrm{E}\,P$ sejam contínuas para todos $U \in B$ e $s \in PU$.

Além disto, com tal visão, é fácil ver que o feixe associado a um pré-feixe $P : B \to \mathcal{C}$ é da forma $\mathrm{A}\,P : \operatorname{Top} X \to \mathcal{C}$. Caso $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$, por exemplo, para somar seções $s, s' \in (\mathrm{A}\,P)U$ que são de fato funções $s, s' : U \to \bigsqcup\limits_{x\in X} P_x$, fazemos $s + s' : x \mapsto s_x + s'_x$.

Uma outra opção é observar que pré-feixes e feixes de grupos, de anéis, de módulos, etc. são grupos, anéis, módulos, etc. nas categorias $\mathbf{PSh}_X$ e $\mathbf{Sh}_X$. (Por exemplo, no lugar da Definição 3.13, podemos dizer que A é uma k-álgebra em $\mathbf{PSh}_X$ e M é um A-módulo em $\mathbf{PSh}_X$.) De qualquer modo, valem as modificações correspondentes das Definições 3.5, 3.7, 3.10, 3.11, 3.13, 3.15, do Teorema 3.6, dos Exercícios 3.8 e 3.9 e da Observação 3.14 tal como da maioria das afirmações do mesmo gênero em seguida.

3.16. Operações com feixes. Lembremo-nos da construção de pullback ou de produto fibrado na categoria de espaços topológicos. Sejam $Y \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\pi} E$ funções contínuas entre espaços topológicos. Definimos o espaço $Y \times_X E := \big\{(y, e) \in Y \times E \mid fy = \pi e\big\}$ munido da topologia induzida da topologia produto de $Y \times E$ e das setas $Y \xleftarrow{\pi'} Y \times_X E \xrightarrow{f'} E$ induzidas pelas projeções do produto. É útil observar que $Y \times_X E = \bigsqcup\limits_{x\in X} f^{-1}x \times \pi^{-1}x$ como conjuntos.

3.16.1. Exercício. Sejam $Y \hookrightarrow X \xleftarrow{\pi} E$ um subespaço e uma função contínua. Mostre que $Y \xleftarrow{\pi'} \pi^{-1}Y \hookrightarrow E$ é um pullback.

Sejam $Y \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\pi} E$ funções contínuas e seja $Y \xleftarrow{\pi'} Y \times_X E \xrightarrow{f'} E$ o correspondente pullback. Mostre que

- π' é um fibrado localmente trivial se π é um fibrado localmente trivial,
- π' é um recobrimento regular se π é um recobrimento regular,
- π' é étale se π é étale.

3.16.2. Definição. Seja $f : Y \to X$ uma função contínua entre espaços topológicos e seja $E \in \mathbf{Et}_X$ a função étale que corresponde a um feixe F sobre X. A *imagem inversa* (ou a *pré-imagem* ou a *restrição*) $f^{-1}F$ de F é o feixe sobre Y que corresponde a $Y \times_X E \in \mathbf{Et}_Y$. Sendo o pullback um funtor em E, obtemos um funtor $f^{-1} : \mathbf{Et}_X \to \mathbf{Et}_Y$ e, portanto, um funtor $f^{-1} : \mathbf{Sh}_X \to \mathbf{Sh}_Y$.

É fácil ver que a restrição $F|_U$ da Definição 3.10 é um caso particular da Definição 3.16.2.

Note que a fibra $(f^{-1}F)_y$ é naturalmente isomorfa a fibra F_{fy}. De fato, a fibra F_x é "repetida" como a fibra de $f^{-1}F$ tantas vezes quantos elementos há em $f^{-1}x$. Considerando um feixe F sobre X como uma família de suas fibras parametrizada por X, $\mathrm{E}\,F = \bigsqcup\limits_{x\in X} F_x$, o feixe $f^{-1}F$ é apenas uma reparametrização da família por meio de $f : Y \to X$.

3.16.3. Observação. *Seja $f : Y \to X$ uma função contínua e seja $F \in \mathbf{Sh}_X$ um feixe. Definimos um pré-feixe $P \in \mathbf{PSh}_Y$ pela regra $PV := \operatorname*{colim}\limits_{U \supset fV} FU$, onde os morfismos de restrição são induzidos pela propriedade universal do colimite.*[6] *Então $f^{-1}F = \mathrm{A}\,P$.*

Demonstração. Sejam $U \supset U' \supset fV$ e seja $s : U \to \mathrm{E}\,F$ uma seção de F sobre U. A inclusão $Y \hookleftarrow V$ e a composta $V \to fV \hookrightarrow U \xrightarrow{s} \mathrm{E}\,F$ determinam uma seção $[s] : V \to \mathrm{E}(f^{-1}F)$ de $f^{-1}F$ pela propriedade universal do pullback $\mathrm{E}(f^{-1}F)$. É fácil ver que $[s|_{U'}] = [s]$. Lembrando-nos que PV é o colimite, obtemos uma seta $PV \to (f^{-1}F)V$. Por uma verificação imediata, tais setas são compatíveis com restrições. Em outras palavras, temos um morfismo $P \to f^{-1}F$. Resta observar que $P_y = F_{fy}$ ■

Feixes possuem também imagens diretas:

3.16.4. Definição. Seja $f : Y \to X$ uma função contínua entre espaços topológicos e seja F um feixe sobre Y. Então o feixe f_*F sobre X dado por $(f_*F)U := F(f^{-1}U)$ e munido dos óbvios morfismos de restrição é dito a *imagem direta* de F. É claro que obtemos um funtor $f_* : \mathbf{Sh}_Y \to \mathbf{Sh}_X$.

Dada uma seta $f : Y \to X$ entre espaços topológicos, por meio da composta com f, podemos levar cada função local $X \supset U \xrightarrow{s} A$ para uma função local $Y \supset f^{-1}U \xrightarrow{s\circ f} A$. A imagem inversa de feixe possibilita fazer algo semelhante com seções de feixes, mas em duas etapas. Inicialmente, fazemos a imagem inversa $f^{-1}F$ de um feixe F sobre X e levamos depois seções de F para seções de $f^{-1}F$:

3.16.5. Observação. *Seja $f : Y \to X$ uma função contínua entre espaços topológicos e seja F um feixe sobre X. Então, para qualquer conjunto aberto $U \subset X$, temos um morfismo $\eta^f : FU \to (f^{-1}F)(f^{-1}U) = (f_*f^{-1}F)U$. Tais morfismos são compatíveis com restrições, ou seja, constituem um morfismo $\eta^f : F \to f_*f^{-1}F$ e este morfismo é natural em F.*

Demonstração. Seja $s : U \to \mathrm{E}\,F$ uma seção. Então as setas $Y \hookleftarrow f^{-1}U \to \mathrm{E}\,F$, onde a segunda é a composta $f^{-1}U \to U \xrightarrow{s} \mathrm{E}\,F$, produzem a desejada seção $\eta^f s : f^{-1}U \to \mathrm{E}(f^{-1}F)$ pela propriedade universal de pullback. As afimações restantes ficam ao cargo do leitor ■

3.16.6. Exercício. Seja $f : Y \to X$ uma função contínua entre espaços topológicos e seja C um conjunto. Mostre que a imagem inversa do feixe constante é um feixe constante, isto é, $f^{-1}C_X = C_Y$. Caso $Y = x \in X$ seja um ponto em X, observe que $f_*C_Y = C_x$, onde C_x é o feixe arranha-céu.

[6] Para obter PV, identificamos seções $s \in FU$ com $U \supset fV$ (U está variando) que coincidem em uma vizinhança aberta de fV.

3.16.6. Proposição. *Sejam* $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ *funções contínuas entre espaços topológicos. Então* $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$ *e* $(fg)_* = f_*g_*$*. Além disto, existe uma bijeção* $b : \mathbf{Sh}_Y(f^{-1}F, G) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sh}_X(F, f_*G)$ *natural em* $G \in \mathbf{Sh}_Y$ *e* $F \in \mathbf{Sh}_X$*.*

Demonstração. A igualdade $(fg)_* = f_*g_*$ é trivial. A igualdade $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$ é um fato simples (e padrão) sobre pullbacks e fica como um exercício para o leitor.

Seja $\varphi : f^{-1}F \to G$ um morfismo e seja $s \in FU$. Pela Observação 3.16.5, obtemos uma seção $\eta^f s : f^{-1}U \to \mathrm{E}(f^{-1}F)$ de $f^{-1}F$. Aplicando φ, ganhamos uma seção $\varphi(\eta^f s)$ de G sobre $f^{-1}U$, isto é, uma seção de f_*G sobre U. As verificações que $FU \ni s \mapsto \varphi(\eta^f s) \in (f_*G)U$ define um morfismo $b\varphi : F \to f_*G$ e a naturalidade de b ficam na consciência do leitor.

Apenas indicamos a inversa para b. Seja $\psi : F \to f_*G$ um morfismo e seja $P \in \mathbf{PSh}_Y$ o pré-feixe dado por $PV := \operatorname*{colim}_{U \supset fV} FU$ para todos os conjuntos abertos $V \subset Y$. As compostas $FU \xrightarrow{\psi} G(f^{-1}U) \xrightarrow{|_V} GV$ são compatíveis com as restrições $|_{U'}$, onde $U, U' \subset X$ são conjuntos abertos tais que $U \supset U' \supset fV$. Pela propriedade universal do colimite, obtemos uma seta $PV \to GV$. É fácil ver que tais setas constituem um morfismo $P \to G$. Pelo Exercício 3.8 e pela Observação 3.16.3, obtemos o morfismo desejado $\varphi : \mathrm{A}\,P \to G$ com $f^{-1}F = \mathrm{A}\,P$. A inversa de b manda $\psi \mapsto \varphi$ ■

Sendo comum em considerações teóricas, o espaço étale de feixe não é muito útil na prática, pois em geral é muito grande. Por exemplo, funções contínuas locais de X para $\mathbb{R}$ são seções do fibrado $X \times \mathbb{R} \to X$ e formam o feixe C^0_X, mas o espaço étale $\mathrm{E}\,C^0_X$ é imenso ...

Podemos colar feixes ao longo de conjuntos abertos. (Em certas circunstâncias, podemos colar feixes também ao longo de conjuntos fechados, mas este problema é bem mais delicado.)

3.16.7. Exercício (colagem de feixes). Seja $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ uma cobertura aberta de um espaço topológico X e sejam $F_i \in \mathbf{Sh}_{U_i}$, $i \in I$, feixes compatíveis, isto é, tais que $F_i|_{U_i \cap U_j} = F_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos $i, j \in I$. Mostre que existe um único feixe $F \in \mathbf{Sh}_X$ tal que $F|_{U_i} = F_i$.

Quando queremos considerar FU como um funtor em F, escrevemos $\Gamma(U, F) := \mathrm{H}^0(U, F) := FU$. Por exemplo, pela Definição 3.16.4, temos um isomorfismo $\Gamma(f^{-1}U, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U, f_*F)$. Tal isomorfismo é natural em F para quaisquer função contínua $f : Y \to X$, conjunto aberto $U \subset X$ e feixe F sobre Y.

3.16.8. Subfeixes gerados por seções. Seja $F : \operatorname{Top} X \to \mathcal{C}$ um feixe. Um *subfeixe* $F' \leqslant F$ de F é um feixe $F' : \operatorname{Top} X \to \mathcal{C}$ tal que $F'U \hookrightarrow FU$ é um subobjeto na categoria $\mathcal{C}$ para todo conjunto aberto $U \subset X$ e os morfismos de restrição em F' e em F são compatíveis. Em outras palavras, temos um morfismo $F' \hookrightarrow F$ de feixes.

Seja $F_i \leqslant F$, $i \in I$, uma família de subfeixes de um feixe $F : \operatorname{Top} X \to \mathcal{C}$. Então é fácil verificar que a interseção $F' := \bigcap_{i \in I} F_i$, dada por $F'U := \bigcap_{i \in I} F_iU$ para cada conjunto aberto $U \subset X$, é um subfeixe de F.

Seja $s_i \in FU_i$, $i \in I$, uma família de seções de F, onde $X \supset U_i$ são conjuntos abertos. Interceptando todos os subfeixes $\mathrm{F}' \leqslant F$ de F tais que $s_i \in F'U_i$ para todo $i \in I$, obtemos o *subfeixe* $\langle s_i \in FU_i \mid i \in I\rangle$ *gerado* pela família.

3.16.9. Exercício. Seja $F \in \mathbf{Sh}_X$ um feixe sobre um espaço topológico X. Mostre que, no nível de espaços étales, os subfeixes de F coincidem com conjuntos abertos em $\mathrm{E}\,F$.

3.17. Pré-feixe e feixes de módulos. Por simplicidade, lidaremos com pré-feixes e feixes de grupos abelianos no lugar dos de módulos e as palavras "pré-feixe" e "feixe" significarão nesta subseção os de grupos abelianos (ou os de módulos). Dizemos que uma sequência de pré-feixes $P_1 \to \mathrm{P}_2 \to P_3$ sobre um espaço topológico X é *(semi)exata* se a sequência $P_1U \to \mathrm{P}_2\,U \to P_3U$ é (semi)exata para todo conjunto aberto $U \subset X$. É fácil ver que, com tal definição, os pré-feixes formam uma categoria abeliana.

3.17.1. Exercício. Mostre que, na categoria de todos os pré-feixes sobre X, o funtor $_x$ é exato para todo $x \in X$.

3.17.2. Exercício. Seja $\varphi : F \to F'$ um morfismo entre feixes sobre X. Mostre que $\operatorname{Ker}\varphi$ é um feixe.

3.17.3. Exercício. Mostre que um feixe F sobre X é nulo se e só se todas as suas fibras são nulas.

Entretanto, a categoria de feixes não será abeliana com a definição acima. O problema é que o conúcleo, a imagem e o quociente de feixes não são em geral feixes.

3.17.4. Proposição. *Seja $\varphi : F \to F'$ um morfismo de feixes sobre X. Denotemos por $p' : F' \to P'$ o conúcleo de φ na categoria de pré-feixes sobre X e seja $\eta' : P' \to \mathrm{A}\,P'$ o feixe associado. Então a composta $\eta'p' : F' \to \mathrm{A}\,P'$ é o conúcleo de φ na categoria de feixes sobre X.*

A categoria de feixes sobre X é abeliana.

Uma sequência $F \to F' \to F''$ é exata na categoria de feixes sobre X se e só se as sequências $F_x \to F'_x \to F''_x$ são exatas para todo $x \in X$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{A}\,P \arrow[dr, "j"] & & \\
P \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "j'"] & & \operatorname{Ker}(\eta'p') \arrow[dl, "i'"] & \\
F \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\varphi"'] & F' \arrow[r, "p'"] \arrow[dr, "\psi"'] & P' \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{A}\,P' \arrow[dl, "\beta"] \\
\operatorname{Ker}\varphi \arrow[u, "i"] & & G &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Se $\psi : F' \to G$ é um morfismo de feixes sobre X com $\psi\varphi = 0$, então existe um único morfismo $\alpha : P' \to G$ tal que $\psi = \alpha p'$, pois $p' : F' \to P'$ é o conúcleo de φ na categoria de pré-feixes. Pelo Exercício 3.8, existe um único morfismo $\beta : \mathrm{A}\,P' \to G$ tal que $\alpha = \beta\eta'$, pois G é um feixe. Em outras palavras, $\eta'p' : F' \to \mathrm{A}\,P'$ é o conúcleo de φ na categoria de feixes.

Denotamos por $i : \operatorname{Ker}\varphi \to F$, $i' : \operatorname{Ker}(\eta'p') \to F'$, $p : F \to P$ e $\eta : P \to \mathrm{A}\,P$ o núcleo de φ, o núcleo de $\eta'p'$, o conúcleo de i (este na categoria de pré-feixes) e o feixe associado a P. Já que a categoria de pré-feixes é abeliana, temos $\varphi = j'p$, onde $j' : P \to F'$ é o núcleo de p'. Usando a propriedade do núcleo de $\eta'p'$ e o Exercício 3.8, encontramos um morfismo $j : \mathrm{A}\,P \to \operatorname{Ker}(\eta'p')$ tal que $j' = i'j\eta$. Para mostrar que a categoria de feixes é abeliana, é suficiente verificar que j é um isomorfismo. Pela Observação 3.14, basta observar que j_x é uma bijeção para qualquer $x \in X$. Levando em conta que as fibras de um pré-feixe coincidem com as de seu feixe associado, isto segue do Exercício 3.17.1 (vide o diagrama).

Se a sequência de feixes $F \to F' \to F''$ é exata, a sequência de fibras $F_x \to F'_x \to F''_x$ é exata para todo $x \in X$ pelas razões que acabamos de mencionar. Para a recíproca, basta notar que um morfismo entre feixes $\varphi : F \to F'$ é mono/epi se é mono/epi no nível de todas as fibras. Aqui resta considerar o núcleo/conúcleo de φ, aplicar o funtor $_x$ e usar o Exercício 3.17.3 ■

Usando o Exercício 3.17.1, a Proposição 3.17.4 e o fato que as fibras de um pré-feixe coincidem com as fibras do seu feixe associado, chegamos ao

3.17.5. Corolário. *O funtor* A *da categoria de pré-feixes para a categoria de feixes é exato* ■

3.17.6. Exemplo. Seja X uma variedade analítica. Denotamos por $\mathbb{Z}_X$ o feixe constante sobre X com valores em $\mathbb{Z}$ (isto é, o feixe de funções localmente constantes com valores inteiros), por $\mathcal{O}_X$, o feixe de funções analíticas sobre X e por $\mathcal{O}_X^\times$, o feixe de funções analíticas não-nulas em cada ponto onde são definidas. Os feixes $\mathbb{Z}_X$ e $\mathcal{O}_X$ são feixes de grupos abelianos relativamente à adição usual de funções. O feixe $\mathcal{O}_X^\times$ também é um feixe de grupos abelianos, mas relativamente à multiplicação usual de funções. Então $0 \to \mathbb{Z}_X \overset{2\pi i}{\longrightarrow} \mathcal{O}_X \overset{\exp}{\longrightarrow} \mathcal{O}_X^\times \to 1$ é uma sequência exata de feixes, onde $2\pi i$ é a multiplicação por $2\pi i$ e exp é a composta com a função exponencial $\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Com efeito, o único momento não-trivial na verificação é que exp é um epimorfismo. Seja $X \ni x$ um ponto, seja $x \in U \subset X$ uma vizinhança aberta de x e seja $s : U \to \mathbb{C}$ uma função de $\mathcal{O}_X^\times U$, $s \in \mathcal{O}_X^\times U$. Basta, diminuindo a vizinhança U de x, encontrar uma função analítica g sobre U tal que $\exp g = s$. A função $\exp z$ assume todos os valores não-nulos. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $sx = 1$. Lembramo-nos que a função analítica dada através da série $fz := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, convergente para $|z| < 1$, satisfaz a identidade $\exp(fz) = \frac{1}{1-z}$, pois $f'z = \frac{1}{1-z}$ implica que a derivada da função $(1-z)\exp(fz)$ é nula. Diminuindo a vizinhança U para que a desigualdade $|1 - s^{-1}| < 1$ seja válida sobre U, vemos que a função $f(1 - s^{-1})$ é bem definida em U e é analítica. Resta observar que $\exp\big(f(1 - s^{-1})\big) = \frac{1}{1-(1-s^{-1})} = s$.

Entretanto, a sequência $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\exp} \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) \to 1$ nem sempre é exata. Por exemplo, para $X := \mathbb{C} \setminus 0$, não existe nenhuma função analítica $g : X \to \mathbb{C}$ tal que $\exp(gz) = z$. Realmente, caso contrário, substituindo $z := \exp w$, obtemos $g(\exp w) = w + 2\pi i n_w$ para todo $w \in \mathbb{C}$ e alguns $n_w \in \mathbb{Z}$. Sendo $\mathbb{C}$ conexo, concluímos que $n := n_w$ independe de w. Substituindo $w \mapsto w + 2\pi i$ em $g(\exp w) = w + 2\pi i n$, chegamos a uma contradição.

3.18. Espaços anelados. Na linguagem de feixes, podemos definir uma variedade diferenciável como um espaço topológico X, Hausdorff e com uma base enumerável de topologia, munido de um feixe F de $\mathbb{R}$-álgebras de funções para $\mathbb{R}$ tal que $(U, F|_U)$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$ munido de seu feixe de funções C^∞, onde U percorre uma cobertura aberta de X. Podemos definir uma função diferenciável $f : (Y, G) \to (X, F)$ entre variedades diferenciáveis como uma função contínua $f : Y \to X$ tal que $f^*F \leqslant G$, isto é, para toda função $s \in FU$ com $X \supset U$ aberto, sua composta com f está em G, ou seja, a função $f^*s := s \circ f : f^{-1}U \to \mathbb{R}$ está em $G(f^{-1}U)$.

3.18.1. Definição. Um espaço topológico X munido de um feixe $\mathcal{O} : \operatorname{Top} X \to \mathbf{Alg}_k$ de k-álgebras é dito um *espaço anelado.* Caso cada fibra $\mathcal{O}_x$, $x \in X$, seja uma k-álgebra local, o espaço é *anelado local.*

Um *morfismo* $(f, f^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ entre espaços anelados é uma função contínua $f : Y \to X$ e um morfismo $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_*O_Y$ de feixes de k-álgebras sobre X ou, equivalentemente, um morfismo $f^\# : f^{-1}\mathcal{O}_X \to O_Y$ de feixes de k-álgebras sobre Y (vide a Proposição 3.16.6). Já que a fibra de $f^{-1}\mathcal{O}_X$ em $y \in Y$ é naturalmente isomorfa a $\mathcal{O}_{X,fy}$, obtemos um morfismo $f_y : \mathcal{O}_{X,fy} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ de k-álgebras para cada $y \in Y$.

Um morfismo $(f, f^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ entre espaços anelados locais é *local* se o morfismo $f_y : \mathcal{O}_{X,fy} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ entre k-álgebras locais é *local* para todo $y \in Y$. Isto significa que $f_y m_{X,fy} \subset m_{Y,y}$, denotando por $m_{X,x} \lhd \mathcal{O}_{X,x}$ e $m_{Y,y} \lhd \mathcal{O}_{Y,y}$ os ideais maximais.

3.18.2. Exercício. Verifique que espaços anelados formam uma categoria. Verifique que espaços anelados locais com morfismos locais entre si formam uma categoria.

3.19. Feixes coerentes. Fibrados vetoriais localmente triviais são uma ferramenta muito importante no estudo da geometria. Na linguagem de feixes, um *fibrado trivial* de posto n sobre um espaço anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ é simplesmente um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos isomorfo a $\mathcal{O}_X^n := \underbrace{\mathcal{O}_X \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_X}_{n \text{ vezes}}$, ou seja, um $\mathcal{O}_X$-*módulo livre.* Um *fibrado localmente trivial* é um feixe F localmente livre de $\mathcal{O}_X$-módulos. Isto significa que o feixe $F|_U$ sobre U é livre, onde U percorre uma cobertura aberta de X. Os fibrados localmente triviais não formam uma categoria abeliana. Daqui surge a necessidade de introduzir feixes coerentes.

Nesta subseção a palavra "feixe" significa um feixe de $\mathcal{O}$-módulos sobre um espaço anelado $(X, \mathcal{O})$.

3.19.1. Definição. Um feixe F sobre X é dito *finitamente gerado* (abreviado *fg*) se existe um número finito de seções globais $s_1, \dots, s_n \in FX$ que geram F. Em outras palavras, cada fibra F_x de F é gerada pelos germes $s_{1,x}, \dots, s_{n,x}$. Equivalentemente, existe um epimorfismo $\mathcal{O}^n \to F$.

Um feixe F sobre X é *localmente finitamente gerado* (abreviado *lfg*) se o feixe $F|_U$ sobre U é fg, onde U percorre uma cobertura aberta de X.

3.19.2. Observação. *Seja F um feixe lfg sobre um espaço topológico X, seja $x \in U \subset X$ uma vizinhança aberta e sejam $s_1, \dots s_n \in FU$ seções de F. Se os germes $s_{1,x}, \dots, s_{n,x}$ geram a fibra F_x,* *então existe uma vizinhança aberta $x \in W \subset U$ tal que as seções $s_1|_W, \dots, s_n|_W$ geram $F|_W$.*

Demonstração. Sejam $g_1, \dots, g_m \in FV$ geradores de $F|_V$, onde $x \in V \subset U$ é uma vizinhança aberta. O fato que a fibra F_x é gerada por $s_{1,x}, \dots, s_{n,x}$ significa que $g_{i,x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij,x} s_{j,x}$ para alguns $a_{ij,x} \in \mathcal{O}_x$ e todos i. Resta observar que um número finito de igualdades para germes continua a valer para seções em uma vizinhanca do ponto em questão ■

3.19.3. Definição. Um feixe lfg F sobre X é dito *coerente* se o núcleo de qualquer morfismo $\mathcal{O}^n|_U \to F|_U$ é um feixe lfg para cada conjunto aberto $U \subset X$. Em outras palavras, um feixe lfg F é coerente se é lfg o feixe de relações entre seções locais arbitrárias $s_1, \dots, s_n \in FU$.

3.19.4. Observação. *Qualquer subfeixe lfg de um feixe coerente é coerente. Em particular, a imagem de qualquer morfismo entre feixes coerentes é um feixe coerente.* ■

3.19.5. Teorema. *Seja $0 \to F_1 \xrightarrow{i} F_2 \xrightarrow{p} F_3 \to 0$ uma sequência exata de feixes. Se dois dos feixes F_1, F_2, F_3 são coerentes, então o terceiro é coerente. Além disto, feixes coerentes formam uma categoria abeliana denotada por* $\mathbf{Coh}_X$.

Demonstração. Suponha que F_2 e F_3 são coerentes. Pela Observação 3.19.4, para mostrar que F_1 é coerente, basta entender que F_1 é fg em uma vizinhança aberta de qualquer ponto $x \in X$. Sobre uma vizinhança aberta de x, temos um epimorfismo $g : \mathcal{O}^n \to F_2$. Sendo F_3 coerente, diminuindo a vizinhança de x, obtemos uma sequência exata $\mathcal{O}^m \to \mathcal{O}^n \xrightarrow{pg} F_3 \to 0$. Por uma caça no diagrama, obtemos o desejado epimorfismo $\mathcal{O}^m \to F_1$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}^m \arrow[dd] \arrow[dr] & & & \\
& & \mathcal{O}^n \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "pg"] & & \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"'] & F_2 \arrow[r, "p"'] \arrow[d] & F_3 \arrow[r] \arrow[dr] & 0 \\
& & 0 & & 0
\end{tikzcd}$$

Suponha que F_1 e F_2 são coerentes. Sendo a imagem de um feixe lfg, F_3 é lfg. Como acima, basta atuar em uma vizinhança aberta de um ponto arbitrário $x \in X$. Seja $q : \mathcal{O}^n \to F_3$ um morfismo determinado por seções $s_1, \dots, s_n \in F_3X$. Sobre uma vizinhança aberta de x, podemos levantar estas seções para seções de F_2. Assim, diminuindo a vizinhança de x, obtemos um morfismo $h : \mathcal{O}^n \to F_2$ tal que $ph = q$. Sendo F_1 lfg, diminuindo a vizinhança de x, podemos providenciar um epimorfismo $f : \mathcal{O}^m \to F_1$. Os morfismos $if : \mathcal{O}^m \to F_2$ e $h : \mathcal{O}^n \to F_2$ definem um morfismo $g : \mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n \to F_2$. É facil ver que $q\pi = ph\pi = pg$. Sendo F_2 coerente, diminuindo a vizinhança de x, obtemos uma sequência exata $\mathcal{O}^l \xrightarrow{d} \mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n \xrightarrow{g} F_2$. Por uma caça no diagrama, podemos ver que a sequência $\mathcal{O}^l \xrightarrow{\pi d} \mathcal{O}^n \xrightarrow{q} F_1$ é exata.

$$\begin{tikzcd}
& & \mathcal{O}^l \arrow[d, "d"'] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^m \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{O}^n \arrow[r] \arrow[d, "q"] \arrow[dl, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"'] \arrow[d] & F_2 \arrow[r, "p"'] & F_3 \arrow[r] & 0 \\
& 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Suponha que F_1 e F_3 são coerentes. Atuamos em uma vizinhança aberta de $x \in X$. Podemos supor que temos epimorfismos $f : \mathcal{O}^m \to F_1$ e $q : \mathcal{O}^n \to F_3$. Como acima, passando para uma vizinhança aberta de x, podemos encontrar um morfismo $g : \mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n \to F_2$ tal que $q\pi = pg$. Pelo lema da serpente, g é um epimorfismo. Logo, F_2 é lfg.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^m \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{O}^n \arrow[r] \arrow[d, "q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"'] \arrow[d] & F_2 \arrow[r, "p"'] & F_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Seja $g : \mathcal{O}^n \to F_2$ um morfismo. Sendo F_3 coerente, diminuindo a vizinhança aberta de x, encontramos uma sequência exata $\mathcal{O}^m \xrightarrow{h} \mathcal{O}^n \xrightarrow{pg} F_3$. Logo, temos um morfismo $f : \mathcal{O}^m \to F_1$ tal que $gh = if$. Sendo F_1 coerente, diminuindo a vizinhança aberta de x, encontramos uma sequência exata $\mathcal{O}^l \xrightarrow{d} \mathcal{O}^m \xrightarrow{f} F_1$. Por uma caça no diagrama, a sequência $\mathcal{O}^l \xrightarrow{hd} \mathcal{O}^n \xrightarrow{g} F_2$ é exata.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}^l \arrow[d, "d"'] \\
& \mathcal{O}^m \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "h"] \\
& & \mathcal{O}^n \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "pg"] \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"'] & F_2 \arrow[r, "p"'] & F_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

O fato que a categoria de feixes coerentes é abeliana segue agora da Observação 3.19.4 ■

3.19.6. Corolário. *Sejam $F_1, F_2 \leqslant F$ subfeixes lfg de um feixe coerente F. Então os feixes $F_1 \cap F_2$ e $F_1 + F_2$ são coerentes.*

Demonstração. Pela Observação 3.19.4, os feixes F_1, F_2 e $F_1 + F_2$ são coerentes. Pelo Teorema 3.19.5, o feixe $F_1 \oplus F_2$ é coerente. A sequência exata $0 \to F_1 \cap F_2 \to F_1 \oplus F_2 \to F_1 + F_2 \to 0$ mostra que $F_1 \cap F_2$ é coerente ■

3.19.7. Definição. Um feixe $\mathcal{O}$ de k-álgebras sobre um espaço topológico é dito *coerente* se $\mathcal{O}$ é coerente como feixe de $\mathcal{O}$-módulos.

Caso o feixe $\mathcal{O}$ sobre X seja coerente, cada feixe coerente F de $\mathcal{O}$-módulos sobre X admite uma resolução local de qualquer comprimento $m \in \mathbb{N}$, isto é, existem sequências exatas

$$\mathcal{O}^{k_m}|_U \to \mathcal{O}^{k_{m-1}}|_U \to \cdots \to \mathcal{O}^{k_1}|_U \to \mathcal{O}^{k_0}|_U \to F|_U \to 0,$$

onde $k_0, k_1, \ldots, k_{m-1}, k_m \in \mathbb{N}$ e U percorre uma cobertura aberta de X.

3.20. Historicamente, feixes apareceram pela necessidade de considerar objetos tais como δ-funções ou distribuições, objetos estes que já não são funções no sentido próprio. Entretanto, era importante que continuasse a ser possível considerá-los localmente. Em algum momento, G. Leray, pelo mito estando no campo de concentração na época da segunda guerra mundial, conscientizou que é necessário e possível separar o conceito de "ser local" do conceito de função e, assim, considerar os objetos que permitem um tratamento local mas que nem fingem ser funções. Para axiomatizar a situação, ele introduziu pré-feixes e descobriu logo que o conceito de feixe é mais adequado.[7]

4. Esquemas

Agora podemos contar toda a verdade sobre k-esquemas.

4.1. Definição. Seja $C \in \mathbf{Alg}_k$ uma k-álgebra. Pela Observação 2.9, o espaço $X := \operatorname{Spec} C$, munido da topologia de Zariski, possui a base B de abertos principais $\mathbf{D}\,c$, $c \in C$. Temos um pré-feixe $P : B \to \mathbf{Alg}_k$ dado por $P(\mathbf{D}\,c) := C[c^{-1}]$. O feixe associado $\mathcal{O}_X := \mathrm{A}\,P$ de k-álgebras providencia um espaço anelado local $(X, \mathcal{O}_X)$, chamado *k-esquema afim.*

Um *k-esquema* é um espaço anelado local $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ é um k-esquema afim, onde U percorre uma cobertura aberta de X. *Morfismos* entre esquemas são morfismos locais entre espaços anelados locais. Denotamos por $\mathbf{Sch}_k$ a categoria de todos os k-esquemas.

Em outras palavras, cada k-esquema localmente é um k-esquema afim.

Na verdade, o pré-feixe $P : B \to \mathbf{Alg}_k$ na Definição 4.1, é um feixe sobre B. No Lema 4.4, provaremos um fato mais geral.

[7]Levando em conta que A. Grothendieck também estava no campo de concentração e lembrando O. Teichmüller (morreu na Frente Oriental em 1943, https://pt.wikipedia.org/wiki/Oswald_Teichmüller) e E. Witt (como O. Teichmüller, E. Witt também foi um fascista, mas não foi para a guerra, https://pt.wikipedia.org/wiki/Ernst_Witt), parece visível uma influência do fascismo para o desenvolvimento da geometria algébrica.

4.2. Observação. *Seja $P : B \to \mathbf{Ab}$ um pré-feixe de grupos abelianos sobre uma base B de um espaço topológico e seja $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ uma cobertura aberta, onde $U, U_i \in B$ para todo $i \in I$. Então a sequência semiexata (3.3) é compatível com restrições. Isto significa que é comutativo o diagrama acima, onde $V \in B$ e as setas verticais são induzidas pelos morfismos de restrição. A sequência (3.3) é exata se $U = U_i$ para algum $i \in I$. Caso I seja finito, a sequência (3.3) é da forma*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & FU & \longrightarrow & \prod_{i\in I} FU_i & \longrightarrow & \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F(V\cap U) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} F(V\cap U_i) & \longrightarrow & \prod_{i,j\in I} F(V\cap U_i\cap U_j) \end{array}$$

(4.3) $$0 \longrightarrow FU \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} FU_i \longrightarrow \bigoplus_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j) \ \blacksquare$$

4.4. Lema. *Seja C uma k-álgebra e seja M um C-módulo. A regra $\widetilde{M}(\mathbf{D}\,c) := M[c^{-1}]$ define um feixe $\widetilde{M} : B \to \mathbf{Ab}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre a base B de conjuntos abertos principais em $X := \operatorname{Spec} C$. Para cada $p \in \operatorname{Spec} C$, temos um isomorfismo natural $\widetilde{M}_p = M_p$.*

Demonstração. O fato que $\widetilde{M}$ é um pré-feixe é trivial. Para ver que $\widetilde{M}$ é um feixe, basta mostrar que a sequência (3.3) é exata para $F := \widetilde{M}$. Cada conjunto aberto principal é quase-compacto pelas Observações 2.9 e 2.8. Logo, podemos supor que I é finito. Neste caso, temos a sequência (4.3) com $U := \mathbf{D}\,c$ e $U_i := \mathbf{D}(cc_i)$, $i \in I$. Pela Observação 4.2, o funtor de localização com respeito a cc_k faz exata a sequência (4.3) de $C[c^{-1}]$-módulos para todo $k \in I$, pois tal localização induz a restrição da sequência (4.3) para $V := U_k$ e $V \cap U = V \cap U_i$ para $i = k$. Isto significa que cada cohomologia H^n do complexo (4.3) é nula após a localização. (Note que qualquer funtor aditivo exato preserva cohomologias.) Seja $h \in \mathrm{H}^n$. Então $(cc_k)^{n_k} h = 0$ para alguns $n_k \in \mathbb{N}$ e todos $k \in I$. Sabemos que $\mathbf{D}\,c = \bigcup_{k\in I} \mathbf{D}(cc_k) = \bigcup_{k\in I} \mathbf{D}(cc_k)^{n_k}$ implica que $1 \in \sum_{k\in I} C[c^{-1}](cc_k)^{n_k}$ em $C[c^{-1}]$. Logo, $h = 0$.

É claro que $\widetilde{M}(\mathbf{D}\,c)$ é um $\mathcal{O}_X(\mathbf{D}\,c)$-módulo, pois $\widetilde{M}(\mathbf{D}\,c) = M[c^{-1}]$ e $\mathcal{O}_X(\mathbf{D}\,c) = C[c^{-1}]$; os morfismos de restrição obviamente respeitam estas estruturas.

Finalmente, $\widetilde{M}_p = \operatorname*{colim}_{\mathbf{D}\,c \ni p} \widetilde{M}(\mathbf{D}\,c) = \operatorname*{colim}_{c \notin p} M[c^{-1}] = M_p$ $\blacksquare$

Aplicando o Lema 4.4 para $M := C$, obtemos o Lema 2.10. A apresentada demonstração é bem mais adequada do que a do Lema 2.10.

É essencial (embora óbvio) que, para qualquer conjunto aberto principal $U := \operatorname{Spec} C[c^{-1}] = \mathbf{D}\,c \subset \operatorname{Spec} C =: X$, $c \in C$, a restrição $\widetilde{M}|_U$ tem a forma $\widetilde{M}|_U = \widetilde{M[c^{-1}]}$, ou seja, tal restrição é feita do $C[c^{-1}]$-módulo $M[c^{-1}]$.

4.5. Observação. *Sejam U_i, $i \in I$, uma família finita de subesquemas abertos afins de um k-esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ e seja $p \in V \subset \bigcap_{i\in I} U_i$ uma vizinhança aberta de um ponto $p \in X$. Então existe uma vizinhança aberta $p \in W \subset V$ principal em U_i para todo $i \in I$.*

Demonstração. Por indução, o fato se reduz à situação onde $p \in V = U_1 \subset U_2$ com U_1 e U_2 abertos afins. Encontramos $c \in \mathcal{O}_X U_2$ tal que $p \in \mathbf{D}\,c \subset V$. Obviamente, $\mathbf{D}\,c = \mathbf{D}(c|_V)$ $\blacksquare$

4.6. Lema. *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um k-esquema afim, seja $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ uma cobertura aberta por subesquemas afins e seja F um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X tal que $F|_{U_i} = \widetilde{M_i}$, onde M_i é um $\mathcal{O}_X U_i$-módulo para todo $i \in I$. Então $F = \widetilde{FX}$.*

Demonstração. Denotamos $C := \mathcal{O}_X X$. Sem perda de generalidade, podemos supor que I é finito e que $U_i = \mathbf{D}\,c_i$ com $c_i \in C$. A restrição para U_k da sequência exata (4.3) com $U := X$ se realiza por meio da localização com respeito a c_k. Sendo tal restrição exata e sendo a localização um funtor exato, comparando os primeiros termos das sequências, obtemos um isomorfismo natural $(FX)[c_k^{-1}] = FU_k$. Em outras palavras, $\widetilde{FX}|_{U_k} = \widetilde{M}_k$ para todo $k \in I$. Resta aplicar o Exercicio 3.16.7 afirmando que a colagem de feixes é única ■

4.7. Definição. Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um k-esquema e seja F um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Dizemos que F é *quase-coerente* se $F|_U = \widetilde{FU}$, onde U percorre uma cobertura aberta afim de X. Pelo Lema 4.6, $F|_V = \widetilde{FV}$ para qualquer k-subesquema aberto afim V de X. Denotamos por $\mathbf{QCoh}_X$ a categoria de todos os feixes quase-coerentes sobre X. Claramente, $\mathcal{O}_X \in \mathbf{QCoh}_X$.

4.8. Definição. Sejam F_1, F_2 feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre um espaço anelado $(X, \mathcal{O}_X)$. A regra $PU := F_1U \otimes_{\mathcal{O}_X U} F_2U$ define um pré-feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X. O feixe associado A P é o *produto tensorial* de F_1 e F_2 denotado por $F_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} F_2$.

4.9. Observação. *Para cada $x \in X$, temos um isomorfismo natural* $(F_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} F_2)_x = F_{1,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} F_{2,x}$.

Demonstração. Para qualquer vizinhança aberta $x \in U \subset X$, temos uma seta $F_1U \otimes_{\mathcal{O}_X U} F_2U \to F_{1,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} F_{2,x}$. Pela definição de colimite, encontramos uma seta $(F_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} F_2)_x \to F_{1,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} F_{2,x}$. Por outro lado, dados germes $f_{i,x} \in F_{i,x}$, $i = 1, 2$, existe uma vizinhança aberta $x \in U \subset X$ tal que $f_i \in F_iU$. Deste modo, obtemos $f_1 \otimes f_2 \in F_1U \otimes_{\mathcal{O}_X U} F_2U$ e a imagem $f_x \in (F_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} F_2)_x$ de $f_1 \otimes f_2$. Tal imagem independe da escolha de representantes f_1 e f_2. É fácil ver que a função $(f_{1,x}, f_{2,x}) \mapsto f_x$ é $\mathcal{O}_{X,x}$-bilinear. Resta utilizar a propriedade universal do produto tensorial $F_{1,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} F_{2,x}$ ■

4.10. Proposição. *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um k-esquema afim. Então $\widetilde{\ } : \mathbf{Mod}_C \to \mathbf{QCoh}_X$ é uma equivalência de categorias que preserva o produto tensorial, onde $C := \mathcal{O}_X X$. Em particular, o produto tensorial de feixes quase-coerentes sobre um k-esquema é um feixe quase-coerente.*

Demonstração. Qualquer homomorfismo $M_1 \to M_2$ de C-módulos induz um homomorfismo $M_1[c^{-1}] \to M_2[c^{-1}]$ para todo $c \in C$. Tais homomorfismos determinam univocamente um morfismo $\widetilde{M}_1 \to \widetilde{M}_2$. Portanto, $\widetilde{\ }$ é um funtor. Para ver que $b : \mathbf{Mod}_C(M_1, M_2) \to \mathbf{QCoh}_X(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2)$ é uma bijeção, basta indicar sua inversa $\Gamma(X, -)$. A afirmação sobre o produto tensorial é uma consequência imediata dos isomorfismos naturais $(M_1 \otimes_C M_2)[c^{-1}] = M_1[c^{-1}] \otimes_{C[c^{-1}]} M_2[c^{-1}]$ para $c \in C$ ■

4.11. Definição. Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado (local) e seja $X \supset U$ um conjunto aberto. Então o espaço anelado (local) $(U, \mathcal{O}_U)$, onde $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U$, é dito um *subespaço anelado aberto* de X.

4.12. Exercício. Mostre que a inclusão $i : U \hookrightarrow X$ junto com o morfismo (idêntico) $\mathcal{O}_X|_U = i^{-1}\mathcal{O}_X \xrightarrow{i^\#} \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$ definem um morfismo de espaços anelados (locais).

4.13. Exercício. Seja $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ um morfismo (local) entre espaços anelados (locais) e seja $i : U \hookrightarrow X$ um conjunto aberto considerado como subespaço anelado (local) tal que $fY \subset U$. Mostre que existe um único morfismo $f' : Y \to U$ tal que $f = if'$. Conclua que i é um monomorfismo.

4.14. Exercício. Seja $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ um morfismo (local) entre espaços anelados (locais) e sejam $X \supset U$ e $Y \supset f^{-1}U$ conjuntos abertos considerados como subespaços anelados (locais) $j : f^{-1}U \hookrightarrow Y$ e $i : U \hookrightarrow X$. Defina um morfismo (local) $f' : f^{-1}U \to U$ entre espaços anelados (locais) tal que $if' = fj$. Tal f' é dito *morfismo induzido* por f ou a *restrição* de f. Mostre que $U \xleftarrow{f'} f^{-1}U \xhookrightarrow{j} Y$ é um pullback de $U \xhookrightarrow{i} X \xleftarrow{f} Y$.

4.15. Exercício (colagem de morfismos). Sejam $(Y, \mathcal{O}_Y)$ e $(X, \mathcal{O}_X)$ espaços anelados (locais), seja $Y = \bigcup\limits_{i \in I} V_i$ uma cobertura aberta de Y e sejam $f_i : V_i \to X$, $i \in I$, morfismos (locais) *compatíveis* de subespaços anelados (locais) abertos V_i's para X, isto é, as restrições de f_i e de f_j da forma $V_i \cap V_j \to X$

coincidem para todos $i, j \in I$. Mostre que existe um único morfismo (local) $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ entre espaços anelados (locais) tal que todos os f_i's são restrições de f.

4.16. Teorema. *Há uma bijeção $b : \mathbf{Sch}_k(Y, X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Alg}_k(\mathcal{O}_X X, \mathcal{O}_Y Y)$ natural em um k-esquema $(Y, \mathcal{O}_Y)$ e em um k-esquema afim $(X, \mathcal{O}_X)$. Em particular, as categorias $\mathbf{ASch}_k$ e $\mathbf{Alg}_k$ são antiequivalentes.*

Demonstração. Cada morfismo $f : Y \to X$ produz o homomorfismo $\mathcal{O}_X X \to \mathcal{O}_Y Y$ de k-álgebras dado pelo morfismo de feixes $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_Y$, pois $(f_* \mathcal{O}_Y)X = \mathcal{O}_Y Y$. Este funtor dá a transformação $b : \mathbf{Sch}_k(Y, X) \to \mathbf{Alg}_k(\mathcal{O}_X X, \mathcal{O}_Y Y)$ natural em X e Y.

Seja $h : \mathcal{O}_X X \to \mathcal{O}_Y Y$ um homomorfismo de k-álgebras, onde X é um esquema afim.

Inicialmente, suponhamos que Y também é afim. Então existe um único morfismo local $f : Y \to X$ que induz o homomorfismo $h : A \leftarrow C$, onde $C := \mathcal{O}_X X$ e $A := \mathcal{O}_Y Y$. Para a unicidade, note que

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "i"] \\ C_{fy} \arrow[r, "f_y"] & A_y \end{tikzcd}$$

o homomorfismo $C_{fy} = \mathcal{O}_{X,fy} \xrightarrow{f_y} \mathcal{O}_{Y,y} = A_y$ está no diagrama comutativo à esquerda. Sendo f_y local, temos $f_y m_{X,fy} \subset m_{Y,y}$, ou seja, $f_y^{-1} m_{Y,y} = m_{X,fy}$. Levando em conta que $i^{-1} m_{Y,y} = y \lhd_p A$ e $j^{-1} m_{X,fy} = fy \lhd_p C$, concluímos que $fy = h^{-1} y$. Logo, como função, f é dada pela Definição 2.1. Observando que $f^{-1}(\mathbf{D}\, c) = \mathbf{D}(hc)$, entendemos que, para todo $c \in C$, o homomorfismo $C[c^{-1}] = \mathcal{O}_X(\mathbf{D}\, c) \xrightarrow{f^\#} (f_* \mathcal{O}_Y)(\mathbf{D}\, c) = A\big[(hc)^{-1}\big]$, compatível com o homomorfismo $C = \mathcal{O}_X X \xrightarrow{h} (f_* \mathcal{O}_Y)X = A$, está no diagrama comutativo à direita e é portanto único. Por outro lado, o último diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ C[c^{-1}] \arrow[r, "f^\#"] & A\big[(hc)^{-1}\big] \end{tikzcd}$$

providencia os homomorfismos que formam um morfismo $\mathcal{O}_X \xrightarrow{f^\#} f_* \mathcal{O}_Y$ de feixes sobre conjuntos abertos principais de X, pois são compatíveis com restrição. Deste modo, obtemos a existência.

Para Y arbitrário, seja $j : V \hookrightarrow Y$ um subesquema aberto afim de Y. Então, pelo fato que acabamos de mostrar, a composta $\mathcal{O}_X X \xrightarrow{h} \mathcal{O}_Y Y \to \mathcal{O}_Y V$ corresponde a um único morfismo $f_V : V \to X$. Se $V_1, V_2, W \hookrightarrow Y$ são subesquemas abertos afins de Y tais que $W \subset V_1 \cap V_2$, então $f_{V_1}|_W = f_{V_2}|_W$, pois as compostas $\mathcal{O}_X X \xrightarrow{h} \mathcal{O}_Y Y \to \mathcal{O}_Y V_1 \to \mathcal{O}_Y W$ e $\mathcal{O}_X X \xrightarrow{h} \mathcal{O}_Y Y \to \mathcal{O}_Y V_2 \to \mathcal{O}_Y W$ são as mesmas. Fazendo W percorrer uma cobertura aberta afim de $V_1 \cap V_2$, obtemos $f_{V_1}|_{V_1 \cap V_2} = f_{V_2}|_{V_1 \cap V_2}$ pela unicidade no Exercício 4.15. Resta aplicar o mesmo para uma cobertura aberta afim de Y ■

4.17. Lema (colagem de espaços). *Sejam $(V_i, \mathcal{O}_{V_i})$, $i \in I$, espaços anelados (locais), sejam $V_{ij} \hookrightarrow V_j$, $i, j \in I$, subespaços anelados abertos e sejam $f_{ij} : V_{ij} \to V_{ji}$ isomorfismos tais que $V_{ii} = V_i$ e são válidas as* relações *de* cociclo $f_{ii} = 1_{V_i}$, $f_{ji} f_{ij} = 1_{V_{ij}}$ e $f_{ij}|_{V_{ij} \cap V_{kj}} f_{jk}|_{V_{jk} \cap V_{ik}} f_{ki}|_{V_{ki} \cap V_{ji}} = 1_{V_{ki} \cap V_{ji}}$ *para todos $i, j, k \in I$. Então existe um espaço anelado (local) $(Z, \mathcal{O}_Z)$ com subespaços anelados abertos $Z_j \hookrightarrow Z$, $j \in I$, isomorfos aos V_j's, $f_j : V_j \xrightarrow{\sim} Z_j$ para todo $j \in I$, tais que $f_j|_{V_{ij}} : V_{ij} \to Z_i \cap Z_j$ são isomorfismos sujeitos às relações $f_j|_{V_{ij}} = f_i|_{V_{ji}} f_{ij}$ para todos $i, j \in I$. Tal Z é único a menos de isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, "f_j"] & Z_j & \\ V_{ij} \arrow[u] \arrow[r, "f_j|_{V_{ij}}"] \arrow[dr, "f_{ij}"] & Z_i \cap Z_j \arrow[u] \arrow[r] & Z_i \\ & V_{ji} \arrow[u, "f_i|_{V_{ji}}"] \arrow[r] & V_i \arrow[u, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

Demonstração. Na verdade, basta efetuar a colagem no nível de espaços topológicos, pois os feixes se colam utilizando o Exercício 3.16.7. No coproduto $\widetilde{Z} := \bigsqcup_{i \in I} V_i$ de espaços topológicos, introduzimos uma relação de equivalência: $V_i \ni v_i \sim v_j \in V_j$ se e só se $v_i \in V_{ji}$, $v_j \in V_{ij}$ e $f_{ij} v_j = v_i$. (O fato que esta é uma equivalência segue imediatamente das relações de cociclo.) Seja $Z := \widetilde{Z}/\sim$ o espaço munido da topologia do quociente, $p : \widetilde{Z} \to Z$. Note que $Z \supset pV_i$ é aberto em Z e que p estabelece um homeomorfismo $f_j : V_j \to pV_j =: Z_j$, pois $p^{-1}(pU_j) = \bigsqcup_{i \in I} f_{ij}(V_{ij} \cap U_j)$ para qualquer conjunto aberto $U_j \subset V_j$. As relações $f_j|_{V_{ij}} = f_i|_{V_{ji}} f_{ij}$ são imediatas. Resta munir Z_j do feixe ${f_j}_* \mathcal{O}_{V_j}$, ver que tais feixes são compatíveis e aplicar o Exercício 3.16.7 ■

4.18. Teorema. *Sejam* $X \xrightarrow{g} B \xleftarrow{h} Y$ *morfismos na categoria* $\mathbf{Sch}_k$. *Então existe um produto fibrado* $X \times_B Y \in \mathbf{Sch}_k$.

Demonstração. Procedemos pelos seguintes passos.

Passo 1. Caso B, X, Y sejam afins, o fato segue do Exercicio ac.1.10.11 e do Teorema 4.16.

Passo 2. Seja $X \xleftarrow{\pi} X \times_B Y \xrightarrow{p} Y$ um produto fibrado em $\mathbf{Sch}_k$ e seja $U \hookrightarrow X$ um subesquema aberto de X. Então o subesquema aberto $i : \pi^{-1}U \hookrightarrow X \times_B Y$ munido da restrição $\pi' : \pi^{-1}U \to U$ de π e da seta pi é um produto fibrado, $\pi^{-1}U = U \times_B Y$. Isto segue do Exercicio 4.14 e da propriedade categórica de pullbacks.

Passo 3. Seja $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ uma cobertura aberta. Suponha que existem produtos fibrados $V_i := U_i \times_B Y \in \mathbf{Sch}_k$ para todo $i \in I$. Então existe um produto fibrado $X \times_B Y \in \mathbf{Sch}_k$.

Com efeito, pelo Passo 2, o produto fibrado $(U_i \cap U_j) \times_B Y$ é um subesquema aberto $V_{ij} \hookrightarrow V_j$ em V_j tal como um subesquema aberto $V_{ji} \hookrightarrow V_i$ em V_i. Assim, temos um isomorfismo $f_{ij} : V_{ij} \to V_{ji}$ (sobre $U_i \cap U_j$ e, portanto,) sobre X e sobre Y. Aplicando de novo o Passo 2 para o produto fibrado $(U_i \cap U_j \cap U_k) \times_B Y$, vemos que tais isomorfismos satisfazem as relações de cociclo. A colagem Z, existente pelo Lema 4.17, está munida de morfismos $X \leftarrow Z \to Y$ compatíveis com os morfismos $U_i \leftarrow V_i \to Y$, $i \in I$, pelo Exercício 4.15. A demonstração que Z é um produto fibrado $Z = X \times_B Y$ se efetua localizando os morfismos $X \leftarrow W \to Y$ para os U_i's com uso do Exercício 4.15 e fica ao cargo do leitor.

Passo 4. Seja $B = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$ uma cobertura aberta. Suponha que existem produtos fibrados $X_i \times_{B_i} Y_i$ para todo $i \in I$, onde $X_i := g^{-1}B_i \hookrightarrow X$ e $Y_i := h^{-1}B_i \hookrightarrow Y$ são subesquemas abertos.

Basta observar que $X_i \times_{B_i} Y_i = X_i \times_B Y_i$ pelo Exercício 4.13 e, usando duas vezes o Passo 3, colar inicialmente produtos fibrados $X_i \times_B Y$ e depois um produto fibrado $X \times_B Y$.

Passo 5. Pelo Passo 4, o caso geral se reduz ao caso de B afim. Pelo Passo 3, reduzimos o problema ao caso de X e Y afins para o qual aplicamos o Passo 1 ∎

4.19. Definição. Seja $(f, f^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ um morfismo entre espaços anelados e seja F um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Definimos o feixe *induzido* f^*F de $\mathcal{O}_Y$-módulos pela fórmula $f^*F := \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}F$ que envolve o morfismo $f^\# : f^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ de feixes de k-álgebras.

4.20. Proposição. *Sejam* $(Z, \mathcal{O}_Z) \xrightarrow{(g,g^\#)} (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{(f,f^\#)} (X, \mathcal{O}_X)$ *morfismos entre espaços anelados. Então* $f^* : \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X} \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_Y}$ *e* $f_* : \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_Y} \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X}$ *são funtores,* $(fg)^* = g^*f^*$, $(fg)_* = f_*g_*$ *e existe uma bijeção* $b : \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_Y}(f^*F, G) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X}(F, f_*G)$ *natural em* $G \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_Y}$ *e* $F \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X}$.

Demonstração. Seja $G \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_Y}$. Sendo f_*G um feixe de $f_*\mathcal{O}_Y$-módulos, obtemos uma estrutura de $\mathcal{O}_X$-módulo sobre f_*G induzida pelo morfismo $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$. Logo, $f_* : \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_Y} \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X}$ é um funtor. A igualdade $(fg)_* = f_*g_*$ foi de fato observada na Proposição 3.16.6.

Seja $F \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X}$. Sendo $f^{-1}F$ um feixe de $f^{-1}\mathcal{O}_X$-módulos, o feixe $f^*F = \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}F$ pertence a $\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_Y}$. Logo, $f^* : \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X} \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_Y}$ é um funtor. O funtor g^{-1} preserva produtos tensoriais. Pela Proposição 3.16.6,

$$g^*f^*F = \mathcal{O}_Z \otimes_{g^{-1}\mathcal{O}_Y} g^{-1}(\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}F) =$$

$$= \mathcal{O}_Z \otimes_{g^{-1}\mathcal{O}_Y} g^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{g^{-1}f^{-1}\mathcal{O}_X} g^{-1}f^{-1}F = \mathcal{O}_Z \otimes_{(fg)^{-1}\mathcal{O}_X} (fg)^{-1}F = (fg)^*F,$$

ou seja, $(fg)^* = g^*f^*$.

Pela Proposição 3.16.6, obtemos uma bijeção $\mathbf{Mod}_{f^{-1}\mathcal{O}_X}\big(f^{-1}F, [f^\#]G\big) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X}(F, f_*G)$ natural em $F \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X}$ e $G \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_Y}$, onde o funtor de esquecimento $[f^\#] : \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_Y} \to \mathbf{Mod}_{f^{-1}\mathcal{O}_X}$ é induzido pelo morfismo $f^\# : f^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$. A bijeção $\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_Y}(f^*F, G) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}_{f^{-1}\mathcal{O}_X}\big(f^{-1}F, [f^\#]G\big)$, natural em F e G, é uma consequência direta do Exercício ac.1.10.10, pois $f^*F = \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}F$ ∎

4.21. Lema. *Seja $h : A \to C$ um homomorfismo de k-álgebras e seja $(f, f^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ o morfismo correspondente entre k-esquemas afins $X := \operatorname{Spec} A$ e $Y := \operatorname{Spec} C$. Então $f^*\widetilde{M} = \widetilde{C \otimes_A M}$ e $f_*\widetilde{N} = \widetilde{[h]N}$ para quaisquer $M \in \mathbf{Mod}_A$ e $N \in \mathbf{Mod}_C$.*

Demonstração. Observe que, para quaisquer C-módulo N', feixe F de $\mathcal{O}_Y$-módulos e homomorfismo de C-módulos $g : N' \to FY$, temos um morfismo induzido $\widetilde{g} : \widetilde{N'} \to F$ entre feixes de $\mathcal{O}_Y$-módulos. Realmente, os $C[c^{-1}]$-homomorfismos $g[c^{-1}] : N'[c^{-1}] \to F(\mathbf{D}\, c)$, $c \in C$, são compatíveis com localizações/restrições. Aplicando esta observação para $F := f^*\widetilde{M}$ e $N' := C \otimes_A M$, obtemos um morfismo natural $\widetilde{C \otimes_A M} \to f^*\widetilde{M}$ de feixes. Pela Observação 4.9, pelo Lema 4.4 e pelo Exercício ac.1.10.12, temos

$$(f^*\widetilde{M})_y = \mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{(f^{-1}\mathcal{O}_X)_y} (f^{-1}\widetilde{M})_y = \mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,fy}} \widetilde{M}_{fy} = C_y \otimes_{A_{h^{-1}y}} M_{h^{-1}y} = (C \otimes_A M)_y$$

para qualquer $y \in Y$, implicando $f^*\widetilde{M} = \widetilde{C \otimes_A M}$.

Seja $a \in A$. Então $f^{-1}(\mathbf{D}\, a) = \mathbf{D}(ha)$ e $(f_*\widetilde{N})(\mathbf{D}\, a) = \widetilde{N}\big(\mathbf{D}(ha)\big) = N\big[(ha)^{-1}\big] = \big([h]N\big)[a^{-1}] = \widetilde{[h]N}(\mathbf{D}\, a)$ ■

4.22. Corolário. *Qualquer morfismo $f : Y \to X$ entre k-esquemas providencia o funtor induzido $f^* : \mathbf{QCoh}_X \to \mathbf{QCoh}_Y$.*

Demonstração. O problema é local em X e em Y, logo, se reduz ao Lema 4.21 ■

4.23. Definição. Seja $i : Y \hookrightarrow X$ um conjunto fechado em um espaço topológico X e seja F um feixe de grupos abelianos sobre Y. É imediato que as fibras de i_*F em pontos de $X \setminus Y$ são nulas e que $(i_*F)_y = F_y$ para todo $y \in Y$. Chamamos o feixe i_*F sobre X de *extensão de F por zeros* e o denotamos frequentemente pelo mesmo símbolo F. (Note que $i^{-1}i_*F = F$.)

4.24. Definição. Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um k-esquema e seja $\mathcal{O}_X \triangleright I$ um subfeixe quase-coerente, ou seja, um feixe quase-coerente de ideais. O conjunto $\mathbf{V}\, I := \{x \in X \mid I_x \subset m_{X,x}\} = \big\{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x}/I_x \neq 0\big\}$, onde $\mathcal{O}_{X,x} \triangleright m_{X,x}$ denota o ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, é fechado, pois sua interseção com qualquer conjunto aberto afim U é fechada em U. Munindo $Y := \mathbf{V}\, I$ do feixe $\mathcal{O}_Y := i^{-1}(\mathcal{O}_X/I)$, onde $i : Y \hookrightarrow X$ é a inclusão, obtemos um *subesquema fechado* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ de $(X, \mathcal{O}_X)$. O fato que $(Y, \mathcal{O}_Y)$ é um esquema se verifica localmente: caso X seja afim, $X = \operatorname{Spec} C$, temos $I = \widetilde{J}$, onde $J \triangleleft C$, e $Y = \operatorname{Spec}(C/J)$. É fácil ver que $\mathcal{O}_X/I$ é a extensão de O_Y por zeros.

4.25. Definição. Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um k-esquema. Definimos o *nilradical* $\mathrm{N}\, \mathcal{O}_X$ de $\mathcal{O}_X$ pela regra $(\mathrm{N}\, \mathcal{O}_X)U := \{s \in \mathcal{O}_X U \mid s_x \text{ é nilpotente para todo } x \in U\}$ para qualquer conjunto aberto $U \subset X$. Para verificar que $\mathrm{N}\, \mathcal{O}_X$ é um feixe quase-coerente de ideais, basta observar que $\mathrm{N}\, \mathcal{O}_X = \widetilde{\mathrm{N}\, C}$ caso $X = \operatorname{Spec} C$. Se $\mathrm{N}\, \mathcal{O}_X = 0$, o esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ é dito *reduzido*. Note que X é reduzido se e só se qualquer subesquema aberto afim $U = \operatorname{Spec} A \subset X$ tem $\mathrm{N}\, A = 0$ ou, equivalentemente, se e só se X admite uma cobertura aberta afim por tais U's. Denotamos por $X_{\mathrm{red}} := \mathbf{V}(\mathrm{N}\, \mathcal{O}_X)$ o subesquema X (fechado) reduzido, $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}} = \mathcal{O}_X/\mathrm{N}\, \mathcal{O}_X$.

Seja $X \supset Y$ um conjunto fechado. Para qualquer conjunto aberto $U \subset X$, definimos $I_Y U := \{s \in \mathcal{O}_X U \mid s_y \in m_{X,y} \text{ para todo } y \in Y \cap U\}$. Considerando X afim, é fácil ver que I_Y é um feixe quase-coerente de ideais, $I_Y \triangleleft \mathcal{O}_X$, e que $\mathbf{V}\, I_Y = Y$. Deste modo, cada conjunto fechado $Y \subset X$ está naturalmente munido da estrutura de subesquema fechado reduzido.

É fácil ver que qualquer morfismo $f : Y \to X$ entre k-esquemas induz um morfismo $f_{\mathrm{red}} : Y_{\mathrm{red}} \to X_{\mathrm{red}}$. Deste modo, $_{\mathrm{red}}$ é um funtor.

4.26. Definição. Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um k-esquema. Um *subesquema localmente fechado* de X é um subesquema fechado de um subesquema aberto de X. É fácil ver que qualquer subesquema aberto de um subesquema fechado de X é um subesquema localmente fechado, mas a recíproca em geral não vale. Por outro lado, cada conjunto localmente fechado $Y \subset X$ pode ser naturalmente munido da estrutura de subesquema reduzido, como na Definição 4.25.

Um isomorfismo com um subesquema localmente fechado de X é um *mergulho localmente fechado* em X. A definição e a observação acima podem ser reformuladas: Um mergulho localmente fechado π é dado por $\pi = fa$, onde f é um mergulho fechado e a é um mergulho aberto. Para quaisquer componíveis mergulho aberto a' e mergulho fechado f, isto quer dizer que é definida a composição $a'f$, existem um mergulho fechado f'' e um mergulho aberto a'' tais que $a'f = f''a''$. Concluímos daqui que a composta de mergulhos localmente fechados π e π' é um mergulho localmente fechado, pois $\pi'\pi = (f'a')(fa) = (f'f'')(a''a)$ e a composta de mergulhos abertos/fechados é um mergulho aberto/fechado.

4.27. Esquemas projetivos. Seja V um espaço k-linear de dimensão finita sobre um corpo k. O *espaço projetivo* $\mathbb{P}_kV$ é o quociente de $V^\times := V \setminus 0$ pela ação do grupo multiplicativo $k^\times$ de k, $\mathbb{P}_kV := V^\times/k^\times$. Uma ação do grupo $k^\times$ sobre $\operatorname{Spec} A$, onde A é uma k-álgebra, é nada mais do que uma graduação em A. Deste modo, $\mathbb{P}_kV := (\operatorname{Spec} A \setminus \mathbf{V}\, A^{>0})/k^\times$, onde $A := k[x_0, x_1, \dots, x_n]$, $n + 1 := \dim_k V$ e $A^{>0}$ é o ideal de polinômios sem o termo constante.

4.27.1. Definição. Uma k-álgebra A é $\mathbb{Z}$-*graduada* se A é a soma direta $A = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} A^n$ de k-submódulos tais que $A^mA^n \subset A^{m+n}$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. Um A-módulo M é *graduado* se M é a soma direta $M = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} M^n$ de k-submódulos tais que $A^mM^n \subset M^{m+n}$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. Um homomorfismo $h : M_1 \to M_2$ entre A-módulos graduados M_1 e M_2 é *graduado* se preserva graduação, isto é, se $hM_1^n \subset M_2^n$ para todo n. Denotamos por $\mathbf{GMod}_A$ a categoria de todos os A-módulos graduados.

Se $A^n = 0$ para todo $n < 0$, dizemos que A é (simplesmente) *graduada.*

Seja $M \geqslant S$ um k-submódulo de um A-módulo graduado M. Definimos $S^h := \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} (M^n \cap S)$. Caso $S = S^h$, dizemos que S é *homogêneo.* Obviamente, $S \geqslant S^h$ é o maior k-submódulo homogêneo contido em S. Em seguida, usaremos símbolos $\leqslant^h$, $\subset^h$, $\lhd^h$, $\in^h$, … para indicar que um k-submódulo, subconjunto, ideal, elemento, … são *homogêneos,* isto é, fechados relativamente a "tomar componentes homogêneas".

4.27.2. Definição. Seja A uma k-álgebra graduada. Denotamos $\operatorname{Proj} A := \{p \mid A^{>0} \not\subset p \lhd^h_p A\} \subset \operatorname{Spec} A$, onde $A^{>0} := \bigoplus\limits_{n>0} A^n$, e munimos $\operatorname{Proj} A$ da topologia induzida de $\operatorname{Spec} A$. Para $E \subset^h A$ e $a \in^h A$, denotamos $\mathbf{V}_+\, E := \{p \in \operatorname{Proj} A \mid E \subset p\}$ e $\mathbf{D}_+\, a := \{p \in \operatorname{Proj} A \mid a \notin p\} = \operatorname{Proj} A \setminus \mathbf{V}\, a = \operatorname{Proj} A \setminus \mathbf{V}_+\, a$.

Se $S \subset^h A$ é um conjunto de elementos homogêneos, então $A[S^{-1}]$ é uma k-álgebra $\mathbb{Z}$-graduada, pois para $a \in^h A$ e $s \in S$ podemos definir $\deg(s^{-1}a) := \deg a - \deg s$. Desta forma, obtemos a k-subálgebra $A[S^{-1}]^0$ de $A[S^{-1}]$ formada por todas as frações de grau 0.

4.27.3. Observação. *Seja $A \,{}^h\!\!\supset E$ um conjunto de elementos homogêneos, sejam $I, J, I_\beta \lhd^h A$, $\beta \in B$, ideais homogêneos em A, sejam $a', a'' \in^h A$ elementos homogêneos e seja $b = a_0 + \dots + a_d \in A$, onde $A^i \ni a_i$ são componentes homogêneas de b. Então*

a. $\mathbf{V}_+\, 0 = \operatorname{Proj} A$, $\mathbf{V}_+\, A^{>0} = \varnothing$, $\mathbf{V}_+\, I \cup \mathbf{V}_+\, J = \mathbf{V}_+(I \cap J) = \mathbf{V}_+(IJ)$ *e* $\bigcap\limits_{\beta\in B} \mathbf{V}_+\, I_\beta = \mathbf{V}_+ \Big(\sum\limits_{\beta\in B} I_\beta\Big)$;

b. $\mathbf{V}_+(E \cap A^{>0}) = \mathbf{V}_+\, E = \mathbf{V}_+ \sqrt{\operatorname{ideal} E}$;

c. $\mathbf{D}_+\, a' \cap \mathbf{D}_+\, a'' = \mathbf{D}_+(a'a'')$, $\operatorname{Proj} A \setminus \mathbf{V}_+\, I = \bigcup\limits_{a\in^h I} \mathbf{D}_+\, a$ *e* $\mathbf{D}\, a \cap \operatorname{Proj} A = \bigcup\limits_{i=0}^{d} \mathbf{D}_+\, a_i$.

Demonstração. Para que a expressão $\mathbf{V}_+ \sqrt{\operatorname{ideal} E}$ tenha sentido, observe que o radical de um ideal homogêneo é um ideal homogêneo.

Note que $\mathbf{V}\, b \cap \operatorname{Proj} A = \bigcap\limits_{i=0}^{d} \mathbf{V}_+\, a_i$, implicando $\mathbf{D}\, b \cap \operatorname{Proj} A = \bigcup\limits_{i=0}^{d} \mathbf{D}_+\, a_i$.

As afirmações restantes são triviais ∎

4.27.4. Lema. *Os conjuntos da forma* $\mathbf{V}_+\,E$*, onde* $E \subset^h A$*, constituem todos*[8] *os conjuntos fechados em* $\operatorname{Proj} A$*. Os conjuntos* $\mathbf{D}_+\,a$*,* $a \in^h A^{>0}$*, chamados* abertos principais*, formam uma base da topologia em* $\operatorname{Proj} A$*.*

Se $A^{>0} \not\subset p \in \operatorname{Spec} A$*, então* $p^h \in \operatorname{Proj} A$*.*

Se $A^{>0} \supset I, J \lhd^h A$*, então* $(\cap \mathbf{V}_+\,I) \cap A^{>0} = \sqrt{I} \cap A^{>0}$ *e* $\mathbf{V}_+\,I \subset \mathbf{V}_+\,J$ *é equivalente a* $J \subset \sqrt{I}$*. Em particular,* $\operatorname{Proj} A = \varnothing$ *se e só se* $A^{>0} \subset \mathrm{N}\,A$*.*

Sejam $a, b \in^h A^{>0}$*. Então* $\mathbf{D}_+\,a \supset \mathbf{D}_+\,b$ *se e só se existem* $n > 0$ *e* $a' \in^h A^{>0}$ *tais que* $b^n = a'a$*.*

Demonstração. Pela Observação 4.27.3.a, os conjuntos da forma $\mathbf{V}_+\,E$, $E \subset^h A$, constituem conjuntos fechados de uma topologia em $\operatorname{Proj} A$. Pela Observação 4.27.3.c, os conjuntos da forma $\mathbf{D}_+\,a$, $a \in^h A$, formam uma base desta topologia. As igualdades da forma $\mathbf{D}\,b \cap \operatorname{Proj} A = \bigcup\limits_{i=0}^{d} \mathbf{D}_+\,a_i$ implicam que a topologia em questão é induzida pela topologia de $\operatorname{Spec} A$. Já que todo conjunto fechado em $\operatorname{Proj} A$ tem a forma $\mathbf{V}_+\,I$ com $A^{>0} \supset I \lhd^h A$ pela Observação 4.27.3.b, a igualdade $\operatorname{Proj} A \setminus \mathbf{V}_+\,I = \bigcup\limits_{a \in^h I} \mathbf{D}_+\,a$ implica que os conjuntos abertos principais formam uma base de topologia em $\operatorname{Proj} A$.

Se $p \in \operatorname{Spec} A$, então $p^h \in \operatorname{Spec} A$. Realmente, se $a_1, a_2 \in^h A$ e $a_1a_2 \in p^h$, então $p^h \subset p \lhd_p A$ implica $a_i \in p$ e, portanto, $a_i \in p^h$. Sendo p^h um ideal homogêneo, isto é suficiente para verificar que p^h é primo.

Seja $A^{>0} \supset I \lhd^h A$. Pela afirmação que acabamos de mostrar, $p \in \mathbf{V}\,I$ implica que $p \supset p^h \in \mathbf{V}_+\,I$ ou que $p \supset p^h \supset A^{>0}$. Portanto, $\sqrt{I} \cap A^{>0} = (\cap \mathbf{V}\,I) \cap A^{>0} = (\cap \mathbf{V}_+\,I) \cap A^{>0}$.

É claro que $J \subset \sqrt{I}$ implica $\mathbf{V}_+\,I \subset \mathbf{V}_+\,J$. Reciprocamente, $\mathbf{V}_+\,I \subset \mathbf{V}_+\,J$ implica $\cap \mathbf{V}_+\,J \subset \cap \mathbf{V}_+\,I$. Daí, $J \subset (\cap \mathbf{V}_+\,J) \cap A^{>0} \subset (\cap \mathbf{V}_+\,I) \cap A^{>0} \subset \sqrt{I}$.

Note que $\operatorname{Proj} A = \varnothing$ equivale a $\mathbf{V}_+\,0 \subset \mathbf{V}_+\,A^{>0}$, isto é, a $A^{>0} \subset \sqrt{0} = \mathrm{N}\,A$.

A inclusão $\mathbf{D}_+\,a \supset \mathbf{D}_+\,b$ equivale a inclusão $\mathbf{V}_+(Aa) \subset \mathbf{V}_+(Ab)$, isto é, a $Ab \subset \sqrt{Aa}$ ∎

4.27.5. Lema. *Sejam* $I \lhd^h A$ *e* $a, b \in^h A^{>0}$*. Então a composta*

$$\mathbf{D}_+ a \hookrightarrow \mathbf{D}\,a = \operatorname{Spec} A[a^{-1}] \to \operatorname{Spec} A[a^{-1}]^0$$

é um homeomorfismo que leva $\mathbf{D}_+\,a \cap \mathbf{V}_+\,I$ *para* $\mathbf{V}\,I[a^{-1}]^0$ *e* $\mathbf{D}_+(ab) = \mathbf{D}_+\,a \cap \mathbf{D}_+\,b$ *para* $\mathbf{D}\,c$*, onde* $c := \frac{b^{\deg a}}{a^{\deg b}}$*. Além disto,* $A[a^{-1}]^0[c^{-1}] = A\big[(ab)^{-1}\big]^0$*.*

Demonstração. Denotamos a composta por f. Temos $fp = p[a^{-1}]^0$.

Verificaremos que f é sobrejetora. Seja $q \lhd_p A[a^{-1}]^0$. Então $\overline{q} := \sqrt{A[a^{-1}]q} \lhd_p^h A[a^{-1}]$. Com efeito, sejam $x, y \in^h A[a^{-1}]$ tais que $xy \in \overline{q}$, isto é, $(xy)^n \in A[a^{-1}]q$ para algum $n > 0$. Então $\frac{(xy)^{n \deg a}}{a^{n(\deg x + \deg y)}} = \frac{x^{n \deg a}}{a^{n \deg x}} \cdot \frac{y^{n \deg a}}{a^{n \deg y}} \in \big(A[a^{-1}]q\big)^0 = q$ implica que, digamos, $\frac{x^{n \deg a}}{a^{n \deg x}} \in q$. Daí, $x \in \overline{q}$. Note que $\overline{q}^0 = q$ pois q é radical. Portanto, as imagens de $\overline{q}$ por $\operatorname{Spec} A[a^{-1}] \to \operatorname{Spec} A[a^{-1}]^0$ e por $\operatorname{Spec} A[a^{-1}] \to \operatorname{Spec} A$ são q e $p \in \mathbf{D}_+\,a$, respectivamente, onde $fp = q$.

Observamos que $q \in \mathbf{V}\,I[a^{-1}]^0$ equivale a $I[a^{-1}] \subset \overline{q}$. Realmente, $I[a^{-1}] \subset \overline{q}$ obviamente implica $I[a^{-1}]^0 \subset \overline{q}^0 = q$. Suponha que $I[a^{-1}]^0 \subset q$ e seja $i \in^h I$. Então $\frac{i^{\deg a}}{a^{\deg i}} \in I[a^{-1}]^0$. Logo, $\frac{i^{\deg a}}{a^{\deg i}} \in q$, implicando $i^{\deg a} \in A[a^{-1}]q$ e $i \in \overline{q}$.

Consequentemente, para $p \in \mathbf{D}_+\,a$, a inclusão $I[a^{-1}]^0 \subset fp$ equivale a $I[a^{-1}] \subset p[a^{-1}]$, ou seja, a $I \subset p$, pois $a \notin p \lhd_p A$. Em outras palavras, $f^{-1}\big(\mathbf{V}\,I[a^{-1}]^0\big) = \mathbf{D}_+\,a \cap \mathbf{V}_+\,I$.

Em particular, f é injetora, pois $fp' = p'[a^{-1}]^0 \subset fp$ equivale a $p' \subset p$ para quaisquer $p', p \in \mathbf{D}_+\,a$ e, portanto, $fp' = fp$ implica $p' = p$.

---

[8] Pela Observação 4.27.2.b, podemos listá-los por $\mathbf{V}_+\,E$ com $E \subset^h A^{>0}$.

Sendo f contínua pelo Exercício 2.3 e fechada pelas igualdades $f(\mathbf{D}_+ a \cap \mathbf{V}_+ I) = \mathbf{V}\, I[a^{-1}]^0$ que acabamos de mostrar, f é um homeomorfismo.

O isomorfismo $A[a^{-1}][c^{-1}] \to A\big[(ab)^{-1}\big]$ preserva $\mathbb{Z}$-graduação, logo, induz o isomorfismo $A[a^{-1}]^0[c^{-1}] \to A\big[(ab)^{-1}\big]^0$.

Para mostrar que $f(\mathbf{D}_+ a \cap \mathbf{D}_+ b) = \mathbf{D}\, c$, sabendo que $f(\mathbf{D}_+ a \cap \mathbf{V}_+ b) = \mathbf{V}\,\big(Ab[a^{-1}]^0\big)$, basta observar que $\mathbf{V}\,\big(Ab[a^{-1}]^0\big) = \mathbf{V}\, c$. Obviamente, $c \in Ab[a^{-1}]^0$. Seja $u := \frac{db}{a^i} \in Ab[a^{-1}]^0$, isto é, $d \in^h A$ com $\deg d + \deg b = i \deg a$. Então $\deg a \deg d = \deg a\,(i \deg a - \deg b)$ e $u^{\deg a} = \frac{d^{\deg a}}{a^{i \deg a - \deg b}}\, c$, ou seja, $u^{\deg a} \in A[a^{-1}]^0 c$ ■

4.27.6. Definição. Sejam A e B k-álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas. Um homomorfismo $h : A \to B$ de k-álgebras é *graduado* se existe $d > 0$ tal que $hA^i \subset B^{di}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

4.27.7. Corolário. *Seja A uma k-álgebra graduada. Então* $\operatorname{Proj} A$ *é um k-esquema cujos abertos principais* $\mathbf{D}_+ a = \operatorname{Spec} A[a^{-1}]^0$, $a \in^h A^{>0}$, *formam uma base afim de topologia.*

Cada homomorfismo graduado $h : A \to B$ entre k-álgebras graduadas A e B induz um morfismo $\operatorname{Proj} h : \operatorname{Proj} B \setminus \mathbf{V}(hA^{>0}) \to \operatorname{Proj} A$ *do subesquema aberto* $\operatorname{Proj} B \setminus \mathbf{V}(hA^{>0})$ *do k-esquema* $\operatorname{Proj} B$ *para o k-esquema* $\operatorname{Proj} B$.

Demonstração. Munindo cada aberto principal da estrutura indicada de um k-esquema afim, podemos colar os feixes pelo Exercício 3.16.7 observando que tais feixes são compatíveis. Com efeito, pelo Lema 4.27.5, $A[a^{-1}]^0[c^{-1}] = A\big[(ab)^{-1}\big]^0 = A[b^{-1}]^0[c'^{-1}]$ para quaisquer $a, b \in^h A^{>0}$, onde $c := \frac{b^{\deg a}}{a^{\deg b}}$ e $c' := \frac{a^{\deg b}}{b^{\deg a}}$.

Se $q \in \operatorname{Proj} B \setminus \mathbf{V}(hA^{>0})$, então $hA^{>0} \not\subset q \triangleleft_p^h B$ e $A^{>0} \not\subset h^{-1} q \triangleleft_p^h A$, ou seja, $h^{-1} q \in \operatorname{Proj} A$. Isto define uma função $f := \operatorname{Proj} h$ tal que $f^{-1}(\mathbf{D}_+ a) = \mathbf{D}_+(ha)$ para qualquer $a \in^h A^{>0}$. O k-homomorfismo graduado h induz um k-homomorfismo graduado $h[a^{-1}] : A[a^{-1}] \to B\big[(ha)^{-1}\big]$ e, portanto, um k-homomorfismo $h[a^{-1}]^0 : A[a^{-1}]^0 \to B\big[(ha)^{-1}\big]^0$ que, por sua vez, induz o morfismo $f^{-1}(\mathbf{D}_+ a) \to \mathbf{D}_+ a$ entre k-esquemas afins. Resta aplicar o Exercício 4.15, observando que tais morfismos são compatíveis pelo Lema 4.27.5 ■

4.27.8. Definição. Seja A uma k-álgebra graduada e seja M um A-módulo graduado. Para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, definimos um A-módulo graduado $M[n]$ pela regra $M[n]^i := M^{i+n}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Para qualquer $a \in^h A^{>0}$, a localização $M[a^{-1}]$ é um $A[a^{-1}]$-módulo graduado. Em particular, $M[a^{-1}]^0$ é um $A[a^{-1}]^0$-módulo e $\widetilde{M[a^{-1}]^0}$ é um feixe quase-coerente sobre $\mathbf{D}_+ a$. Observando, como na demonstração do Lema 4.27.5, que $M[a^{-1}]^0[c^{-1}] = M\big[(ab)^{-1}\big]^0 = M[b^{-1}]^0[c'^{-1}]$ para quaisquer $a, b \in^h A^{>0}$, onde $c := \frac{b^{\deg a}}{a^{\deg b}}$ e $c' := \frac{a^{\deg b}}{b^{\deg a}}$, obtemos um feixe quase-coerente $\widetilde{M}$ sobre $X := \operatorname{Proj} A$.

Note que os A^0-homomorfismos $M^0 \to M[a^{-1}]^0$, $a \in^h A^{>0}$, compatíveis com localizações indicados acima, providenciam um A^0-homomorfismo $M^0 \to \Gamma(X, \widetilde{M})$.

Seja $X \ni x$ um ponto. Então a fibra $\widetilde{M}_x$ pode ser descrita como $\widetilde{M}_x = M_{(x)} := M[S^{-1}]^0$, onde $S := \{s \in^h A \mid s \notin x\}$.

4.27.9. Definição. Seja $X := \operatorname{Proj} A$, onde A é uma k-álgebra graduada gerada por A^1 sobre A^0. Fazendo $\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{A[n]}$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, chamamos $\mathcal{O}_X(1)$ de *feixe de Serre*. Para um feixe quase-coerente F sobre X denotamos $F(n) := \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} F$. Considerando conjuntos abertos principais $D_+ a$, $a \in A^1$, é fácil verificar que $\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} F(n) = F(m+n)$, $\widetilde{M[n]} = \widetilde{M}(n)$ para qualquer A-módulo graduado M e, em particular, $\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(m+n)$.

4.27.10. Definição. Seja F um feixe quase-coerente sobre $X := \operatorname{Proj} A$, onde A é uma k-álgebra graduada gerada por A^1 sobre A^0. Então $\Gamma F := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma^n F$ é um A-módulo graduado, onde $\Gamma^n F :=$

$\Gamma\big(X, F(n)\big)$. Realmente, para qualquer $m \geqslant 0$, compondo os A^0-homomorfismos $A^m \to \Gamma\big(X, \widetilde{A[m]}\big) = \Gamma\big(X, \mathcal{O}_X(m)\big)$ e $\Gamma\big(X, \mathcal{O}_X(m)\big) \otimes_{A^0} \Gamma\big(X, F(n)\big) \to \Gamma\big(X, \mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} F(n)\big) = \Gamma\big(X, F(m+n)\big)$, obtemos uma função A^0-bilinear $A^m \times \Gamma^n F \to \Gamma^{m+n} F$. É fácil verificar os axiomas de A-módulo para ΓF.

Note que, de acordo com esta definição, para quaisquer $m \geqslant 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in A^m$, $f \in \Gamma\big(X, F(n)\big)$ e $g \in \Gamma\big(\mathbf{D}_+\, a, F(n)\big)$, temos $a \cdot f = a \otimes f \in \Gamma\big(X, \mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} F(n)\big) = \Gamma\big(X, F(m+n)\big)$ e $a^{-1} \cdot g = a^{-1} \otimes g \in \Gamma\big(\mathbf{D}_+\, a, \mathcal{O}_X(-m) \otimes_{\mathcal{O}_X} F(n)\big) = \Gamma\big(\mathbf{D}_+\, a, F(n-m)\big)$.

4.27.11. Observação. *Seja A uma k-álgebra graduada gerada por A^1 sobre A^0 e seja $X := \operatorname{Proj} A$. Então temos funtores adjuntos $\widetilde{\ } : \mathbf{GMod}_A \to \mathbf{QCoh}_X$ e $\Gamma : \mathbf{QCoh}_X \to \mathbf{GMod}_A$, isto é, existe uma bijeção $b : \mathbf{QCoh}_X(\widetilde{M}, F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{GMod}_A(M, \Gamma F)$ natural em $F \in \mathbf{QCoh}_X$ e $M \in \mathbf{GMod}_A$.*

Demonstração. A verificação que $\widetilde{\ }$ e Γ são funtores é imediata e fica ao cargo do leitor.

Dado um morfismo $\varphi : \widetilde{M} \to F$ entre feixes quase-coerentes, o morfismo $\widetilde{M[n]} = \widetilde{M}(n) = \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{M} \xrightarrow{1 \otimes \varphi} \mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} F = F(n)$ induz a composta $M^n \to \Gamma\big(X, \widetilde{M[n]}\big) \to \Gamma\big(X, F(n)\big) = \Gamma^n F$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Assim obtemos um homomorfismo graduado $b\varphi : M \to \Gamma F$.

Seja $h : M \to \Gamma F$ um homomorfismo graduado, seja $a \in^h A^{>0}$ e seja $a^{-i} m \in M[a^{-1}]^0$, onde $i > 0$ e $m \in M^{i \deg a}$. Então $hm \in \Gamma^{i \deg a} F = \Gamma\big(X, F(i \deg a)\big)$ e $a^{-i} \cdot hm|_{\mathbf{D}_+\, a} \in \Gamma(\mathbf{D}_+\, a, F)$ pela Definição 4.27.10. Deste modo, obtemos um homomorfismo $\varphi_a : M[a^{-1}]^0 \to \Gamma(\mathbf{D}_+\, a, F)$ de $A[a^{-1}]^0$-módulos. Por uma verificação direta, tais homomorfismos são compatíveis sobre a interseção de dois abertos principais ■

4.27.12. Lema. *Seja A uma k-álgebra graduada gerada sobre A^0 por $g_0, g_1, \dots, g_n \in A^1$, seja F um feixe quase-coerente sobre $X := \operatorname{Proj} A$, seja $f \in \Gamma(X, F)$ tal que $f|_{\mathbf{D}_+\, g_i} = 0$ e seja $f_i \in \Gamma(\mathbf{D}_+\, g_i, F)$. Então existem $m > 0$ e $s \in \Gamma\big(X, F(m)\big)$ tais que $g_i^m \otimes f = 0$ e $s|_{D_+ g_i} = g_i^m \otimes f_i$.*

Demonstração. Para cada $0 \leqslant j \leqslant n$, denotamos por $F_j := \Gamma(U_j, F)$ o correspondente $B[g_j^{-1}]^0$-módulo, onde $U_j := \mathbf{D}_+\, g_j$. Fazemos também $U_{jk} := U_j \cap U_k$ e $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k$.

Seja $f \in \Gamma(X, F)$ tal que $f|_{U_i} = 0$. Então $f_j := f|_{U_j} \in F_j$ é nulo em $F_j\big[(\frac{g_i}{g_j})^{-1}\big]$, pois $f|_{U_{ij}} = 0$. Portanto, $(\frac{g_i}{g_j})^m f_j = 0$ para todo j e para algum $m > 0$ o qual podemos escolher o mesmo para todos j. Isto significa que $g_i^m \otimes f|_{U_j} = g_i^m \otimes f_j = g_j^m \otimes (\frac{g_i}{g_j})^m f_j = 0$ para todo j. Em outras palavras, $g_i^m \otimes f = 0$.

Agora seja $f_i \in \Gamma(U_i, F)$. Para todo j, existe $f_j \in F_j$ tal que $f_i = (\frac{g_i}{g_j})^{-l} f_j$ sobre U_{ij}, pois podemos escolher o mesmo $l > 0$ para todos j (corrigindo os f_j's). Logo, $(\frac{g_i}{g_j})^{-l} f_j = (\frac{g_i}{g_k})^{-l} f_k$ sobre U_{ijk}, ou seja, $f_j = (\frac{g_k}{g_j})^l f_k$ sobre U_{ijk}, implicando que $(\frac{g_i}{g_j})^e f_j = (\frac{g_i}{g_j})^e (\frac{g_k}{g_j})^l f_k$ sobre U_{jk} para algum $e > 0$ que podemos escolher o mesmo para todos j e k. Isto significa que $g_i^e g_j^l \otimes f_j = g_j^{e+l} \otimes (\frac{g_i}{g_j})^e f_j = g_j^{e+l} \otimes \frac{g_i^e g_k^l}{g_j^{e+l}} f_k = g_i^e g_k^l \otimes f_k$ sobre U_{jk} para todos j e k. Logo, obtemos uma seção $s \in \Gamma\big(X, F(m)\big)$ tal que $s|_{U_j} = g_i^e g_j^l \otimes f_j$ para todo j, onde $m := e + l$. Em particular, $s|_{U_i} = g_i^m \otimes f_i$ ■

4.27.13. Definição. Um feixe F sobre um k-esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ é *inversível* ou é um *fibrado de linha* se $F|_U \simeq \mathcal{O}_X|_U$, onde U percorre uma cobertura aberta de X.

4.27.14. Proposição. *Seja A uma k-álgebra graduada gerada sobre A^0 por $g_0, g_1, \dots, g_n \in A^1$ e seja F um feixe quase-coerente sobre $X := \operatorname{Proj} A$. Então $\widetilde{\Gamma F} = F$. Além disto, cada $\mathcal{O}_X(m)$ é um feixe inversível sobre X com a base $b_{i,m} := g_i^m$ sobre $\mathbf{D}_+\, g_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, sujeita às relações $b_{j,m} = \frac{g_j^m}{g_i^m} b_{i,m}$ sobre $\mathbf{D}_+\, g_i \cap \mathbf{D}_+\, g_j$.*

Demonstração. O fato que $\mathcal{O}_X(m)$ é inversível com a base indicada segue imediatamente de $\big(A[m][g_i^{-1}]\big)^0 = A[g_i^{-1}]^m = A[g_i^{-1}]^0 g_i^m$.

O morfismo $\varepsilon : \widetilde{\Gamma F} \to F$ natural em F é dado por $b\varepsilon = 1_{\Gamma F}$, onde b é a bijeção da Observação 4.27.11. Isto significa que, para todo $0 \leqslant i \leqslant n$, temos $\Gamma(\mathbf{D}_+ g_i, \widetilde{\Gamma F}) \ni g_i^{-n} f \overset{\varepsilon_i}{\longmapsto} g_i^{-n} \otimes f|_{\mathbf{D}_+ g_i} \in \Gamma(\mathbf{D}_+ g_i, F)$, onde $n > 0$ e $f \in \Gamma\big(X, F(n)\big)$ (vide a Definição 4.27.10).

Se $\varepsilon_i(g_i^{-n} f) = 0$, então $f|_{\mathbf{D}_+ g_i} = 0$ e $g_i^m \otimes f = 0$ para algum $m > 0$ pelo Lema 4.27.12, ou seja, $f = 0$ em $\widetilde{\Gamma F}[g_i^{-1}]$. Logo, $g_i^{-n} f = 0$ e ε_i é mono.

Seja $f_i \in \Gamma(\mathbf{D}_+ g_i, F)$. Pelo Lema 4.27.12, existem $m > 0$ e $s \in \Gamma^m F$ tais que $s|_{\mathbf{D}_+ g_i} = g_i^m \otimes f_i$. Resta observar que $\varepsilon_i(g_i^{-m} s) = g_i^{-m} \otimes s|_{\mathbf{D}_+ g_i} = g_i^{-m} \otimes g_i^m \otimes f_i = f_i$ ■

4.27.15. Observação. *Seja B uma k-álgebra graduada, seja M um B-módulo graduado, sejam $d > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$ e sejam $M^{\geqslant n} := \bigoplus\limits_{i \geqslant n} M^i$ e $A := \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} B^{di}$. Então $\widetilde{M} = \widetilde{M^{\geqslant n}}$ e $\operatorname{Proj} A = \operatorname{Proj} B$.*

Demonstração. Para mostrar que $\widetilde{M} = \widetilde{M^{\geqslant n}}$, basta observar que $\Gamma(\mathbf{D}_+ b, \widetilde{M}) = \Gamma(\mathbf{D}_+ b, \widetilde{M^{\geqslant n}})$ para qualquer $b \in^h B^{>0}$. Com efeito, se $m \in M^{i \deg b}$ com $i \geqslant 0$, então $b^{-i} m = b^{-i-n}(b^n m)$, onde $\deg(b^n m) = (i+n) \deg b \geqslant n$.

Consideremos o homomorfismo graduado $h : A \hookrightarrow B$. Para todo $i > 0$, temos $(B^i)^d \subset hA^{>0}$. Portanto, $\mathbf{V}(hA^{>0}) = \mathbf{V} B^{>0} = \varnothing$. Pelo Corolário 4.27.7, obtemos $f := \operatorname{Proj} h : \operatorname{Proj} B \to \operatorname{Proj} A$. Basta verificar que $h[a^{-1}]^0 : A[a^{-1}]^0 \to B[a^{-1}]^0$ é um isomorfismo para qualquer $a \in^h A^{>0}$, pois $f^{-1}(\mathbf{D}_+ a) = \mathbf{D}_+(ha)$. Levando em conta que $h[a^{-1}] : A[a^{-1}] \to B[a^{-1}]$ é injetor pela exatidão da localização, resta notar que $a \in A^i = B^{di}$ com $i > 0$ e, consequentemente, cada $a^{-n} b \in B[a^{-1}]^0$ tem $\deg b = ndi$, ou seja, $b \in A^{ni}$ ■

4.27.16. Observação. *Seja A uma k-álgebra graduada tal que o ideal $A^{>0}$ é finitamente gerado. Então A é uma A^0-álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. Podemos escolher geradores homogêneos $g_1, \dots, g_n \in^h A^{>0}$ do ideal $A^{>0}$. Então $A = A^0[g_1, \dots, g_n]$. Realmente, para $m > 0$, temos $A^m = \sum\limits_{i=1}^{n} A^{m - \deg g_i} g_i$ e, por indução sobre m, $A^{m - \deg g_i} \subset A^0[g_1, \dots, g_n]$ ■

4.27.17. Exercício. Sejam A e B k-álgebras graduadas tais que as k-álgebras graduadas $A^0 \oplus \bigoplus\limits_{i \geqslant n} A^i$ e $B^0 \oplus \bigoplus\limits_{i \geqslant n} B^i$ são isomorfas para algum $n > 0$. Mostre que $\operatorname{Proj} A = \operatorname{Proj} B$.

4.27.18. Observação. *Seja B uma k-álgebra graduada finitamente gerada sobre B^0. Então, para algum $d > 0$, a k-álgebra $A := \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} B^{di}$ é finitamente gerada por elementos homogêneos de grau* 1.

Demonstração. Sejam $g_1, \dots, g_n \in^h B^{>0}$ geradores de B sobre B^0 de graus $d_1, \dots, d_n > 0$. Denotamos $d_0 := d_1 \dots d_n$ e $d := nd_0$. Se $g_1^{i_1} \dots g_n^{i_n}$ é um monômio de grau $\geqslant d$, então $i_k \geqslant \frac{d_0}{d_k}$ para algum $1 \leqslant k \leqslant n$.

Resta mostrar que a k-álgebra A é gerada pelos monômios $g_1^{i_1} \dots g_n^{i_n}$ com $i_1 + \dots + i_n = d$. Se $m := g_1^{j_1} \dots g_n^{j_n}$ um monômio de grau di com $i > 0$, então, pela afirmação acima, $m = g_{i_1}^{l_1} m_1$, onde $\deg g_{i_1}^{l_1} = d_0$ e, portanto, $\deg m_1 = di - d_0 \geqslant d$. Logo, $m_1 = g_{i_2}^{l_2} m_2$, onde $\deg g_{i_2}^{l_2} = d_0$, e assim por diante. Finalmente, obtemos $m = g_{i_1}^{l_1} \dots g_{i_n}^{l_n} m_n$ com $\deg g_{i_1}^{l_1} \dots g_{i_n}^{l_n} = d$ e $\deg m_n = d(i-1)$ e procedemos por indução sobre i ■

As Observações 4.27.15 e 4.27.18 mostram que não é essencial a condição da Proposição 4.27.14 que uma k-álgebra graduada A finitamente gerada sobre A^0 é gerada por elementos de grau 1.

4.28. Propriedades locais de feixes, esquemas e morfismos. Nesta subseção estudaremos propriedades importantes de feixes, esquemas e morfismos cuja natureza é local. Tais propriedades se verificam normalmente sobre uma dada cobertura aberta afim e permanecem válidas para qualquer subesquema aberto afim. Já conhecemos alguns exemplos destas: k-esquemas em geral, k-esquemas reduzidos, feixes quase-coerentes, mergulhos abertos, mergulhos fechados e mergulhos localmente fechados.

4.28.1. Definição. Seja A uma k-álgebra. Um A-módulo finitamente gerado M é *coerente* se, para qualquer A-homomorfismo $h : L \to M$ de um A-módulo livre L finitamente gerado, o núcleo $\operatorname{Ker} h$ é um A-módulo finitamente gerado.

4.28.2. Observação. *Seja M um A-módulo, onde A é uma k-álgebra. Então o feixe $\widetilde{M}$ sobre $X := \operatorname{Spec} A$ é localmente finitamente gerado se e só se M é finitamente gerado.*

Demonstração. Suponha que $\widetilde{M}$ é localmente finitamente gerado. Sendo X quase-compacto, encontramos uma cobertura finita de X por abertos principais $\mathbf{D}\, a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, tal que $M[a_i^{-1}]$ é um $A[a_i^{-1}]$-módulo finitamente gerado para cada i. Os numeradores de todos estes geradores geram em M um A-submódulo M' tal que $M'[a_i^{-1}] = M[a_i^{-1}]$ para todo i. Logo, $\widetilde{M'} = \widetilde{M}$, implicando $M' = M$. Concluímos que M é finitamente gerado. A recíproca é óbvia ■

4.28.3. Proposição. *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um k-esquema e seja F um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- *F é coerente;*
- *para qualquer subesquema aberto afim $U \subset X$, o $\mathcal{O}_X U$-módulo FU é coerente e $F|_U = \widetilde{FU}$;*
- *F é quase-coerente e FU é um $\mathcal{O}_X U$-módulo coerente, onde U percorre uma cobertura aberta afim de X.*

Demonstração. Suponha que F é coerente. Seja $x \in X$. Então existem uma vizinhança aberta $x \in U \subset X$ e $m, n \in \mathbb{N}$ tais que a sequência $\mathcal{O}_X^m|_U \to \mathcal{O}_X^n|_U \to F|_U \to 0$ de feixes sobre U é exata. Os feixes $\mathcal{O}_X^m|_U$ e $\mathcal{O}_X^n|_U$ são quase-coerentes. Portanto, F é quase-coerente.

Para mostrar que a primeira afirmação implica a segunda, podemos supor que $X = \operatorname{Spec} A$ é afim e e que $F = \widetilde{M}$, onde M é um A-módulo, finitamente gerado pela Observação 4.28.2. Seja $h : L \to M$ um A-homomorfismo, onde L é um A-módulo livre finitamente gerado. Em outras palavras, temos um morfismo $\mathcal{O}_X^n \to F$ de feixes quase-coerentes. Seu núcleo $\widetilde{\operatorname{Ker} h}$ é localmente finitamente gerado, pois F é coerente. Pela Observação 4.28.2, $\operatorname{Ker} h$ é um A-módulo finitamente gerado.

A segunda afirmação obviamente implica a terceira.

Para mostrar que a terceira afirmação implica a primeira, é suficiente entender que o feixe $\widetilde{M}$ é coerente sobre $X := \operatorname{Spec} A$ para qualquer A-módulo coerente M. Pela Observação 4.28.2, o feixe $\widetilde{M}$ é (localmente) finitamente gerado. Seja $\varphi : \mathcal{O}_X^n|_U \to \widetilde{M}|_U$ um morfismo de feixes sobre um conjunto aberto $U \subset X$. Precisamos mostrar que $\operatorname{Ker} \varphi$ é um feixe localmente finitamente gerado. Podemos supor que $U = \mathbf{D}\, a$, um aberto principal. Neste caso, o morfismo φ é induzido por um $A[a^{-1}]$-homomorfismo $h_0 : \big(A[a^{-1}]\big)^n \to M[a^{-1}]$. É fácil ver que, para algum $m > 0$, o homomorfismo $a^m h_0$ é induzido por um A-homomorfismo $h : A^n \to M$. Resta lembrar que M é um A-módulo coerente, observar que os núcleos de $a^m h_0$ e de h_0 coincidem e usar a Observação 4.28.2 ■

De acordo com a filosofia de A. Grothendieck, é mais adequado formular propriedades de esquemas no nível relativo, ou seja, no lugar de um k-esquema Y, considerar um morfismo $\pi : Y \to X$ interpretando π como um “fibrado” ou como uma “família” $\pi^{-1}x$, $x \in X$, das “fibras” de π parametrizada por X. Nesta visão, em vez de uma propriedade de Y, consideramos a propriedade correspondente para as fibras. Tal ideologia combina bem com o moto que, para estudar um objeto, é bem útil deformá-lo.

Cabe ressaltar aqui que uma propriedade de morfismos é normalmente mais forte do que esta mesma propriedade exigida para todas as “fibras”, pois inclui também uma exigência para a maneira como as fibras $\pi^{-1}x$ se comportam quando $X \ni x$ está variando.

4.28.4. Definição. Seja $f : Y \to X$ um morfismo entre k-esquemas.

Dizemos que o morfismo f é *afim* se $f^{-1}U$ é um subesquema aberto afim em Y para qualquer subesquema aberto afim $U \subset X$.

Dizemos que o morfismo f é *finito* se f é afim e, para qualquer subesquema aberto afim $U \subset X$, o $\mathcal{O}_X U$-módulo $\mathcal{O}_Y(f^{-1}U)$ é finitamente gerado.

Dizemos que o morfismo f é *quase-compacto* se $f^{-1}U$ é quase-compacto para qualquer subesquema aberto quase-compacto $U \subset X$. É claro que f é quase-compacto se e só se $f^{-1}U$ é a união finita de subesquemas abertos afins em Y para qualquer subesquema aberto afim $U \subset X$. Em particular, qualquer morfismo afim é quase-compacto.

Dizemos que o morfismo f é *do tipo localmente finito* se, para quaisquer subesquemas abertos afins $V := \operatorname{Spec} B \subset Y$ e $U := \operatorname{Spec} A \subset X$ tais que $fV \subset U$, a A-álgebra B é finitamente gerada.

Um morfismo quase-compacto do tipo localmente finito é dito *do tipo finito*.

4.28.5. Observação. *Seja $f : Y \to X$ um morfismo entre k-esquemas.*

- *Se f é um mergulho fechado, então f é finito.*
- *Se f é um mergulho fechado, então f é um mergulho localmente fechado.*
- *Se f é finito, então f é afim.*
- *Se f é afim, então f é quase-compacto.*
- *Se f é finito, então f é do tipo finito.*
- *Se f é do tipo finito, então f é quase-compacto.*
- *Se f é do tipo finito, então f é do tipo localmente finito.*
- *Se f é um mergulho aberto, então f é um mergulho localmente fechado.*
- *Se f é um mergulho localmente fechado, então f é do tipo localmente finito* ∎

4.28.6. Exercício. Mostre que um morfismo $f : Y \to X$ entre k-esquemas é um mergulho aberto se existe uma cobertura aberta $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ tal que o morfismo $f^{-1}U_i \to U_i$ é um mergulho aberto para todo $i \in I$.

4.28.7. Observação. *Um morfismo $f : Y \to X$ entre k-esquemas é um mergulho fechado se existe uma cobertura aberta $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ tal que cada morfismo $f^{-1}U_i \to U_i$ é um mergulho fechado.*

Demonstração. Seja $\mathcal{O}_X|_{U_i} \triangleright I_i$ o feixe quase-coerente de ideais que corresponde ao mergulho fechado $f^{-1}U_i \to U_i$. Os feixes I_i's são compatíveis sobre as interseções $U_i \cap U_j$, pois $f^{-1}(U_i \cap U_j) \to U_i \cap U_j$ é um mergulho fechado induzido por ambos os mergulhos fechados $f^{-1}U_i \to U_i$ e $f^{-1}U_j \to U_j$. Pelo Exercício 3.16.7, obtemos um único feixe de ideais $I \triangleleft \mathcal{O}_X$ tal que $I|_{U_i} = I_i$ para todo i. Tal I providencia um subesquema fechado em X e f estabelece um isomorfismo de Y com este subesquema ∎

As seguintes definição e notação são bem confortáveis tecnicamente.

4.28.8. Definição. Um k-esquema X é dito *quase-separável* se a interseção de quaisquer dois conjuntos abertos quase-compactos é quase-compacta.

4.28.9. Exercício. Mostre que um k-esquema X é quase-compacto e quase-separável se e só se X é a união finita de subesquemas abertos afins, $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, tais que cada interseção $U_i \cap U_j$ é a união finita de subesquemas abertos afins. (Dica: Para mostrar que $Q_1 \cap Q_2$ é um conjunto quase-compacto, onde $X \supset Q_1, Q_2$ são conjuntos abertos quase-compactos, note que Q_k é a união finita de abertos principais dos U_i's e, usando o fato que a união finita de conjuntos quase-compactos é quase compacta, reduza a questão ao caso em que $U_i \supset Q_1$ e $U_j \supset Q_2$ são abertos principais. Em considerações posteriores, é útil a Notação 4.28.10.)

4.28.10. Notação. Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um k-esquema e seja $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Denotamos por X_s o conjunto aberto de pontos onde a "função" s não é nula, $X_s := \{x \in X \mid s_x \notin m_{X,x} \triangleleft_m \mathcal{O}_{X,x}\}$. Obviamente, para qualquer subesquema aberto afim $U \subset X$, o conjunto $X_s \cap U = \mathbf{D}\, s|_U$ é aberto principal em U. Deste modo, a notação introduzida generaliza a de conjuntos abertos principais: tomando X afim, estas coincidem. Note que $s|_{X_s}$ possui inversa em $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_X)$.

4.28.11. Observação. *Seja $(f, f^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ um morfismo de k-esquemas e seja $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ uma seção. Então, para $t := f^\# s \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, temos $f^{-1}X_s = Y_t$.*

Demonstração. Para todo $y \in Y$, temos o k-homomorfismo local $f_y : \mathcal{O}_{X,fy} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ e $f_y : s_{fy} \mapsto t_y$. Daí, $t_y \notin m_{Y,y}$ é equivalente a $s_{fy} \notin m_{X,fy}$, pois $f_y m_{X,fy} \subset m_{Y,y}$ e $m_{X,fy} = f_y^{-1} m_{Y,y}$ ■

4.28.12. Lema. *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um k-esquema quase-compacto e quase-separável, seja F um feixe quase-coerente sobre X e seja $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ uma seção. Então $\Gamma(X, F)[s^{-1}] \to \Gamma(X_s, F)$ é um isomorfismo de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)[s^{-1}]$-módulos.*

Demonstração. Seja $X = \bigcup_{i=1}^m U_i$ uma cobertura aberta afim de X e seja $U_i \cap U_j = \bigcup_{k=1}^n U_{ijk}$ uma cobertura aberta afim de $U_i \cap U_i$. As sequências exatas $0 \to \Gamma(U_i \cap U_j, F) \to \bigoplus_{k=1}^n \Gamma(U_{ijk}, F)$, $0 \to \Gamma(X, F) \to \bigoplus_{i=1}^m \Gamma(U_i, F) \to \bigoplus_{i,j=1}^m \Gamma(U_i \cap U_j, F)$, $0 \to \Gamma(X_s \cap U_i \cap U_j, F) \to \bigoplus_{k=1}^n \Gamma(X_s \cap U_{ijk}, F)$ e $0 \to \Gamma(X_s, F) \to \bigoplus_{i=1}^m \Gamma(X_s \cap U_i, F) \to \bigoplus_{i,j=1}^m \Gamma(X_s \cap U_i \cap U_j, F)$ providenciam as sequências exatas

$$0 \to \Gamma(X, F) \to \bigoplus_i \Gamma(U_i, F) \to \bigoplus_{i,j,k} \Gamma(U_{ijk}, F),$$

$$0 \to \Gamma(X_s, F) \to \bigoplus_i \Gamma(X_s \cap U_i, F) \to \bigoplus_{i,j,k} \Gamma(X_s \cap U_{ijk}, F).$$

Temos um $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)[s^{-1}]$-homomorfismo natural $\Gamma(U, F)[s^{-1}] \to \Gamma(X_s \cap U, F)$ para qualquer conjunto aberto $U \subset X$. Observe que tal homomorfismo é isomorfismo caso U seja afim (vide a Notação 4.28.10).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(X, F)[s^{-1}] \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_i \Gamma(U_i, F)[s^{-1}] \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i,j,k} \Gamma(U_{ijk}, F)[s^{-1}] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X_s, F) \arrow[r] & \bigoplus_i \Gamma(X_s \cap U_i, F) \arrow[r] & \bigoplus_{i,j,k} \Gamma(X_s \cap U_{ijk}, F)
\end{tikzcd}$$

A primeira linha no diagrama comutativo acima é exata, pois o funtor de localização é exato e comuta com biprodutos finitos. As duas últimas setas verticais são isomorfismos pela observação acima ■

4.28.13. Proposição. *Um morfismo $f : Y \to X$ entre k-esquemas é afim se existe uma cobertura aberta afim $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ de X tal que $f^{-1}U_i$ é afim para todo $i \in I$. Se, adicionalmente, $\mathcal{O}_Y(f^{-1}U_i)$ é um $\mathcal{O}_X U_i$-módulo finitamente gerado para todo $i \in I$, então f é finito.*

Demonstração. Tomamos um subesquema aberto afim $U := \operatorname{Spec} A \subset X$, denotamos $B := \mathcal{O}_Y(f^{-1}U)$ e $Y' := \operatorname{Spec} B$ e seja $h : A \to B$ o homomorfismo de k-álgebras que corresponde ao morfismo $f^{-1}U \to U$ pelo Teorema 4.16. Pela Observação 4.5, existe uma cobertura de U por abertos principais $V_j := \mathbf{D}\, a_j$, $j \in J$, tal que $f^{-1}V_j$ é afim para todo $j \in J$. Sendo U quase-compacto, podemos supor que J é finito. Podemos assumir que $Y := f^{-1}U$ e $X := U$. Pelo Teorema 4.16, o morfismo f é a composta $Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{\pi} X$, onde $\pi := \operatorname{Spec} h$. Para concluir que f é afim, basta mostrar que g é um isomorfismo.

Note que Y é quase-compacto e quase-separável, pois Y é a união finita de conjuntos abertos afins, $Y = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}V_j$, cujas interseções $f^{-1}V_j \cap f^{-1}V_k = f^{-1}(V_j \cap V_k)$ são conjuntos abertos afins: a pré-imagem do conjunto $V_j \cap V_k$, aberto principal em V_j, pelo morfismo $f^{-1}V_j \to V_j$ entre k-esquemas afins é um conjunto aberto principal.

Denotamos $s_j := ha_j$. Pelo Lema 4.28.12, $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)[s_j^{-1}] = \Gamma(Y_{s_j}, \mathcal{O}_Y)$, isto é, $B[s_j^{-1}] = \Gamma(Y_{s_j}, \mathcal{O}_Y)$. Pela Observação 4.28.11, $\pi^{-1}X_{a_j} = Y'_{s_j}$ e $g^{-1}Y'_{s_j} = Y_{s_j}$ para todo j, pois $f = \pi g$. Segue de $\pi = \operatorname{Spec} h$ que $\Gamma(Y'_{s_j}, \mathcal{O}_{Y'}) = B[s_j^{-1}]$. Concluímos que $Y_{s_j} \to Y'_{s_j}$, o morfismo induzido por g entre k-esquemas afins, é um isomorfismo para todo j. Portanto g é um isomorfismo.

Para mostrar que f é finito usando a hipótese adicional, primeiramente observamos que $B[a^{-1}]$ é uma $A[a^{-1}]$-álgebra finitamente gerada como $A[a^{-1}]$-módulo se $a \in A$ e B é uma A-álgebra finitamente gerada como A-módulo. Como acima, podemos supor $f = \operatorname{Spec} h$ induzido por um homomorfismo $h : A \to B$ de k-álgebras, onde $X = \operatorname{Spec} A$ e $Y = \operatorname{Spec} B$. Deste modo, $X = \mathbf{D}\, a_1 \cup \dots \cup \mathbf{D}\, a_n$ com $a_1, \dots, a_n \in A$ e $B[a_j^{-1}]$ é um $A[a_j^{-1}]$-módulo finitamente gerado para todo j. Como na demonstração da Observação 4.28.2, denotamos por B' o A-submódulo de B gerado por todos os numeradores dos mencionados geradores dos $A[a_j^{-1}]$-módulos $B[a_j^{-1}]$'s. Os feixes quase-coerentes $\widetilde{B}$ e $\widetilde{B'}$ sobre X coincidem sobre cada $\mathbf{D}\, a_j$. Logo, $B = B'$ ∎

4.28.14. Observação. *Um morfismo $f : Y \to X$ entre k-esquemas é quase-compacto se existe uma cobertura aberta afim $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ de X tal que $f^{-1}U_i$ é quase-compacto para todo $i \in I$.*

Demonstração. Seja $X \supset U$ um subesquema aberto quase-compacto. Precisamos mostrar que $f^{-1}U$ é quase-compacto.

Seja $s \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$. Pela Observação 4.28.11, $f^{-1}(\mathbf{D}\, s) = (f^{-1}U_i)_t$, onde $t := f^{\#}s$. Sendo $f^{-1}U_i$ a união finita de subesquemas abertos afins, a imagem inversa $f^{-1}(\mathbf{D}\, s)$ é quase-compacta.

Já que U admite uma cobertura por abertos principais dos U_i's, resta escoher uma subcobertura finita ∎

4.28.15. Lema. *Um morfismo $f : Y \to X$ entre k-esquemas é do tipo localmente finito se existem uma cobertura aberta afim $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ de X e, para cada $i \in I$, uma cobertura aberta afim $f^{-1}U_i = \bigcup\limits_{j\in J_i} V_{ij}$ de $f^{-1}U_i$ tais que $\mathcal{O}_Y V_{ij}$ é uma $\mathcal{O}_X U_i$-álgebra finitamente gerada para todo $i \in I$ e todo $j \in J_i$.*

Demonstração. Sejam $X \supset U = \operatorname{Spec} A$ e $Y \supset V = \operatorname{Spec} B$ subesquemas abertos afins tais que $fV \subset U$. Precisamos mostrar que a A-álgebra B é finitamente gerada.

Seja $s \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$. Pela Observação 4.28.11, $f^{-1}(\mathbf{D}\, s) = (f^{-1}U_i)_t = \bigcup\limits_{j\in J_i} \mathbf{D}\, t|_{V_{ij}}$, onde $t := f^{\#}s$. Se $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, $V_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}$ e $h_{ij} : A_i \to B_{ij}$ é o k-homomorfismo que corresponde ao morfismo $V_{ij} \to U_i$ induzido por f, então $h_{ij}[s^{-1}] : A_i[s^{-1}] \to B_{ij}\big[(h_{ij}s)^{-1}\big]$ é o k-homomorfismo que corresponde ao morfismo $\mathbf{D}\, t|_{V_{ij}} \to \mathbf{D}\, s$. É imediato que a $A_i[s^{-1}]$-álgebra $B_{ij}\big[(h_{ij}s)^{-1}\big]$ é finitamente gerada, pois B_{ij} é uma A_i-álgebra finitamente gerada.

Deste modo, pela Observação 4.5, podemos supor que $X = U = \operatorname{Spec} A$ e que os $U_i = \operatorname{Spec} A[a_i^{-1}]$ são abertos principais em U. Sendo $V_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}$ com a $A[a_i^{-1}]$-álgebra B_{ij} finitamente gerada, vemos que B_{ij} é uma A-álgebra finitamente gerada. Pela Observação 4.5, existe uma cobertura finita de V por conjuntos abertos principais $W_k = \operatorname{Spec} B[b_k^{-1}]$ de V cada qual aberto principal de algum $V_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}$. A B_{ij}-álgebra $B[b_k^{-1}]$ é finitamente gerada (de fato, por um elemento). Portanto, a A-álgebra $B[b_k^{-1}]$ é finitamente gerada. O fato que os W_k's formam uma cobertura aberta de V é equivalente a $\sum_k b'_k b_k = 1$ para alguns $b'_k \in B$.

Denotamos por B' a A-subálgebra de B gerada pelos b_k's, pelos b'_k's e por todos os numeradores dos geradores das A-álgebras $B[b_k^{-1}]$. Então, para qualquer $b \in B$, existe $m > 0$ tal que $b_k^m b \in B'$ para todo k. Considerando a igualdade $\big(\sum_k b'_k b_k\big)^n = 1$ com n suficientemente grande, podemos concluir que $\sum_k b'_{m,k} b_k^m = 1$ para alguns $b'_{m,k} \in B'$ $\blacksquare$

4.28.16. Definição. Uma classe C de morfismos entre k-esquemas é *local por base* quando, para quaisquer morfismo $f : X \to B$ entre k-esquemas, um subesquema aberto $U \subset B$ e uma cobertura aberta $B = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, são válidas as seguintes implicações:

• se $f : X \to B$ está em C, então o morfismo induzido $f^{-1}U \to U$ está em C;
• se os morfismos induzidos $f^{-1}U_i \to U_i$ estão em C para todo $i \in I$, então $f : X \to B$ está em C.

4.28.17. Observação. *As seguintes classes de morfismos entre k-esquemas são locais por base: mergulhos abertos, mergulhos fechados, mergulhos localmente fechados, morfismos finitos, morfismos afins, morfismos quase-compactos, morfismos do tipo finito e morfismos do tipo localmente finito.*

Demonstração. Vide a Definição 4.24, a Definição 4.26, a Definição 4.28.4, o Exercício 4.28.6, a Observação 4.28.7, a Proposição 4.28.13, a Observação 4.28.14 e o Lema 4.28.15 $\blacksquare$

4.28.18. Definição. Um k-esquema X é dito *localmente noetheriano* se, para cada subesquema aberto afim $U := \operatorname{Spec} A \subset X$, a k-álgebra A é noetheriana. Um k-esquema X localmente noetheriano é *noetheriano* se X é quase-compacto.

4.28.19. Observação. *Seja $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ uma cobertura aberta afim de um k-esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que $\mathcal{O}_X U_i$ é uma k-álgebra noetheriana para todo $i \in I$. Então X é localmente noetheriano.*

Demonstração. Seja $X \supset U$ um subesquema aberto afim. Levando em conta que, pelo Exercício ac.2.6, a localização de uma k-álgebra noetheriana é noetheriana, podemos supor pela Observação 4.5 que $X = U$, que os U_i's são abertos principais em X e que I é finito. Seja $\mathcal{O}_X X \triangleright I$ um ideal. Unindo os numeradores de geradores dos ideais $\widetilde{I} U_i \triangleleft \mathcal{O}_X U_i$, como acima, obtemos geradores de I $\blacksquare$

4.28.20. Definição. Seja X um espaço topológico. Os conjuntos obtidos através dos conjuntos abertos por meio das operações binárias $\cap$, $\cup$ e $\setminus$ se chamam *construtivos*.

Um espaço topológico é *noetheriano* se satisfaz a condição de minimalidade para conjuntos fechados.

4.28.21. Exercício. Sejam X e Y espaços topológicos, sejam $X \supset X_i, S$, $1 \leqslant i \leqslant n$, subespaços tais que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ e seja $f : Y \to X$ uma função contínua. Mostre que são válidas as seguintes afirmações.

• São equivalentes:
  • S é irredutível;
  • $S \subset Y_1 \cup Y_2$ implica $S \subset Y_1$ ou $S \subset Y_2$ para quaisquer conjuntos fechados $Y_1, Y_2 \subset X$;
  • o fecho $\overline{S}$ é irredutível.

• Se Y é irredutível, então fY é irredutível.
• São equivalentes:
  • X é irredutível;
  • $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ para quaisquer conjuntos abertos não-vazios $\varnothing \neq U_1, U_2 \subset X$;
  • $\overline{U} = X$ para qualquer conjunto aberto não-vazio $\varnothing \neq U \subset X$.

• Suponha que X é irredutível e que S é denso, $\overline{S} = X$. Então S é irredutível. Em particular, qualquer conjunto aberto não-vazio em X é irredutível.
• Se S é construtivo, então S é a união finita de conjuntos localmente fechados em X.
• Se X é noetheriano, então S é noetheriano.

• Se cada X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, é noetheriano, então X é noetheriano.
• Se X é noetheriano, então X é quase-compacto.

Já que os conjuntos fechados em um k-esquema afim correspondem aos ideais radicais, a topologia de qualquer k-esquema noetheriano é noetheriana pelo Exercício 4.28.21.

4.28.22. Observação. *As seguintes classes de morfismos entre k-esquemas são fechados relativamente à composição: mergulhos abertos, mergulhos fechados, mergulhos localmente fechados, morfismos finitos, morfismos afins, morfismos quase-compactos, morfismos do tipo finito e morfismos do tipo localmente finito.*

Se X é um k-esquema noetheriano, então qualquer mergulho aberto em X é um morfismo do tipo finito.

Demonstração. As afirmações sobre a composição são imediatas ou seguem da Definicao 4.26 ou do Lema 4.28.15.

Seja X um k-esquema noetheriano e seja $i : U \hookrightarrow X$ um mergulho aberto. Para qualquer subesquema aberto afim $V \subset X$, o subesquema $i^{-1}V = U \cap V$ admite uma cobertura por abertos principais W de V. Obviamente, a $\mathcal{O}_X V$-álgebra $\mathcal{O}_X W$ é finitamente gerada (por um elemento). Pelo Lema 4.28.15, i é do tipo localmente finito. Resta notar que U é quase-compacto pelo Exercicio 4.28.21 ■

4.28.23. Observação. *Cada espaço topológico noetheriano X admite uma única decomposição na união finita de subespaços fechados irredutíveis maximais, chamados* componentes irredutíveis *de X.*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que X se decompõe na união finita de subespaços fechados irredutíveis. Senão, X é redutível e $X = X_1 \cup Y_1$, onde um dos subespaços fechados, digamos, Y_1, não admite uma decomposição na união finita de subespaços fechados irredutíveis. Logo, Y_1 é redutível, $Y_1 = X_2 \cup Y_2$ e assim por diante. Obtemos $Y_n \supsetneq Y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, contradizendo a noetheridade de X.

Tendo uma decomposição $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ na união de conjuntos fechados irredutíveis, podemos supor, retirando os menores, que $X_i \not\subset X_j$ para todos $i \neq j$.

Pelo Exercício 4.28.21, qualquer subconjunto fechado irredutível de X está contido em um dos X_i's. Em particular, os X_i's formam uma lista completa de conjuntos fechados irredutíveis maximais ■

4.28.24. Lema. *Seja $X \supset C$ um conjunto construtivo em um espaço topológico noetheriano X. Então existe um subconjunto $U \subset C$ aberto e denso no fecho $\overline{C}$.*

Demonstração. Pelo Exercício 4.28.21, $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (U_i \cap F_i)$, onde os U_i's são abertos em X e os F_i's são fechados em X. Pelo Exercicio 4.28.21 e pela Observação 4.28.23, podemos supor que os F_i's são irredutíveis e que $V_i := U_i \cap F_i \neq \varnothing$ para todo i. Pelo Exercício 4.28.21, $\overline{V}_i = F_i$. Logo, $\overline{C} = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{V}_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ e, retirando alguns F_i's, obtemos a decomposição $\overline{C} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$ de $\overline{C}$ nas componentes irredutíveis. Para todo $1 \leqslant i \leqslant m$, o conjunto $W_i := V_i \setminus \Big(\bigcup\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq i}} F_j \Big) \neq \varnothing$ (se W_i fosse vazio, então V_i e, portanto, seu fecho F_i, estariam contidos em $\bigcup\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq i}} F_j$) é aberto em F_i e não intercepta os F_j's com $1 \leqslant j \leqslant m$ e $j \neq i$. Portanto, W_i é aberto em $\bigcup\limits_{j=1}^{m} F_j = \overline{C}$. Resta definir $U := \bigcup\limits_{i=1}^{m} W_i$ ■

4.28.25. Definição. Um k-esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ é dito *integral* se $X \neq \varnothing$ e, para cada conjunto aberto não-vazio $\varnothing \neq U \subset X$, a k-álgebra $\mathcal{O}_X U$ é um domínio.

4.28.26. Lema. *Um k-esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ é integral se e só se X é reduzido e irredutível.*

Demonstração. Suponha que X é integral. Então X é obviamente reduzido. Se X é redutível, então $X = X_1 \cup X_2$ com conjuntos fechados $X_1, X_2 \subsetneq X$. Os conjuntos abertos não-vazios $\varnothing \neq U_i := X \setminus X_i$, $i = 1, 2$, são disjuntos. A k-álgebra $\mathcal{O}_X(U_1 \sqcup U_2) = \mathcal{O}_X U_1 \times \mathcal{O}_X U_2$ possui divisores de 0 (por simplicidade, suponha que os U_i's são afins), uma contradição.

Reciprocamente, suponha que X é reduzido e irredutível, mas existem um conjunto aberto não-vazio $\varnothing \neq U \subset X$ e $0 \neq s_1, s_2 \in \mathcal{O}_X U$ tais que $s_1 s_2 = 0$. Pelo Exercício 4.28.21, U é irredutível. Façamos $X_i := \{u \in U \mid s_{i,u} \in m_{X,u} \lhd_m \mathcal{O}_{X,u}\}$. É fácil ver que $U \supset X_i$ é fechado em U e que $U = X_1 \cup X_2$. De $U = X_i$, concluímos que s_i é nilpotente sobre qualquer conjunto aberto afim contido em U. Logo, $s_i = 0$ ∎

4.28.27. Teorema (C. Chevalley). *Seja X um k-esquema noetheriano, seja $f : Y \to X$ um morfismo do tipo finito entre k-esquemas e seja $Y \supset C$ um conjunto construtivo. Então $X \supset fC$ é um conjunto construtivo.*

Demonstração. Pelo Teorema ac.2.7, pela Observação 4.28.19 e pelo Exercício 4.28.21, o k-esquema Y é noetheriano. Podemos supor que Y e X são reduzidos (vide a Definição 4.25), pois precisamos mostrar um fato puramente topológico. Sem perda de generalidade, podemos supor que X é afim.

Pela noetheridade de X, assumimos que a afirmação é válida se $\overline{fY} \subsetneq X$ (a indução noetheriana).

Pelo Exercício 4.28.21, podemos supor que C é localmente fechado, isto é, $C = U \cap F$, onde $Y \supset U$ é aberto e $Y \supset F$ é fechado. Pelas Observações 4.28.5 e 4.28.22, podemos supor que $Y = F$. Deste modo, C é aberto em Y. Decompondo Y nas componentes irredutíveis pela Observação 4.28.23, podemos supor que Y é irredutível. Pela Observação 4.28.22, substituindo Y pelo subesquema aberto C, irredutível pelo Exercício 4.28.21 (desconsiderando o caso trivial $C = \varnothing$), podemos supor que $C = Y$. Sendo Y quase-compacto, podemos supor $C = Y$ reduzido, afim e irredutível. Pela hipótese da indução noetheriana, $\overline{fY} = X$. Além disto, X é reduzido e afim. Pelos Lema 4.28.26 e Teorema 4.16, $Y = \operatorname{Spec} D$, $X = \operatorname{Spec} B$, $f = \operatorname{Spec} i$, onde D é um domínio e o k-homomorfismo $i : B \to D$ é injetor, pois $\overline{fY} = X$ implica $\operatorname{Ker} i = 0$. Sendo f do tipo finito, D é uma B-álgebra finitamente gerada.

Pelo Lema ac.2.9 aplicado a $d := 1$, encontramos $0 \neq b \in B$ tal que cada homomorfismo $h : B \to K$ para um corpo algebricamente fechado K com $hb \neq 0$ se estende a um homomorfismo $\widetilde{h} : D \to K$. Isto significa que $fY \supset X_b$. Com efeito, se $b \notin p \lhd_p B$, então temos a composta h de homomorfismos $B \to B/p \hookrightarrow \mathrm{k}\,p = \mathrm{K}(B/p) \hookrightarrow \overline{\mathrm{k}\,p}$ para o fecho algébrico de $\mathrm{k}\,p$ tal que $hb \neq 0$. O núcleo $q \lhd_p D$ da extensão $\widetilde{h} : D \to \overline{\mathrm{k}\,p}$ de h obviamente satisfaz $q \cap B = p$, isto é, $fq = p$.

Finalmente, $Y = Y_b \sqcup \mathbf{V}_Y\, b$, $Y_b = f^{-1} X_b$, $\mathbf{V}_Y\, b = f^{-1}(\mathbf{V}_X\, b)$ e $fY = X_b \cup f'(\mathbf{V}_Y\, b)$, onde o morfismo $f' : \mathbf{V}_Y\, b \to \mathbf{V}_X\, b$ é induzido por f e o conjunto $\mathbf{V}_X\, b \subsetneq X$ é fechado em X. Resta aplicar a hipótese da indução noetheriana para o morfismo f' notando que $\mathbf{V}_X\, b$ é um k-esquema noetheriano afim e que o morfismo f' é do tipo finito ∎

5. Esquemas separáveis e esquemas próprios

5.1. Morfismos separáveis, quase-separáveis e próprios. Posteriormente, introduzimos a assim chamada analitificação X_{an} do esquema X do tipo finito sobre $\mathbb{C}$, isto é, a topologia forte herdada de $\mathbb{C}$ e o feixe de "funções" analíticas. A topologia de Zariski parece demais fraca para expressar que a analitificação é Hausdorff ou compacta, mas isto é surpreendentemente possível. Ideologicamente, um morfismo $f : Y \to X$ é separável/próprio se todas as fibras $f^{-1}x$, $x \in X$, são Hausdorff/compactas.

5.1.1. Definição. Seja X um k-esquema e sejam $X \supset Y_1, Y_2$ subesquemas localmente fechados, isto é, $j_i : Y_i \hookrightarrow U_i$ é um mergulho fechado, $i = 1, 2$, onde $X \supset U_i$ é um subesquema aberto. Denotamos por $I_i \lhd \mathcal{O}_X|_{U_i}$ o feixe quase-coerente de ideais de Y_i, ou seja, $Y_i = \mathbf{V}\, I_i$. A *interseção de subesquemas* $Y_1 \cap Y_2$ é o subesquema fechado em $U_1 \cap U_2$ dado pelo feixe quase-coerente de ideais $I_1|_{U_1 \cap U_2} + I_2|_{U_1 \cap U_2} \lhd \mathcal{O}_X|_{U_1 \cap U_2}$. É fácil notar que a definição independe da escolha dos subesquemas abertos U_1 e U_2.

Se o subesquema $Y_2 = U_2 \subset X$ é aberto, a interseção $Y_1 \cap Y_2$ é simplesmente o morfismo $j_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \hookrightarrow U_1 \cap U_2$ induzido por j_1.

5.1.2. Exercício. Sejam $X \supset Y_1, Y_2$ subesquemas localmente fechados em um k-esquema X. Mostre que $Y_1 \cap Y_2 = Y_1 \times_X Y_2$. (Dica: reduza a questão ao caso de subesquemas fechados $Y_1, Y_2 \subset X$ com X afim e note que $(A/I_1) \otimes_A (A/I_2) = A/(I_1 + I_2)$ para quaisquer ideais $I_1, I_2 \lhd A$ de uma k-álgebra A.)

5.1.3. Lema. *Seja $f : Y \to X$ um morfismo entre k-esquemas. Então o* morfismo diagonal $\delta_f : Y \to Y \times_X Y$, *determinado pelos morfismos idênticos $1_Y : Y \to Y$, é um mergulho localmente fechado.*

Mais detalhadamente, consideramos coberturas abertas afins $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ e $f^{-1}U_i = \bigcup\limits_{j\in J_i} V_{ij}$, $i \in I$, com $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ e $V_{ij} = \operatorname{Spec} B_{ij}$. Então $V_{ij} \times_{U_i} V_{ij} = V_{ij} \times_X V_{ij}$ é um subesquema aberto em $Y \times_X Y$ e o subesquema aberto $W := \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}} V_{ij} \times_{U_i} V_{ij} \subset Y \times_X Y$ contém a imagem Δ_f de δ_f. Ainda mais, Δ_f é um subesquema $\Delta_f \hookrightarrow W$ fechado em W e δ_f estabelece um isomorfismo entre Y e Δ_f.

O morfismo δ_f é um mergulho fechado se e só se o conjunto Δ_f é fechado em $Y \times_X Y$.

Para quaisquer subesquemas abertos $V, V' \subset Y$, o subesquema $\Delta_f \cap (V \times_X V')$ localmente fechado em $Y \times_X Y$ é isomorfo (por meio de δ_f) ao subesquema aberto $V \cap V' \subset Y$.

Demonstração. O fato que $V_{ij} \times_{U_i} V_{ij} = V_{ij} \times_X V_{ij}$ é um subesquema aberto em $Y \times_X Y$ foi observado na demonstração do Teorema 4.18. A inclusão $\delta_f Y \subset W$ segue imediatamente da definição de δ_f e de $Y = \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}} V_{ij}$. É claro que $\delta_f^{-1}(V_{ij} \times_X V_{ij}) = V_{ij}$. Logo, para mostrar que $Y \to W$ é um mergulho fechado, basta verificar, usando a Observação 4.28.17, que o morfismo $V_{ij} \to V_{ij} \times_{U_i} V_{ij}$ induzido por δ_f é um mergulho fechado: tal morfismo corresponde ao homomorfismo da multiplicação $B_{ij} \otimes_{A_i} B_{ij} \to B_{ij}$, $b \otimes b' \mapsto bb'$, claramente sobrejetor.

Se δ_f é um mergulho fechado, então $Y \times_X Y \supset \Delta_f$ é obviamente fechado. Reciprocamente, suponha que $Y \times_X Y \supset \Delta_f$ é fechado. Então δ_f é um mergulho fechado pela Observação 4.28.17, pois $Y = \delta_f^{-1} W \to W$ e $\varnothing = \delta_f^{-1}(Y \times_X Y \setminus \Delta_f) \to Y \times_X Y \setminus \Delta_f$ são mergulhos fechados.

É fácil ver que $\delta_f^{-1}(V \times_X V') \subset V \cap V'$ e é óbvio que $\delta_f(V \cap V') \subset V \times_X V'$. Logo, $\delta_f^{-1}(V \times_X V') = V \cap V'$. Portanto, o morfismo $V \cap V' \to W \cap (V \times_X V')$ induzido por δ_f é um mergulho fechado, ou seja, o morfismo $V \cap V' \to \Delta_f \cap (V \times_X V')$ é um isomorfismo (vide a Definição 5.1.1) ∎

5.1.4. Definição. Um morfismo $f : Y \to X$ é dito *separável* se $\delta_f : Y \to Y \times_X Y$ é um mergulho fechado ou, equivalentemente pelo Lema 5.1.3, se $Y \times_X Y \supset \Delta_f$ é fechado.

5.1.5. Corolário. *Um morfismo $f : Y \to X$ entre k-esquemas é separável se e só se, para quaisquer subesquemas afins $U \subset X$ e $V, V' \subset Y$ tais que $fV, fV' \subset U$, a interseção $V \cap V'$ é um subesquema afim e $\mathcal{O}_Y(V \cap V') = \mathcal{O}_Y V|_{V\cap V'} \cdot \mathcal{O}_Y V'|_{V\cap V'}$.*

Demonstração. Suponha que δ_f é um mergulho fechado. Então o morfismo $V \cap V' \to V \times_X V' = V \times_U V'$ induzido por δ_f é um mergulho fechado pelo Lema 5.1.3. Sendo $V \times_U V'$ afim, $V \cap V'$ é afim. Além disto, o homomorfismo $\mathcal{O}_Y V \otimes_{\mathcal{O}_X U} \mathcal{O}_Y V' \to \mathcal{O}_Y(V \cap V')$ é sobrejetivo.

Reciprocamente, para verificar que δ_f é um mergulho fechado, basta mostrar, pela Observação 4.28.17, que o morfismo $\delta_f^{-1}(V_{ij} \times_{U_i} V_{ij'}) \to V_{ij} \times_{U_i} V_{ij'}$ induzido por δ_f é um mergulho fechado. Levando em conta que $\delta_f^{-1}(V_{ij} \times_{U_i} V_{ij'}) = V_{ij} \cap V_{ij'}$ é afim e que $\mathcal{O}_Y(V_{ij} \cap V_{ij'}) = \mathcal{O}_Y V_{ij}|_{V_{ij}\cap V_{ij'}} \cdot \mathcal{O}_Y V_{ij'}|_{V_{ij}\cap V_{ij'}}$, obtemos o homomorfismo sobrejetivo $\mathcal{O}_Y V_{ij} \otimes_{\mathcal{O}_X U_i} \mathcal{O}_Y V_{ij'} \to \mathcal{O}_Y(V_{ij} \cap V_{ij'})$ ∎

O conceito de k-esquema quase-separável é motivado pelo corolário que acabamos de demonstrar.

5.1.6. Definição. Um morfismo $f : Y \to X$ entre k-esquemas é dito *quase-separável* se $f^{-1}U$ é quase-separável para qualquer subesquema aberto afim $U \subset X$.

5.1.7. Lema. *Um morfismo $f : Y \to X$ entre k-esquemas é quase-separável se existe uma cobertura aberta afim $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ tal que $f^{-1}U_i$ é quase-separável para todo $i \in I$.*

Demonstração. Para cada $i \in I$, temos $f^{-1}U_i = \bigcup\limits_{j\in J_i} V_{ij}$, onde $Y \supset V_{ij}$ é um subesquema aberto afim e $V_{ij} \cap V_{ij'}$ é quase-compacto para todos $j, j' \in J_i$, isto é, $Y \supset V_{ij} \cap V_{ij'}$ é a união finita de subesquemas abertos afins.

Sejam $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ e $t_i := f^{\#} s_i \in \Gamma(f^{-1}U_i, \mathcal{O}_Y)$. Pela Observação 4.28.11, $f^{-1}U_{i,s_i} = (f^{-1}U_i)_{t_i}$. Sabemos que $(f^{-1}U_i)_{t_i} \cap V_{ij}$ é aberto afim, pois é um aberto principal em V_{ij}. Pelo mesmo motivo, $(f^{-1}U_i)_{t_i} \cap V_{ij} \cap V_{ij'}$ é a união finita de subesquemas abertos afins, ou seja, é quase-compacto. Pelo Exercício 4.28.9, $(f^{-1}U_i)_{t_i}$ é quase-separável. Portanto, podemos supor que, com cada U_i, a cobertura de X contém todos os abertos principais dos U_i's.

Seja $X \supset U$ um subesquema aberto afim. Precisamos mostrar que $f^{-1}U$ é quase-separável. Já que U é coberto por abertos principais dos U_i's, podemos supor que $X = U$, que $U_i = X_{s_i}$ é aberto principal em X para todo $i \in I$ e que I é finito, onde $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Denotamos $t_i := f^{\#} s_i \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Sejam $Y \supset Q_1, Q_2$ abertos quase-compactos. Como acima, para cada $i \in I$, o subesquema $Y_{t_i} \cap Q_k \subset f^{-1}U_i$ é aberto quase-compacto. Logo, $Y_{t_i} \cap Q_1 \cap Q_2$ é aberto quase-compacto, implicando que $Q_1 \cap Q_2$ é a união finita de subesquemas abertos quase-compactos ■

5.1.8. Definição. Uma classe C de morfismos entre k-esquemas é *estável pela mudança de base* quando, para quaisquer morfismos $W \to X \xleftarrow{f} Y$ entre k-esquemas com f estando em C, o morfismo g está em C, onde $W \xleftarrow{g} Z \to Y$ denota o pullback de $W \to X \xleftarrow{f} Y$. Em seguida, um quadrado de pullback se chama um *quadrado mágico.*

5.1.9. Proposição. *As seguintes classes de morfismos entre k-esquemas são estáveis pela mudança de base: mergulhos abertos, mergulhos fechados, mergulhos localmente fechados, morfismos finitos, morfismos afins, morfismos quase-compactos, morfismos do tipo finito e morfismos do tipo localmente finito.*

Demonstração. Para mergulhos abertos, a afirmação segue do Exercício 4.14.

Pela Observação 4.28.17, as classes listadas de morfismos são locais por base. Seja $f : Y \to X$ um

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"] & Z \arrow[l] \arrow[d, "g"] & g^{-1}V \arrow[l] \arrow[d, "g'"] \\ X & W \arrow[l, "p"'] & V \arrow[l] \end{tikzcd}$$

morfismo da classe em questão e suponha que o primeiro quadrado no diagrama à esquerda é mágico. Para mostrar que o morfismo g está na classe, podemos escolher uma cobertura aberta de W por subesquemas abertos afins V tais que $pV \subset U$ para apropriados

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d, "h"] & f^{-1}U \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & Y \arrow[d, "f"'] \\ V \arrow[r, "p'"] & U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

subesquemas abertos afins $U \subset X$. Basta mostrar que o morfismo $g' : g^{-1}V \to V$ induzido por g está na classe. Consideramos ambos os diagramas, onde todos os quadrados são mágicos e f', p' são induzidos por f, p, respectivamente. Levando em conta que a colagem de dois quadrados mágicos é um quadrado mágico e que o pullback é essencialmente único, concluímos que o morfismo h é de fato “igual” ao morfismo g'. Sabendo que f' está na classe pela Observação 4.28.17, assim reduzimos o problema para o caso de $W = \operatorname{Spec} C$ e $X = \operatorname{Spec} A$ afins.

Para as classes de mergulhos fechados ou de morfismos finitos ou de morfismos afins, o k-esquema Y é afim, $Y = \operatorname{Spec} B$ e $Z = \operatorname{Spec} C \otimes_A B$. Se o homomorfismo $A \to B$ é sobrejetor, então o homomorfismo $C \to C \otimes_A B$ é sobrejetor. Se B é um A-módulo finitamente gerado, então $C \otimes_A B$ é um C-módulo finitamente gerado. Deste modo, a demonstração está completa para mergulhos abertos e mergulhos fechados (logo, para mergulhos localmente fechados) tal como para morfismos finitos e morfismos afins.

Para morfismos quase-compactos, Y é a união de n subesquemas abertos afins. Pela demonstração do Teorema 4.18, Z é a união de n subesquemas abertos afins.

Para morfismos do tipo localmente finito, o k-esquema Y possui uma cobertura por subesquemas abertos afins $V := \operatorname{Spec} B \subset Y$. Pela demonstração do Teorema 4.18, o k-esquema Z possui cobertura por subesquemas abertos afins $\operatorname{Spec} C\otimes_A B$. Já que B é uma A-álgebra finitamente gerada, a C-álgebra $C\otimes_A B$ é finitamente gerada ■

5.1.10. Alguns quadrados mágicos. Neste subitem, lidamos com uma categoria com produtos fibrados. Sejam $Z\to B\leftarrow Y\to A\leftarrow X$ morfismos. Então existe um isomorfismo natural $(Z\times_B Y)\times_A X=Z\times_B(Y\times_A X)$; ambos os produtos fibrados são isomorfos a $(Z\times_B Y)\times_Y(Y\times_A X)$. Para ver isto, basta olhar para o diagrama à direita montado de 3 (de fato, de 5 !) quadrados mágicos.

$$\begin{tikzcd}
 & & (Z\times_B Y)\times_Y(Y\times_A X) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & Z\times_B Y \arrow[dl] \arrow[dr] & & Y\times_A X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Z \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\
 & B & & A &
\end{tikzcd}$$

a. Sejam $Z_1\xrightarrow{h_1}Y\xleftarrow{h_2}Z_2$ e $Y\to X$ morfismos. Então o quadrado abaixo é mágico. Realmente, sejam $g:W\to Z_1\times_X Z_2$ e $k:W\to Y$ morfismos tais que $(h_1\times_X h_2)g=\delta k$. Compondo esta igualdade com $p_i:Y\times_X Y\to Y$, obtemos $h_i\pi_i g=k$ para todo $i=1,2$, onde $\pi_i:Z_1\times_X Z_2\to Z_i$. Logo, existe um único morfismo $l:W\to Z_1\times_Y Z_2$ tal que $\pi_i hl=\pi_i g$ para todo $i=1,2$. Isto implica $hl=g$ e $(h_i\pi_i h)l=h_i\pi_i g=k$. Se $hl'=g$, então $\pi_i hl'=\pi_i g$ para todo $i=1,2$, logo, $l'=l$.

$$\begin{tikzcd}
Z_1\times_Y Z_2 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h_i\pi_i h"'] & Z_1\times_X Z_2 \arrow[d, "h_1\times_X h_2"] \\
Y \arrow[r, "\delta"] & Y\times_X Y
\end{tikzcd}$$

b. Suponha que o quadrado à esquerda é mágico. Então o quadrado à direita é mágico, onde o morfismo π se vislumbra no diagrama abaixo à direita. Com efeito, observamos primeiramente que todos os objetos estão sobre X. Portanto, trocando a categoria, podemos escrever $Z=W\times Y$. É fácil ver que, nestes termos, $Z\times_W Z=W\times Y\times Y$, $\delta_g=1_W\times\delta_f:W\times Y\to W\times Y\times Y$ e $\pi:W\times Y\times Y\to Y\times Y$ é a projeção canônica. É facil verificar que o quadrado acima à direita é mágico. (O fato vale para qualquer morfismo no lugar de δ_f.)

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "f"'] \\
W \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\delta_g"] \arrow[d] & Z\times_W Z \arrow[d, "\pi"'] \\
Y \arrow[r, "\delta_f"] & Y\times_X Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "f"'] & \\
Z\times_W Z \arrow[ur] \arrow[dr] & W \arrow[r] & X & Y\times_X Y \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & Z \arrow[r] \arrow[u, "g"'] & Y \arrow[u, "f"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W\times Y \arrow[r, "1_W\times\delta_f"] \arrow[d] & W\times Y\times Y \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "\delta_f"] & Y\times Y
\end{tikzcd}$$

5.1.11. Lema. *Um morfismo $f:Y\to X$ entre k-esquemas é quase-separável se e só se o morfismo diagonal $\delta_f:Y\to Y\times_X Y$ é quase-compacto.*

Demonstração. Suponha que δ_f é quase-compacto. Seja $X\supset U$ um subesquema aberto afim. Tomemos subesquemas abertos afins $Z_1,Z_2\subset f^{-1}U$. Pelo item 5.1.10.a e pela Proposição 5.1.9, o morfismo $Z_1\times_Y Z_2\to Z_1\times_X Z_2$ é quase-compacto. Sendo $Z_1\times_X Z_2=Z_1\times_U Z_2$ afim, o k-esquema $Z_1\times_Y Z_2=Z_1\cap Z_2$ (vide o Exercício 5.1.2) é quase-compacto. Portanto, $f^{-1}U$ é quase-separável. Logo, f é quase-separável.

Reciprocamente, suponha que f é quase-separável. Para mostrar que δ_f é quase-compacto, consideramos, como no Lema 5.1.3, a cobertura aberta afim $Y\times_X Y=\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j,j'\in J_i}}V_{ij}\times_{U_i}V_{ij'}$, onde $X=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$ é uma cobertura aberta afim de X e $f^{-1}U_i=\bigcup\limits_{j\in J_i}V_{ij}$, $i\in I$, é uma cobertura aberta afim de $f^{-1}U_i$. Pela Observação 4.28.14, basta notar que $\delta_f^{-1}(V_{ij}\times_{U_i}V_{ij'})=V_{ij}\cap V_{ij'}$ é quase-compacto, pois $f^{-1}U_i$ é quase-separável ■

5.1.12. Definição. Seja B um k-esquema. Um *B-esquema* X é nada mais do que um morfismo $X\to B$ chamado *estrutural.* Um *morfismo* entre B-esquemas $i:X\to B$ e $j:Y\to B$ é simplesmente um morfismo $f:Y\to X$ entre k-esquemas que preserva morfismos estruturais, isto é, $if=j$.

Seja $f : Y \to X$ um morfismo entre B-esquemas. O *gráfico* $\Gamma_f : Y \to Y \times_B X$ de f é o morfismo determinado por 1_Y e f. A propriedade principal do gráfico é que $f = \pi\Gamma_f$, onde $\pi : Y \times_B X \to X$ é a projeção canônica.

5.1.13. Observação. *Seja $f : Y \to X$ um morfismo entre B-esquemas. Então o gráfico $\Gamma_f : Y \to Y \times_B X$ é um mergulho localmente fechado. Se o morfismo estrutural $p : X \to B$ é (quase-)separável, então Γ_f é um (morfismo quase-compacto) mergulho fechado.*

Demonstração. Pelo item 5.1.10.a aplicado para $Z_1 := Y$, $h_1 := 1_Y$, $Z_2 := X$, $h_2 := f$, $Y := X$ e $X := B$, levando em conta que $Y \times_X X = Y$, concluímos que o morfismo Γ_f é obtido do morfismo δ_p pela mudança de base. Pela Proposição 5.1.9, Γ_f é um mergulho localmente fechado, pois δ_p é um mergulho localmente fechado pelo Lema 5.1.3. Se p é (quase-)separável, então δ_p é um (morfismo quase-compacto) mergulho fechado (pelo Lema 5.1.11) pela Definição 5.1.4 e Γ_f é um (morfismo quase-compacto) mergulho fechado pela Proposição 5.1.9 ■

5.1.14. Lema (de cancelamento). *Seja C uma classe de morfismos entre k-esquemas fechada relativamente à composição e estável pela mudança de base e sejam $g : Z \to Y$ e $f : Y \to X$ morfismos entre k-esquemas. Então $g \in C$ se $fg \in C$ e $\delta_f \in C$.*

Demonstração. Pelo item 5.1.10.a aplicado para $Z_1 := Z$, $h_1 := g$, $Z_2 := Y$ e $h_2 := 1_Y$, levando em conta que $Z \times_Y Y = Z$, vemos que o morfismo Γ_g é obtido do morfismo δ_f pela mudança de base. Logo, $\Gamma_g \in C$. A projeção $\pi : Z \times_X Y \to Y$, obtida de $fg : Z \to X$ pela mudança de base, também está em C. Portanto, $g = \pi\Gamma_g \in C$ ■

5.1.15. Definição. Um morfismo f entre k-esquemas é dito *universalmente fechado* se f permanece fechado,[9] como função entre espaços topológicos, após qualquer mudança de base. Um morfismo do tipo finito, separável e universalmente fechado é dito um morfismo *próprio*.

5.1.16. Proposição. *Denotamos por C a classe de todos os morfismos quase-separáveis ou de todos os morfismos separáveis ou de todos os morfismos próprios.*

• *A classe C é estável pela mudança de base.*
• *A classe C é fechada relativamente à composição.*
• *A classe C é local por base.*
• *A classe C é fechada pelo produto. Isto significa que o morfismo $f_1 \times_B f_2 : Y_1 \times_B Y_2 \to X_1 \times_B X_2$ está em C se estão em C os morfismos $f_1 : Y_1 \to X_1$ e $f_2 : Y_2 \to X_2$ entre B-esquemas.*
• *Sejam $g : Z \to Y$ e $f : Y \to X$ morfismos entre k-esquemas tais que $fg \in C$ e, caso C seja a classe de todos os morfismos próprios, suponha que f é separável. Então $g \in C$.*

Demonstração. Para mostrar que morfismos (quase-)separáveis são estáveis pela mudança de base, usamos o quadrado mágico 5.1.10.b. Seja $f : Y \to X$ um morfismo (quase-)separável e seja $g : Z \to W$ o morfismo obtido de f pela mudança de base. Então $\delta_f : Y \to Y \times_X Y$ é um (morfismo quase-compacto) mergulho fechado (pelo Lema 5.1.11) pela Definição 5.1.4. Pelo item 5.1.10.b e pela Proposição 5.1.9, o morfismo $\delta_g : Z \to Z \times_W Z$ é um (morfismo quase-compacto) mergulho fechado, implicando o desejado. Para morfismos próprios, resta usar a Proposição 5.1.9 para morfismos do tipo finito.

Sejam $Z \to Y$ e $Y \to X$ morfismos (quase-)separáveis. Usando o quadrado mágico 5.1.10.a com $Z_1 := Z_2 := Z$, vemos pela Proposição 5.1.9 que $Z \times_Y Z \xrightarrow{h} Z \times_X Z$ é um (morfismo quase-compacto) mergulho fechado. A composta $Z \to Z \times_Y Z \xrightarrow{h} Z \times_X Z$ é um (morfismo quase-compacto) mergulho fechado pela Observação 4.28.22. Para morfismos próprios, resta usar a Observação 4.28.22 para morfismos do tipo finito e lembrar que a colagem de dois quadrados mágicos é um quadrado mágico.

[9] Isto significa que a imagem de qualquer conjunto fechado é um conjunto fechado.

Para mostrar que a classe C é local por base, note que a parte da localização de base segue da estabilidade de C pela mudança de base. Seja $f : Y \to X$ um morfismo entre k-esquemas e seja $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ uma cobertura aberta de X tal que os morfismos $f^{-1}U_i \to U_i$ induzidos por f estão em C para todo $i \in I$. Então $f^{-1}U_i = \delta_f^{-1}(g^{-1}U_i)$ e $g^{-1}U_i = f^{-1}U_i \times_X f^{-1}U_i = f^{-1}U_i \times_{U_i} f^{-1}U_i$, onde $g : Y\times_X Y \to X$. Já que o morfismo $f^{-1}U_i \to U_i$ está em C, o morfismo $f^{-1}U_i \to f^{-1}U_i\times_{U_i} f^{-1}U_i$ induzido por δ_f é um (morfismo quase-compacto) mergulho fechado. Pela Observação 4.28.17, δ_f é um (morfismo quase-compacto) mergulho fechado. Logo, f é (quase-)separável. Usando a Observação 4.28.17 para morfismos do tipo finito, resta mostrar que f é universalmente fechado caso C seja a classe de todos os morfismos próprios. Seja $g : Z \to W$ o morfismo obtido de f pela mudança de base $p : W \to X$. Então o morfismo $g^{-1}(p^{-1}U_i) \to p^{-1}U_i$ é obtido do morfismo $f^{-1}U_i \to U_i$ pela mudança de base (vide o passo 2 da demonstração do Teorema 4.18) e, portanto, é fechado para todo $i \in I$. Consequentemente, g é fechado.

Para mostrar que a classe C é fechada pelo produto, basta lidar com o caso $f_1 = 1_{Y_1}$, pois $f_1 \times_B f_2 = (1_{Y_1} \times_B f_2)(f_1 \times_B 1_{Y_2})$. Mudando a base do morfismo $f_2 : Y_2 \to X_2$ pelo morfismo $X_1 \times_B X_2 \to X_2$, obtemos o morfismo $g : (X_1 \times_B X_2) \times_{X_2} Y_2 \to X_1 \times_B X_2$. Pelo item 5.1.10, $(X_1 \times_B X_2) \times_{X_2} Y_2 = X_1 \times_B (X_2 \times_{X_2} Y_2) = X_1 \times_B Y_2$. É fácil ver que $g = 1 \times_B f_2$.

A última propriedade de C segue do Lema 5.1.14, pois o fato que $\delta_f \in C$, isto é, que um mergulho localmente fechado é (quase-)separável e que um mergulho fechado é próprio, é observado na Proposição 5.1.19 ■

5.1.17. Definição. Seja A uma k-álgebra e seja B uma k-álgebra graduada finitamente gerada sobre $B^0 = A$. Então o k-esquema $\operatorname{Proj} B(\to \operatorname{Spec} A)$ é dito um *A-esquema projetivo* ou um *esquema projetivo sobre A*. Um subesquema aberto quase-compacto de um A-esquema projetivo é um *A-esquema quase-projetivo* ou um *esquema quase-projetivo sobre A*. Note que, pelas Observações 4.27.18 e 4.27.15, podemos supor que a A-álgebra B é finitamente gerada por elementos homogêneos de grau 1. Neste caso, $B = A[x_0, x_1, \dots, x_n]/I$, onde $A[x_0, x_1, \dots, x_n] {}^h\!\!\trianglerighteq I$ é um ideal homogêneo. Definindo $\mathbb{P}^n_A := \operatorname{Proj} A[x_0, x_1, \dots, x_n]$, vemos que um subesquema projetivo sobre A é nada mais do que um subesquema fechado em algum $\mathbb{P}^n_A$.

5.1.18. Observação. *Seja A uma k-álgebra. Então cada k-esquema quase-projetivo sobre A é do tipo finito sobre* $\operatorname{Spec} A$*, quase-compacto e quase-separável. Em particular, se A é noetheriano, cada A-esquema quase-projetivo é noetheriano. Além disto, o k-esquema* $\operatorname{Spec} A$ *é projetivo sobre A, pois* $\operatorname{Proj} A[x] = \operatorname{Spec} A$ ■

5.1.19. Proposição. *Sejam $g : Z \to Y$ e $f : Y \to X$ morfismos entre k-esquemas e seja A uma k-álgebra. Então são válidas as seguintes afirmações.*

- *Se Y é um k-esquema quase-separável, então f é quase-separável. Em particular, f é quase-separável se Y é localmente noetheriano.*
- *Se fg é quase-separável e Y é um k-esquema quase-separável, então g é quase-separável.*
- *Mergulhos abertos e mergulhos fechados são monomorfismos em* $\mathbf{Sch}_k$*. Cada monomorfismo em* $\mathbf{Sch}_k$ *é separável. Em particular, mergulhos localmente fechados são separáveis.*
- *Morfismos afins são separáveis.*
- *Um morfismo $X \to \operatorname{Spec} A$ é separável se e só se o morfismo $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ é separável.*
- *Qualquer A-esquema quase-projetivo X é separável, isto é, o morfismo $X \to \operatorname{Spec} A$ é separável.*
- *Morfismos finitos são próprios.*

Demonstração. A primeira afirmação é óbvia.

A segunda afirmação segue da primeira e do Lema 5.1.14.

Pelo Exercício 4.13, qualquer mergulho aberto é um monomorfismo. O fato que cada mergulho fechado $f : Y \to X$ é um monomorfismo se verifica localmente usando a unicidade no Exercício 4.15, pois, para X afim, Y é afim e tal fato segue do Teorema 4.16 e da sobrejetividade do homomorfismo $\mathcal{O}_X X \to \mathcal{O}_Y Y$. Se $f : Y \to X$ é um monomorfismo, é fácil ver que $Y \times_X Y = Y$ e que $\delta_f = 1_Y$.

Morfismos afins são separáveis, pois podemos verificar isto para $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ e, como vemos na demonstração do Lema 5.1.3, o morfismo δ_f corresponde ao homomorfismo da multiplicação $B \otimes_A B \to B$, $b \otimes b' \mapsto bb'$, obviamente sobrejetor.

O morfismo $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ é obviamente afim, portanto, é separável pela afirmação anterior. Pela Proposição 5.1.16, o morfismo $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ é separável se e só se é separável o morfismo $X \to \operatorname{Spec} A$.

Pelas afirmações anteriores e pela Definição 5.1.17, basta mostrar que o morfismo $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ é separável. Denotamos $B := A[x_0, x_1, \dots, x_n]$ e $P := \operatorname{Proj} B$. Lembrando a demonstração do Corolário 5.1.5 e que $\mathbf{D}_+ x_i$ e $\mathbf{D}_+ x_i \cap \mathbf{D}_+ x_j = \mathbf{D}_+(x_i x_j)$ são afins, reduzimos a tarefa a verificação de $\mathcal{O}_P \mathbf{D}_+(x_i x_j) = (\mathcal{O}_P \mathbf{D}_+ x_i)|_{\mathbf{D}_+(x_i x_j)} \cdot (\mathcal{O}_P \mathbf{D}_+ x_j)|_{\mathbf{D}_+(x_i x_j)}$, isto é, de $B\big[(x_i x_j)^{-1}\big]^0 = B[x_i^{-1}]^0 \cdot B[x_j^{-1}]^0$.

Obviamente morfismos finitos são do tipo finito e, sendo afins, são separáveis. Pela Proposição 5.1.9, são estáveis pela mudança de base. Assim, para mostrar que são universalmente fechados, basta verificar que qualquer morfismo finito $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ é fechado. Já que todo mergulho fechado é um morfismo finito, reduzimos o problema para o caso quando $B \geqslant A$ é uma k-subálgebra tal que B é um A-módulo finitamente gerado. Nesta situação, $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ é sobrejetor pelo Exercício ac.3.15 ∎

5.1.20. Exercício. Sejam $h : X \to Y$ e $f : Y \to X$ morfismos entre k-esquemas tais que $fh = 1_X$. Mostre que h é um mergulho localmente fechado. Mostre que h é um mergulho fechado se f é separável. (Dica: use o quadrado mágico 5.1.10.a com $Z_1 := X$, $h_1 := h$, $Z_2 := Y$ e $h_2 := 1_Y$ observando que o morfismo $h : Z_1 \times_Y Z_2 \to Z_1 \times_X Z_2$ é exatamente o morfismo $h : X \to Y$.)

5.1.21. Exercício. Sejam $g : Z \to Y$ e $f : Y \to X$ morfismos entre k-esquemas. Mostre que g é um mergulho fechado (um morfismo do tipo finito) se fg é um mergulho fechado (um morfismo do tipo finito). Mostre que g é quase-compacto se fg é quase-compacto e Y é noetheriano.

5.1.22. Exercício. Seja k um corpo, seja $X := \operatorname{Spec} k[x]$ e seja $U := \mathbf{D}\, x$. Considere o k-esquema Y colado das duas cópias X_1, X_2 de X ao longo das cópias U_1, U_2 de U identificando os subesquemas abertos afins U_1 e U_2 por meio do isomorfismo idêntico. Mostre que Y não é separável sobre k. (Dica: use o Corolário 5.1.5.) Encontre uma identificação de U_1 e U_2 providenciando a colagem $\mathbb{P}^1_k$.

O último exercício ilustra que um k-esquema não será separável se podermos estender a colagem de alguns seus subesquemas abertos para a colagem de maiores subesquemas abertos.

5.1.23. Definição. Seja $f : Y \to X$ um morfismo entre k-esquemas. Então o k-esquema $f^{-1}x := \operatorname{Spec} \mathrm{k}\, x \times_X Y$ é dito a *fibra de f em $x \in X$*, onde o morfismo $\operatorname{Spec} \mathrm{k}\, x \xrightarrow{x} X$ (que "aponta" o ponto x) é induzido por $\mathrm{k}\, x \hookleftarrow A/x$ e $X \supset \operatorname{Spec} A \ni x$ é uma vizinhança aberta afim de x. É fácil ver que tal definição independe da escolha da vizinhança afim de x.

5.1.24. Observação. *Seja $f : Y \to X$ um morfismo entre k-esquemas e seja $x \in X$. Então o morfismo de k-esquemas $f^{-1}x \to Y$ é um homeomorfismo com $f^{-1}x \subset Y$.*

Demonstração. Podemos supor que $X = \operatorname{Spec} A$. Seja $Y \supset V := \operatorname{Spec} B$ um subesquema aberto afim. Então temos um k-homomorfismo $h : A \to B$ e $f^{-1}x \cap V = \{y \in \operatorname{Spec} B \mid h^{-1}y = x\}$. Por outro lado, o homomorfismo $\pi : B \to \mathrm{k}\, x \otimes_A B = \mathrm{k}\, x \otimes_{\bar{A}} \bar{B} = \bar{B}[\bar{S}^{-1}]$, onde $\bar{A} := A/x$, $\bar{B} := B/\operatorname{ideal}(hx)$ e $\bar{S} := \bar{A} \setminus \bar{0}$, induz o morfismo $\operatorname{Spec} \pi : \operatorname{Spec}(\mathrm{k}\, x \otimes_A B) \to \operatorname{Spec} B$ estabelecendo uma bijeção de $\operatorname{Spec}(\mathrm{k}\, x \otimes_A B)$ com $f^{-1}x \cap V$ (verifique isto!). Tais bijeções providenciam um homeomorfismo $\operatorname{Spec} \mathrm{k}\, x \times_X Y \to f^{-1}x$, pois preservam a inclusão de ideais primos e são compatíveis com localizações dos B's ∎

5.1.25. Teorema. *Seja A uma k-álgebra. Então qualquer morfismo projetivo $f : X \to \operatorname{Spec} A$ é próprio.*

Demonstração. Pelas Observação 5.1.18 e Proposição 5.1.19, f é do tipo finito e separável. Pela Proposição 5.1.19, qualquer mergulho fechado é próprio. Pelas Proposição 5.1.16 e Definição 5.1.17, podemos supor que $X = \mathbb{P}^n_A$. Para mostrar que o morfismo $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ é universalmente fechado, basta mostrar que o morfismo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ é universalmente fechado.

Seja Y um $\mathbb{Z}$-esquema. O morfismo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} Y \to Y$ é fechado se o morfismo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} V \to V$ é fechado, onde V percorre uma cobertura aberta de Y. Deste modo, basta mostrar que o morfismo $\pi : \mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ é fechado.

Denotamos $B := A[x_0, x_1, \dots, x_n]$ e seja $I \lhd^h B$. Precisamos mostrar que $\operatorname{Spec} A \supset \pi(\mathbf{V}_+ I)$ é um conjunto fechado. Seja $p \in \operatorname{Spec} A$. Denotamos $I_p := \mathrm{k}\,p \otimes_A I \lhd^h \mathrm{k}\,p \otimes_A B = \mathrm{k}\,p[x_0, x_1, \dots, x_n] =: B_p$. Pelas Definição 5.1.23 e Observação 5.1.24 e pelo Lema 4.27.4, $p \notin \pi(\mathbf{V}_+ I)$ se e só se $B_p^{>0} \subset \sqrt{I_p}$. Sendo B_p uma $\mathrm{k}\,p$-álgebra finitamente gerada, concluímos que $p \in \pi(\mathbf{V}_+ I)$ se e só se $B_p^d \not\subset I_p$ para todo $d \geqslant 0$.

Denotamos por M^d o conjunto de todos os monômios de grau d em $x_0, x_1, \dots, x_n$ e seja $m_d := |M^d|$. Então qualquer $g \in I^d$ se expressa na forma $g = \sum\limits_{m \in M^d} a_m(g) m$, onde $a_m(g) \in A$. Interpretamos cada $g \in I^d$ como $g \in A^{m_d}$, uma $m_d \times 1$-matriz $\big[a_m(g)\big]$ (isto é, uma coluna) com coeficientes em A. Façamos $G^d := \big\{ \det[g_1 \dots g_{m_d}] \mid g_1, \dots, g_{m_d} \in I^d \big\}$ e $G := \bigcup\limits_{d \geqslant 0} G^d \subset A$.

Para completar a demonstração do teorema, é suficiente entender que $\pi(\mathbf{V}_+ I) = \mathbf{V}\, G$. A inclusão $B_p^d \subset I_p$ é equivalente à inclusão $M^d \subset I_p^d$. Por sua vez, tal inclusão é equivalente à existência de elementos $g_1, \dots, g_{m_d} \in I^d$ tais que $\det[\bar g_1 \dots \bar g_{m_d}] \neq 0$, onde $\bar g \in (\mathrm{k}\,p)^{m_d}$ denota a imagem de $g \in A^{m_d}$ com respeito ao homomorfismo $A \to \mathrm{k}\,p$. Reformulando, $p \in \pi(\mathbf{V}_+ I)$ se e só se, para todo $d \geqslant 0$ e quaisquer $g_1, \dots, g_{m_d} \in I^d$, temos $\det[g_1 \dots g_{m_d}] \in p$ ■

5.2. Esquemas e morfismos quase-compactos quase-separáveis (qcqs). Nesta subseção coletamos fatos básicos[10] sobre os mencionados esquemas e morfismos que abreviamos por *qcqs*. Convencionalmente, dizemos que um k-esquema X satisfaz uma propriedade P de morfismos se o morfismo $X \to \operatorname{Spec} k$ satisfaz P.

5.2.1. Observação. *Seja Y um k-esquema qcqs e seja P uma propriedade de subesquemas abertos quase-compactos de Y tal que*

- *P vale para todo subesquema aberto afim de Y,*
- *P vale para $U = \bigcup\limits_{i=1}^n U_i$, onde os U_i's são subesquemas abertos afins de Y, se P vale para todos $U_i \cap U_j$.*

Então P vale para todos os subesquemas abertos quase-compactos de Y.

Demonstração. Seja $Y \supset U = \bigcup\limits_{i=1}^n U_i$ um subesquema aberto quase-compacto, onde os U_i's são subesquemas abertos afins de Y.

Suponha que U é separável. Então cada $U_i \cap U_j$ é afim pelo Corolário 5.1.5. Logo, U satisfaz P.

Para U arbitrário, $U_i \cap U_j$ é um subesquema aberto quase-compacto (pois Y é quase-separável) do k-esquema afim U_i. Pelas Proposições 5.1.19 e 5.1.16, U_i e, portanto, $U_i \cap U_j$ são separáveis. Pelo caso particular considerado acima, $U_i \cap U_j$ satisfaz P. Consequentemente, U satisfaz P ■

5.2.2. Corolário. *Seja $f : Y \to X$ um morfismo qcqs entre k-esquemas e seja F um feixe quase-coerente sobre Y. Então $f_* F$ é um feixe quase-coerente sobre X.*

Demonstração. Podemos supor que X é afim. Então Y é um k-esquema qcqs.

Definimos uma propriedade P de subesquemas abertos quase-compactos U de Y : para qualquer feixe quase-coerente F sobre U, o feixe $(f|_U)_* F$ é quase-coerente sobre X. Precisamos verificar as hipóteses da Observação 5.2.1. Pelo Lema 4.21, P vale para todo subesquema aberto afim de Y.

---

[10] As informações relevantes também se encontram nas Definições 4.28.4, 4.28.8 e 5.1.6, nas Observações 4.28.5, 4.28.14, 4.27.17, 4.28.22 e 5.1.13, nos Exercícios 4.28.9, 4.28.21 e 5.1.21, nos Lemas 4.28.12, 5.1.7 e 5.1.11 e nas Proposições 5.1.9, 5.1.16 e 5.1.19.

Para qualquer subesquema aberto $W \subset Y$, há um morfismo $f_*F \to (f|_W)_*F|_W$ entre feixes sobre X natural em $F \in \mathbf{Sh}_Y$. Tal morfismo é dado pela restrição $(f_*F)V = F(f^{-1}V) \to F(W \cap f^{-1}V) = \big((f|_W)_*F|_W\big)V$, onde $X \supset V$ é um conjunto aberto arbitrário.

Seja $Y \supset U = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ um subesquema aberto quase-compacto com U_i's abertos afins tal que cada $U_i \cap U_j$ satisfaz P e seja F um feixe quase-coerente sobre U. A segunda seta da sequência

$$(\mathbf{5.2.3}) \qquad 0 \to (f|_U)_*F \to \bigoplus_i (f|_{U_i})_*F|_{U_i} \to \bigoplus_{i,j} (f|_{U_i \cap U_j})_*F|_{U_i \cap U_j}$$

é induzida pelos morfismos $(f|_U)_*F \to (f|_{U_i})_*F|_{U_i}$ mencionados acima. A terceira seta de (5.2.3) é induzida pelas diferenças dos morfismos compostos

$$\bigoplus_i (f|_{U_i})_*F|_{U_i} \xrightarrow{\pi_i} (f|_{U_i})_*F|_{U_i} \to (f|_{U_i \cap U_j})_*F|_{U_i \cap U_j},$$

$$\bigoplus_i (f|_{U_i})_*F|_{U_i} \xrightarrow{\pi_j} (f|_{U_j})_*F|_{U_j} \to (f|_{U_i \cap U_j})_*F|_{U_i \cap U_j}$$

que envolvem morfismos semelhantes. Basta observar que a sequência (5.2.3) é exata, pois o núcleo $(f|_U)_*F$ de um morfismo entre feixes quase-coerentes é um feixe quase-coerente. Com efeito, sendo F um feixe, para qualquer conjunto aberto $V \subset X$, a sequência

$$0 \to F(U \cap f^{-1}V) \to \bigoplus_i F(U_i \cap f^{-1}V) \to \bigoplus_{i,j} F(U_i \cap U_j \cap f^{-1}V),$$

é exata (vide as sequências (4.3) e (3.3)). É imediato que esta é a sequência (5.2.3) avaliada em V. Pela Observação 5.2.1 aplicada para $U := Y$, concluímos que f_*F é quase-coerente ■

5.2.4. Lema. *Seja X um k-esquema qcqs, seja G um feixe quase-coerente sobre X e seja $G|_U \geqslant F'$ um subfeixe quase-coerente localmente finitamente gerado, onde $X \supset U$ um subesquema aberto quase-compacto. Então existe um subfeixe quase-coerente localmente finitamente gerado $F \leqslant G$ tal que $F|_U = F'$.*

Demonstração. Reduzimos o problema para o caso de X afim. Sendo X quase-compacto, temos $X = U \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$, onde os V_i's são subesquemas abertos afins. Por indução sobre n, podemos estender F' para um subfeixe quase-coerente localmente finitamente gerado $F'' \leqslant G|_{U \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i}$. Em outras palavras, podemos supor que $X = U \cup V$ com V afim. Supondo que o lema vale para o k-esquema afim V e aplicando o lema para o feixe $G|_V$ e para o subfeixe $F'|_{U \cap V} \leqslant G|_{U \cap V}$, obtemos um subfeixe quase-coerente localmente finitamente gerado $F'' \leqslant G|_V$ tal que $F''|_{U \cap V} = F'|_{U \cap V}$. Agora podemos colar os subfeixes F' e F'' pelo Exercício 3.16.7.

Assim, suponha que $X = \operatorname{Spec} A$ é afim. Denotamos por $j : U \hookrightarrow X$ o mergulho aberto. Pelo Corolário 5.2.2, os feixes $j_*(G|_U) = j_*j^{-1}G$ e j_*F' são quase-coerentes sobre X. Além disto, pela Observação 3.16.5, temos o morfismo natural $\varphi := \eta^j : G \to j_*j^{-1}G$ dado por $GV \ni s \overset{\varphi}{\mapsto} s|_{U \cap V} \in G(U \cap V) = (j_*j^{-1}G)V$ para qualquer conjunto aberto $V \subset X$. Fazendo a φ-imagem inversa do subfeixe $j_*F' \leqslant j_*(G|_U)$, obtemos um subfeixe quase-coerente $G_0 := \varphi^{-1}(j_*F') \leqslant G$. Pela definição de φ, vemos que $G_0|_U = F'$. Deste modo, podemos supor que $G|_U = F'$.

Sendo U quase-compacto, $U = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, onde $X \supset U_i = \operatorname{Spec} A[a_i^{-1}]$ é um conjunto aberto principal de X para todo i. Para algum A-módulo M, temos $G = \widetilde{M}$ e $G|_{U_i} = \widetilde{M[a_i^{-1}]}$, onde $M[a_i^{-1}]$ é um

$A[a_i^{-1}]$-módulo finitamente gerado pela Observação 4.28.2. Um submódulo finitamente gerado $N \leqslant M$ que contém os numeradores dos geradores dos $M[a_i^{-1}]$'s providencia o desejado $F := \widetilde{N}$ ∎

5.2.5. Notação. Seja X um k-esquema, seja L um feixe inversível sobre X e seja $s \in \Gamma(X, L)$. Definimos mais um análogo do conjunto aberto principal $X_s := \{x \in X \mid s_x \notin m_{X,x}L_x\}$. As considerações locais mostram que $X \supset X_s$ é aberto em X. (A Notação 4.28.10 trata um caso particular desta definição com $L := \mathcal{O}_X$.) Note que $s|_{X_s}$ é um gerador livre do feixe $L|_{X_s}$. Denotamos também $L^n := \underbrace{L \otimes_{\mathcal{O}_X} \cdots \otimes_{\mathcal{O}_X} L}_{n \text{ vezes}}$ e $s^n := \underbrace{s \otimes \cdots \otimes s}_{n \text{ vezes}} \in \Gamma(X, L^n)$, onde $n > 0$. É imediato que $X_s = X_{s^n}$.

5.2.6. Observação. *Seja $f : Y \to X$ é um morfismo entre k-esquemas, seja L um feixe inversível sobre X e seja $s \in \Gamma(X, L)$ uma seção de L. Entao f^*L é um feixe inversível sobre Y e $f^{-1}X_s = Y_{f^*s}$.*

Demonstração. Pela Observação 3.16.5, $f^*s \in \Gamma(Y, f^*L)$ é nada mais do que $1 \otimes \eta^f s$, onde $\eta^f s \in \Gamma(Y, f^{-1}L)$. Sendo L localmente isomorfo a $\mathcal{O}_X$, a afirmação segue da Observação 4.28.11 ∎

5.2.7. Observação. *Seja X um k-esquema qcqs, seja F um feixe quase-coerente sobre X, seja L um feixe inversível sobre X e seja $\Gamma(X, L) \ni s$ uma seção de L. Então, para quaisquer seções $t' \in \Gamma(X_s, F)$ e $t \in \Gamma(X, F)$ tais que $t|_{X_s} = 0$, existem $n > 0$ e $u \in \Gamma(X, F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^n)$ tais que $t \otimes s^n = 0$ e $t' \otimes s^n|_{X_s} = u|_{X_s}$.*

Demonstração. Sendo X quase-compacto, o fato que $t \otimes s^n = 0$ para algum $n > 0$ se verifica considerando X afim e $L = \mathcal{O}_X$.

Seja $X = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ uma cobertura aberta afim que trivializa L. O fato que precisamos mostrar é válido para X afim e $L = \mathcal{O}_X$. Portanto, existem $u_i \in \Gamma(U_i, F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^k)$ tais que $t'|_{U_i \cap X_s} \otimes s^k|_{U_i \cap X_s} = u_i|_{U_i \cap X_s}$ para algum $k > 0$ o qual podemos escolher o mesmo para todos i. Pela primeira parte da observação aplicada aos k-esquemas quase-compactos $U_i \cap U_j$ e às seções $u_i|_{U_i \cap U_j} - u_j|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^k)$, obtemos $u_i|_{U_i \cap U_j} \otimes s^l|_{U_i \cap U_j} = u_j|_{U_i \cap U_j} \otimes s^l|_{U_i \cap U_j}$, pois podemos escolher o mesmo $l > 0$ para todos i, j. Colando as seções $u_i \otimes s^l|_{U_i}$, obtemos uma seção desejada $u \in \Gamma(X, F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^n)$, onde $n := k + l$ ∎

5.2.8. Observação. *Seja $Y \to B$ um B-esquema. Então existe uma bijeção natural entre B-morfismos $f : Y \to \mathbb{P}^n_B$ e feixes inversíveis L sobre Y munidos de seções globais $s_0, s_1, \dots, s_n \in \Gamma(Y, L)$ tais que $\bigcup_{i=0}^{n} Y_{s_i} = Y$. (Isto significa que as seções s_i's geram o feixe L.)*

Demonstração. Podemos supor que $B = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, pois $\mathbb{P}^n_B = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} B$. Denotamos $X := \operatorname{Proj} A$, onde $A := \mathbb{Z}[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Dado um morfismo $f : Y \to X$, definimos $L := f^*\mathcal{O}(1)$ e $s_i := f^*x_i \in \Gamma(X, L)$. Pela Observação 5.2.6, $\bigcup_{i=0}^{n} X_{x_i} = X$ implica $\bigcup_{i=0}^{n} Y_{s_i} = Y$.

Reciprocamente, sobre cada Y_{s_i}, temos $s_j|_{Y_{s_i}} = f_{ji} s_i|_{Y_{s_i}}$, pois $s_i|_{Y_{s_i}}$ é um gerador livre de $L|_{Y_{s_i}}$ (vide a Notação 5.2.5), onde $f_{ji} \in \Gamma(Y_{s_i}, \mathcal{O}_Y)$. Definimos um morfismo $f_i : Y_{s_i} \to X_{x_i} = \mathbf{D}_+ x_i$ pelo homomorfismo $A[x_i^{-1}]^0 = \Gamma(X_{x_i}, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(Y_{s_i}, \mathcal{O}_Y)$ que manda $x_j x_i^{-1} \mapsto f_{ji}$. É fácil ver que os morfismos f_i's são compatíveis ∎

Em seguida, denotamos por $[s_0, s_1, \dots, s_n] : X \to \mathbb{P}^n_B$ o morfismo f da Observação 5.1.28.

5.1.9. Definição. Seja A uma k-álgebra e seja $j : X \to \mathbb{P}^n_A$ um mergulho localmente fechado. Então o feixe $j^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(1)$, inversível sobre X, é dito *muito amplo sobre A*.

5.2.10. Definição. Dizemos que um feixe quase-coerente F sobre um k-esquema X é *globalmente gerado* se todas as seções globais $\Gamma(X, F)$ geram F. Um feixe L inversível sobre X é *amplo* se, para qualquer feixe quase-coerente localmente finitamente gerado F, existe $m_0 \geqslant 0$ tal que o feixe $F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^m$ é globalmente gerado para todo $m \geqslant m_0$.

5.2.11. Observação. *Seja X um k-esquema e seja L um feixe inversível sobre X. Suponha que os conjuntos X_s, onde $s \in \Gamma(X_s, L^n)$ e $n > 0$ estão variando, formam uma base de topologia em X. Então, deixando apenas os X_s afins, continuamos a ter uma base de topologia.*

Demonstração. Seja $X \supset U \ni x$ uma vizinhança aberta. Buscamos um conjunto aberto afim X_s tal que $x \in X_s \subset U$. Podemos supor que U é afim. Encontramos uma seção $s \in \Gamma(X, L^n)$ tal que $x \in X_s \subset U$. Basta mostrar que $X_s \hookrightarrow U$ é um morfismo afim. Seja $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ uma cobertura aberta afim que trivializa o feixe $L^n|_U$. Então $X_s \cap U_i$ é um aberto principal em U_i, implicando o desejado pela Proposição 4.28.13 ■

5.2.12. Teorema (J.-P. Serre)**.** *Seja A uma k-álgebra, seja X um A-esquema quase-separável do tipo finito e seja L um feixe inversível sobre X. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

- *O feixe L é amplo.*
- *Os conjuntos X_s, onde $s \in \Gamma(X_s, L^n)$ e $n > 0$ estão variando, formam uma base de topologia em X.*
- *Para algum $n > 0$, o feixe L^n é muito amplo sobre A.*
- *Para todo $n \gg 0$, o feixe L^n é muito amplo sobre A.*

Demonstração. Supondo que L é amplo, mostraremos a segunda afirmação. Seja $x \in X \setminus Y$, onde $X \supset Y$ é um conjunto fechado. Denotamos por $G \lhd \mathcal{O}_X$ o feixe quase-coerente de ideais de Y, isto é, $GU := \{g \in \mathcal{O}_X U \mid g_y \in m_{X,y}$ para todo $y \in U \cap Y\}$ para qualquer conjunto aberto $U \subset X$. Segue de $x \notin Y$ que existe $f \in \Gamma(U, G)$ tal que $f_x \notin m_{X,x}$, onde $X \supset U \ni x$ é uma vizinhança aberta afim de x. Pelo Lema 5.2.4, existe um subfeixe quase-coerente localmente finitamente gerado $F \leqslant G$ tal que $f \in \Gamma(U, F)$. Logo, $x \notin \mathbf{V}\, F \supset \mathbf{V}\, G = Y$, isto é, $F_x = \mathcal{O}_{X,x}$. O feixe $F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^m$ é globalmente gerado para algum $m > 0$. Logo, $(F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^m)_x = F_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} L^m_x = L^m_x$ implica a existência de uma seção $s \in \Gamma(X, F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^m) \leqslant \Gamma(X, \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} L^m) = \Gamma(X, L^m)$ tal que $x \in X_s$. De $Y \subset \mathbf{V}\, F$ segue $X_s \cap Y = \varnothing$.

Reciprocamente, supondo que a segunda afirmação é válida, mostraremos que L é amplo. Sendo X quase-compacto, $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_{s_i}$, onde $s_i \in \Gamma(X, L^{l_i})$ e $l_i > 0$. Trocando s_i por $s_i^{k_i}$, obtemos $s_i \in \Gamma(X, L^l)$, onde $k_i := \frac{l_1 \dots l_n}{l_i}$ e $l := l_1 \dots l_n$. Mas isto significa que L^l é globalmente gerado pelos s_i's. Basta mostrar que L^l é amplo. Realmente, seja F um feixe quase-coerente localmente finitamente gerado sobre X. Então os feixes $F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^i \otimes_{\mathcal{O}_X} L^{lk}$, $0 \leqslant i \leqslant l-1$, são globalmente gerados para todo $k \gg 0$ implicando que o feixe $F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^m$ é globalmente gerado para todo $m \gg 0$. Assim, podemos supor que L é globalmente gerado.

Seja F um feixe quase-coerente localmente finitamente gerado sobre X. Pela Observação 5.2.11, $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_{s_i}$ onde os X_{s_i}'s são afins. Podemos supor que $s_i \in \Gamma(X, L^k)$, ou seja, que k independe de i. Pela Observação 4.28.2, $F|_{X_{s_i}} = \widetilde{M_i}$, onde M_i é um $\mathcal{O}_X X_{s_i}$-módulo finitamente gerado. Pela Observação 5.2.7 aplicada aos geradores dos M_i's, o feixe $F \otimes_{\mathcal{O}_X} L^m$ é globalmente gerado para $m \gg 0$.

Supondo que a segunda afirmação é válida, mostraremos que L^n é muito amplo para algum $n > 0$. Sendo X quase-compacto e do tipo finito sobre A, pela Observação 5.2.11, encontramos uma cobertura aberta afim $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_{s_i}$ com $s_i \in \Gamma(X, L^l)$ e $X_{s_i} = \operatorname{Spec} A[g_{i1}, \dots, g_{ir}]$. Pela Observação 5.2.7, $g_{ij} \otimes s_i^k|_{X_{s_i}} = t_{ij}|_{X_{s_i}}$ para alguns $t_{ij} \in \Gamma(X, L^{kl})$ e qualquer $k \gg 0$. Pela Observação 5.2.8, as seções $s_i^k, t_{ij} \in \Gamma(X, L^{kl})$ definem um morfismo $f : X \to \mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj} B$, onde $B := A[x_i, x_{ij}]$, tal que $s_i^k = f^* x_i$ e $t_{ij} = f^* x_{ij}$, pois $X_{s_i} = X_{s_i^k}$ e $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_{s_i}$. Pela Observação 5.2.6, $X_{s_i^k} = f^{-1}(D_+ x_i)$. Para mostrar que f induz um mergulho fechado $X \to \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{D}_+\, x_i$, basta verificar que $X_{s_i} \to \mathbf{D}_+\, x_i$ é um mergulho fechado para todo i, ou seja, que o A-homomorfismo $h_i : B[x_i^{-1}]^0 \to A[g_{i1}, \dots, g_{ir}]$ é sobrejetor. Isto segue de $h_i : \frac{x_{ij}}{x_i} \mapsto g_{ij}$.

Reciprocamente, dado um mergulho localmente fechado $j : X \to \mathbb{P}_A^m = \operatorname{Proj} B$ com $L^n = j^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^m}(1)$ e $B := A[x_0, x_1, \dots, x_m]$, tomemos $x \in X \setminus Y$, onde $Y = \mathbf{V}_+ E$, $E \subset^h B^{>0}$, é um conjunto fechado. Então, para algum $e \in^h E$, temos $Y \subset \mathbf{V}_+ e \not\ni x$, isto é, $x \in X_s \subset X \setminus Y$ para a seção $s := j^*e \in \Gamma(X, L^{nd})$, onde $d := \deg e$. Portanto, a segunda afirmação é válida.

Resta mostrar que as primeira e terceira afirmações implicam a última. Suponha que o feixe L^n é muito amplo sobre A e que L é amplo. Então existe $m_0 > 0$ tal que o feixe L^m é globalmente gerado para todo $m \geqslant m_0$. Sendo X quase-compacto, o feixe L^m é gerado por um número finito de seções globais. Pelo Lema 5.2.13, o feixe L^{n+m} é muito amplo para todo $m \geqslant m_0$ ■

5.2.13. Lema. *Seja A uma k-álgebra, seja X um A-esquema e sejam L e M feixes inversíveis sobre X tais que L é muito amplo sobre A e M é gerado por um número finito de seções globais. Então o feixe inversível $L \otimes_{\mathcal{O}_X} M$ é muito amplo sobre A.*

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{P}_A^m = \operatorname{Proj} A[x_0, x_1, \dots, x_m]$ um mergulho localmente fechado tal que $L = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^m}(1)$. Então, pela demonstração da Observação 5.2.8, $f = [s_0, s_1, \dots, s_m]$, onde $s_i := f^*x_i$. Sejam $t_0, t_1, \dots, t_n \in \Gamma(X, M)$ geradores de M. Então $X = \bigcup_{j=1}^{n} X_{t_j}$ e, pela Observação 5.2.8, temos um A-morfismo $g := [t_0, t_1, \dots, t_n] : X \to \mathbb{P}_A^n = \operatorname{Proj} A[y_0, y_1, \dots, y_n]$, onde $t_j = g^*y_j$. Obviamente, as seções $u_{ij} := s_i \otimes t_j \in \Gamma(X, L \otimes_{\mathcal{O}_X} M)$ geram o feixe inversível $L \otimes_{\mathcal{O}_X} M$, logo, definem um morfismo $h : X \to \mathbb{P}_A^p = \operatorname{Proj} A[z_{ij}]$ tal que $L \otimes_{\mathcal{O}_X} M = h^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^p}(1)$, onde $p + 1 = (m+1)(n+1)$, $0 \leqslant i \leqslant m$ e $0 \leqslant j \leqslant n$. Basta mostrar que h é um mergulho localmente fechado.

Denotamos $B := A[x_0, x_1, \dots, x_m]$, $C := A[y_0, y_1, \dots, y_n]$ e $D := A[z_{ij}]$. A regra $\varphi : z_{ij} \mapsto x_i \otimes y_j$ define um A-homomorfismo $\varphi : D \to B \otimes_A C$ que induz A-homomorfismos $D[z_{ij}^{-1}] \to B[x_i^{-1}] \otimes_A C[y_j^{-1}]$ e $\varphi_{ij} : D[z_{ij}^{-1}]^0 \to B[x_i^{-1}]^0 \otimes_A C[y_j^{-1}]^0$, sendo φ_{ij} sobrejetor. Assim, temos mergulhos fechados $s_{ij} : \mathbf{D}_+ x_i \times_{\operatorname{Spec} A} \mathbf{D}_+ y_j \to \mathbf{D}_+ z_{ij}$. É fácil ver que os morfismos s_{ij} são compatíveis. Colando os morfismos s_{ij}, obtemos um morfismo $s : \mathbb{P}_A^m \times_{\operatorname{Spec} A} \mathbb{P}_A^n \to \mathbb{P}_A^p$. Verificando que $s^{-1}(\mathbf{D}_+ z_{ij}) = \mathbf{D}_+ x_i \times_{\operatorname{Spec} A} \mathbf{D}_+ y_j$, deduzimos que s é um mergulho fechado, chamado *mergulho de Segre*.

Denotamos por $q : X \to \mathbb{P}_A^m \times_{\operatorname{Spec} A} \mathbb{P}_A^n$ o morfismo determinado pelos morfismos f e g. Sejam $0 \leqslant i \leqslant m$ e $0 \leqslant j \leqslant n$. Então $s_{i'}|_{X_{s_i}} = f_{i'i} s_i|_{X_{s_i}}$ com $f_{i'i} \in \Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_X)$ e $t_{j'}|_{X_{t_j}} = g_{j'j} t_j|_{X_{t_j}}$ com $g_{j'j} \in \Gamma(X_{t_j}, \mathcal{O}_X)$. Os morfismos $X_{s_i} \to \mathbf{D}_+ x_i$ e $X_{t_j} \to \mathbf{D}_+ y_j$, induzidos respectivamente por f e g, correspondem aos A-homomorfismos $B[x_i^{-1}]^0 \to \Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_X)$, $\frac{x_{i'}}{x_i} \mapsto f_{i'i}$, e $C[y_j^{-1}]^0 \to \Gamma(X_{t_j}, \mathcal{O}_X)$, $\frac{y_{j'}}{y_j} \mapsto g_{j'j}$. Portanto, o morfismo $X_{s_i} \cap X_{t_j} = X_{u_{ij}} \to \mathbf{D}_+ x_i \times_{\operatorname{Spec} A} \mathbf{D}_+ y_j$ induzido por q corresponde ao A-homomorfismo $B[x_i^{-1}]^0 \otimes_A C[y_j^{-1}]^0 \to \Gamma(X_{u_{ij}}, \mathcal{O}_X)$, $\frac{x_{i'}}{x_i} \otimes \frac{y_{j'}}{y_j} \mapsto f_{i'i} g_{j'j}$. É fácil ver agora que este último, sendo composto com φ_{ij}, corresponde ao morfismo $X_{u_{ij}} \to \mathbf{D}_+ z_{ij}$ induzido por h. Deste modo, entendemos que $sq = h$.

Pelo Lema 5.1.4 aplicado para os mergulhos localmente fechados, q é um mergulho localmente fechado, pois $\pi q = f$ é um mergulho localmente fechado, onde $\pi : \mathbb{P}_A^m \times_{\operatorname{Spec} A} \mathbb{P}_A^n \to \mathbb{P}_A^m$ ■

5.2.14. Observação. *Seja X um k-esquema quase-compacto e seja F um feixe quase-coerente sobre X. Se F é localmente finitamente gerado e globalmente gerado, então, para algum $j > 0$, há um epimorfismo $\mathcal{O}_X^{\oplus j} \to F$.*

Demonstração. Para cada $x \in X$, a fibra F_x é um $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo finitamente gerado. Logo, existem seções $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(X, F)$ tais que os germes $s_{1,x}, \dots, s_{n,x}$ geram o $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo F_x. Pela Observação 3.19.2, existe uma vizinhança aberta $x \in U_x \subset X$ tal que o feixe $F|_{U_x}$ é gerado por $s_1|_{U_x}, \dots, s_n|_{U_x}$. Sendo X quase-compacto, existe uma cobertura finita de X por tais U_x ■

5.3. Feixes localmente livres e o grupo de Picard. Seja X um k-esquema e sejam F, F' feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X. Definindo $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F,F')U := \mathbf{QCoh}_U(F|_U, F'|_U)$, onde $X \subset U$ percorre todos os conjuntos abertos em X, obtemos um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre X. Tal feixe não é sempre quase-coerente mesmo se F e F' são quase-coerentes, pois a localização (com respeito a um elemento) em geral não comuta com o funtor $U \mapsto \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X U}(FU, F'U)$ para U's afins. Mas, se F é um feixe localmente livre de posto finito e F' é quase-coerente, é fácil verificar que o feixe $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F,F')$ é quase-coerente (essencialmente, devido a $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,F') = F'$). Definimos o *feixe dual* $F^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F,\mathcal{O}_X)$.

Observamos que $L\otimes_{\mathcal{O}_X} L^\vee = \mathcal{O}_X$ para qualquer feixe inversível sobre X. Realmente, seja $b \in \Gamma(U,L)$ um gerador livre de $L|_U$, onde $X \supset U$ é um conjunto aberto que trivializa L. Então obtemos o *gerador livre dual* $b^\vee$ de $L^\vee|_U$ dado por $b^\vee : b \mapsto 1$. Seja f um elemento inversível da k-álgebra $\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$. Então $(fb)^\vee = f^{-1}b^\vee$. Isto significa que o gerador livre $b\otimes b^\vee$ de $(L\otimes_{\mathcal{O}_X} L^\vee)|_U$ independe da escolha de b. Logo, tais seções $b\otimes b^\vee$ se colam e providenciam um gerador livre global de $L\otimes_{\mathcal{O}_X} L^\vee$.

O fato que acabamos de observar explica o termo "feixe inversível": as classes de isomorfismo de feixes inversíveis sobre X com a operação induzida pelo produto tensorial formam um grupo denotado por $\operatorname{Pic} X$ e chamado *grupo de Picard.* Em seguida, denotamos $L^{-n} := (L^\vee)^n$, onde $n \geqslant 0$ e L é um feixe inversível.

Para feixes localmente livres de posto finito, vários funtores, tais como $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}$, $\otimes_{\mathcal{O}_X}$, $^\vee$, $\bigwedge^d_{\mathcal{O}_X}$, $\operatorname{Sym}^d_{\mathcal{O}_X}$, f^*, onde $f : Y \to X$ é um morfismo entre k-esquemas, produzem feixes localmente livres de posto finito. Em particular, Pic é um funtor contravariante. Além disto, é fácil ver que, para qualquer feixe F localmente livre de posto finito, o funtor $F\otimes_{\mathcal{O}_X}$ é exato.

5.4. Cohomologias de Čech. O funtor $\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X} \ni F \mapsto \Gamma(X,F) \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X X}$ é conhecidamente exato à esquerda para qualquer espaço anelado $(X,\mathcal{O}_X)$. Seria certo definir as cohomologias como funtores derivados à direita do funtor Γ, isto é, $\mathrm{H}^n(X,F) := \mathrm{R}^n\,\Gamma F$. Para a existência destes funtores basta saber que há suficientes objetos injetivos na categoria $\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X}$. Tal fato é bastante fácil para demonstrar. Planejando entretanto usar as cohomologias principalmente para k-esquemas e com frequência para feixes quase-coerentes, enfrentamos a necessidade de calculá-las em casos concretos. Isto justifica a abordagem chamada o *método de Čech* e adotada nesta subseção. Posteriormente, apresentamos uma demonstração relativamente simples que as cohomologias definidas como funtores derivados coincidem com as cohomologias de Čech.

5.4.1. Propriedades básicas. As *cohomologias* $\mathrm{H}^n(X,F)$, $n \geqslant 0$, de um k-esquema separável quase-compacto X com *coeficientes em feixes quase-coerentes* $F \in \mathbf{QCoh}_X$ satisfazem as seguintes propriedades.

a. Para todo $n \geqslant 0$, o funtor $\mathrm{H}^n : \mathbf{QCoh}_X \to \mathbf{Mod}_k$ é aditivo, $\mathrm{H}^0(X,F) = \Gamma(X,F)$ e, para qualquer sequência exata $E : 0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$ em $\mathbf{QCoh}_X$, há uma sequência exata

$$0 \to \mathrm{H}^0(X,F_1) \to \mathrm{H}^0(X,F_2) \to \mathrm{H}^0(X,F_3) \xrightarrow{\delta_E^0} \mathrm{H}^1(X,F_1) \to \mathrm{H}^1(X,F_2) \to \mathrm{H}^1(X,F_3) \xrightarrow{\delta_E^1} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{n-1}} \mathrm{H}^n(X,F_1) \to \mathrm{H}^n(X,F_2) \to \mathrm{H}^n(X,F_3) \xrightarrow{\delta_E^n} \dots$$

funtorial em E. Em outras palavras, $\mathrm{H}^\bullet(X,-)$ é um δ-funtor.

b. Seja $f : Y \to X$ um morfismo afim entre k-esquemas separáveis quase-compactos. Então os δ-funtores $\mathrm{H}^\bullet(X, f_*-)$ e $\mathrm{H}^\bullet(Y,-)$ são isomorfos.

c. $\mathrm{H}^n(X,F) = 0$ para todo $n \geqslant m$ e qualquer $F \in \mathbf{QCoh}_X$ se X admite uma cobertura por m subesquemas abertos afins.

d. $\mathrm{H}^n\big(X, \bigoplus_{i\in I} F_i\big) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{H}^n(X,F_i)$ para qualquer família $F_i \in \mathbf{QCoh}_X$, $i \in I$, de feixes quase-coerentes sobre X.

e. Para todo $m \geqslant 0$, $\mathrm{H}^n\big(\mathbb{P}^m_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_k}(i)\big)$ é um k-módulo livre

- de posto $\binom{m+i}{i}$ se $n=0$ e $i\geqslant 0$,
- de posto $\binom{m+j}{j}$ se $n=m$ e $j:=-i-m-1\geqslant 0$,
- de posto 0 em todos os casos restantes.

5.4.2. Corolário. *Seja X um esquema projetivo sobre um anel noetheriano k e seja F um feixe quase-coerente localmente finitamente gerado. Então $\mathrm{H}^n(X,F)$ é um k-módulo finitamente gerado para todo $n\geqslant 0$ e $\mathrm{H}^n\big(X,F(i)\big)=0$ para todos $i\gg 0$ e $n>0$.*

Demonstração. Pela propriedade 5.4.1.b aplicada a um mergulho fechado $f:X\to\mathbb{P}^m_k$, podemos supor que $X=\mathbb{P}^m_k$, pois f_*F é localmente finitamente gerado. Pelo Teorema 5.2.12, o feixe $F(l)$ é globalmente gerado para algum $l>0$. Pela Observação 5.2.14, obtemos uma sequência exata $0\to H\to\mathcal{O}_X^{\oplus j}(-l)\to F\to 0$, onde $j>0$ e H é um feixe quase-coerente. Sendo k noetheriano e sendo os feixes $G:=\mathcal{O}_X^{\oplus j}(-l)$ e F localmente finitamente gerados, o feixe H é localmente finitamente gerado. Pela propriedade 5.4.1.e, $\mathrm{H}^n(X,G)=0$ para $n\neq 0,m$. Pela propriedade 5.4.1.c, $\mathrm{H}^n(X,H)=\mathrm{H}^n(X,F)=0$ para $n>m$. Portanto, a sequência longa da propriedade 5.4.1.a providencia um epimorfismo $\mathrm{H}^m(X,G)\to\mathrm{H}^m(X,F)$, isomorfismos $\mathrm{H}^{n-1}(X,F)\to\mathrm{H}^n(X,H)$ para todo $1<n<m$ e a sequência exata $\mathrm{H}^0(X,G)\to\mathrm{H}^0(X,F)\to\mathrm{H}^1(X,H)\to 0$, onde os k-módulos $\mathrm{H}^m(X,G)$ e $\mathrm{H}^0(X,G)$ são finitamente gerados pela propriedade 5.4.1.e. Logo, $\mathrm{H}^m(X,F)$ é um k-módulo finitamente gerado para qualquer feixe F quase-coerente localmente finitamente gerado. Em particular, $\mathrm{H}^m(X,H)$ é um k-módulo finitamente gerado, implicando que $\mathrm{H}^{m-1}(X,F)$ é um k-módulo finitamente gerado e assim por diante. Finalmente concluímos que $\mathrm{H}^0(X,F)$ é um k-módulo finitamente gerado.

Usando as sequências exatas $0\to H(i)\to G(i)\to F(i)\to 0$ e raciocínios semelhantes, vemos que $\mathrm{H}^n\big(X,F(i)\big)=0$ para todos $n\geqslant m$ e $i\gg 0$, pois $\mathrm{H}^m\big(X,G(i)\big)=0$ pela propriedade 5.4.1.e para todo $i\gg 0$. Consequentemente, $\mathrm{H}^m\big(X,H(i)\big)=0$ para todo $i\gg 0$, ou seja, $\mathrm{H}^{m-1}\big(X,F(i)\big)=0$ e assim por diante ■

5.4.3. Definição. Seja X um k-esquema separável quase-compacto, seja $\mathcal{U}:=\{U_i\mid i\in I\}$ uma cobertura aberta finita de X, $X=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$, e seja F um feixe quase-coerente sobre X. O conjunto I de índices é considerado como linearmente ordenado. Neste sentido, uma outra ordem em I produz uma cobertura diferente. Para qualquer $J\subset I$, denotamos $U_J:=\bigcap\limits_{j\in J}U_j$. Para qualquer $k\geqslant 0$, façamos $C^k(\mathcal{U},F):=\bigoplus\limits_{|J|=k+1}FU_J$ e definamos um k-homomorfismo $d^k:C^k(\mathcal{U},F)\to C^{k+1}(\mathcal{U},F)$ induzido pelos homomorfismos $d_{KJ}:FU_J\to FU_K$, onde $d_{KJ}:=(-1)^{|j|-1}|_{U_K}$ se $K=J\cup j$ e j é um elemento $|j|$-ésimo em K e $d_{KJ}:=0$ se $J\not\subset K$. É fácil verificar que, para $K=J\cup\{j_1,j_2\}$, $J_1:=J\cup j_1$ e $J_2:=J\cup j_2$, onde $|J|=k$ e $|K|=k+2$, temos $d_{KJ_1}d_{J_1J}+d_{KJ_2}d_{J_2J}=0$. Isto implica que $d^{k+1}d^k=0$, ou seja, que $C^\bullet(\mathcal{U},F)$ é um complexo chamado *complexo de Čech relativo à cobertura $\mathcal{U}$*. Na verdade, já conhecemos uma parte deste complexo: a sequência exata $0\to FX\to C^0(\mathcal{U},F)\to C^1(\mathcal{U},F)$ foi de fato considerada em (4.3). Deste modo, $\mathrm{H}^0\,C^\bullet(\mathcal{U},F)=\Gamma(X,F)$. Denotamos por $C^\bullet_+(\mathcal{U},F)$ o *complexo estendido* (pelo termo de grau -1) $0\to FX\to C^\bullet(\mathcal{U},F)$. É imediato que $C^\bullet(\mathcal{U},F)$ e $C^\bullet_+(\mathcal{U},F)$ são funtores em F. Ainda mais, se $0\to F_1\to F_2\to F_3\to 0$ é uma sequência exata de feixes quase-coerentes sobre X e a cobertura $\mathcal{U}$ é afim, então a sequência de complexos $0\to C^\bullet(\mathcal{U},F_1)\to C^\bullet(\mathcal{U},F_2)\to C^\bullet(\mathcal{U},F)\to 0$ é exata, pois, sendo X separável, cada U_J é afim e, portanto, as sequências $0\to F_1U_J\to F_2U_J\to F_3U_J\to 0$ são exatas. Definindo as cohomologias com coberturas finitas afins, já obtemos as propriedades 5.4.1.a e 5.4.1.c, pois $C^n(\mathcal{U},F)=0$ para todo $n\geqslant|I|$. Precisamos mostrar que tal definição independe da escolha de cobertura finita afim $\mathcal{U}$.

5.4.4. Observação. *Seja $\mathcal{U}:=\{U_i\mid i\in I\}$ uma cobertura aberta de X, onde $I=\{1,2,\dots,n\}$, e sejam $j,j+1\in I$ índices consecutivos. Trocando a ordem de j e $j+1$, obtemos um novo conjunto* *de índices I' e uma nova cobertura $\mathcal{U}'$ de X. A regra $FU_J \xrightarrow{\varepsilon J} FU_J$, onde $\varepsilon J = -1$ se $\{j, j+1\} \subset J$ e $\varepsilon J = 1$ caso contrário, define um isomorfismo $\varphi : C^\bullet(\mathcal{U}, F) \to C^\bullet(\mathcal{U}', F)$ entre complexos* ∎

Para qualquer complexo $(C^\bullet, d^\bullet_{C^\bullet})$ o complexo *shiftado* $\big(C^\bullet[n], d^\bullet_{C^\bullet[n]}\big)$ é definido por $\big(C^\bullet[n]\big)^k := C^{n+k}$ e $d^k_{C^\bullet[n]} := (-1)^n d^{n+k}_{C^\bullet}$.

5.4.5. Observação. *Seja $\mathcal{U} := \{U_i \mid i \in I\}$ uma cobertura aberta finita de X e seja $X \supset U$ um conjunto aberto. Adicionando U à cobertura $\mathcal{U}$ com o menor índice 0, obtemos uma nova cobertura aberta $\mathcal{U}'$ de X. Denotamos por $U \cap \mathcal{U} := \{U \cap U_i \mid i \in I\}$ a correspondente cobertura aberta de U com a mesma ordem em I. Então $0 \to C^\bullet_+(U \cap \mathcal{U}, F)[-1] \to C^\bullet(\mathcal{U}', F) \to C^\bullet(\mathcal{U}, F) \to 0$ é uma sequência exata de complexos. Se $U = X$, então o complexo $C^\bullet_+(\mathcal{U}', F)$ é acíclico, isto é, $\mathrm{H}^\bullet C^\bullet_+(\mathcal{U}', F) = 0$.*

Demonstração. Em grau k, temos $0 \to \bigoplus\limits_{\substack{|J|=k+1\\ 0\in J}} FU_J \to \bigoplus\limits_{|J|=k+1} FU_J \to \bigoplus\limits_{\substack{|J|=k+1\\ 0\notin J}} FU_J \to 0$. É imediato que as setas indicadas formam morfismos entre complexos. É claro que a sequência de complexos estendidos $0 \to C^\bullet_+(U \cap \mathcal{U}, F)[-1] \to C^\bullet_+(\mathcal{U}', F) \to C^\bullet_+(\mathcal{U}, F) \to 0$ também é exata.

Suponha que $U = X$. A sequência $0 \to C^\bullet_+(\mathcal{U}, F)[-1] \to C^\bullet_+(\mathcal{U}', F) \to C^\bullet_+(\mathcal{U}, F) \to 0$ é exata. É fácil verificar que o homomorfismo induzido $\mathrm{H}^k\, C^\bullet_+(\mathcal{U}, F) \to \mathrm{H}^{k+1}\, C^\bullet_+(\mathcal{U}, F)[-1]$ é idêntico para todo $k \in \mathbb{Z}$ ∎

5.4.6. Observação. *Seja $X = \operatorname{Spec} A$ um k-esquema afim, seja $a \in A$, seja $\mathcal{U} := \{U_i \mid i \in I\}$ uma cobertura aberta finita afim de X e seja F um feixe quase-coerente sobre X. Então há um isomorfismo $C^\bullet_+(\mathcal{U}, F)[a^{-1}] \to C^\bullet_+(\mathbf{D}\, a \cap \mathcal{U}, F)$ natural em F.*

Demonstração. Já que cada U_J é afim, basta lembrar que, para subesquemas abertos afins $U \subset X$, temos isomorfismos naturais $(FU)[a^{-1}] \to F(\mathbf{D}\, a \cap U)$ compatíveis com restrições ∎

5.4.7. Observação. *Seja $X = \operatorname{Spec} A$ um k-esquema afim, seja $\mathcal{U} := \{U_i \mid i \in I\}$ uma cobertura aberta finita afim de X e seja F um feixe quase-coerente sobre X. Então o complexo $C^\bullet_+(\mathcal{U}, F)$ é acíclico.*

Demonstração. Escolhemos uma cobertura finita $X = \bigcup\limits_{j\in J} \mathbf{D}\, a_j$, $a_j \in A$, por conjuntos abertos principais tal que cada $\mathbf{D}\, a_j$ está contido em um U_i.

Seja $h \in \mathrm{H}^n\, C^\bullet_+(\mathcal{U}, F)$. Basta mostrar que $h = 0$ em $\mathrm{H}^n\, C^\bullet_+(\mathcal{U}, F)[a_j^{-1}]$ para cada $j \in J$, pois isto implica $a_j^{n_j} h = 0$ para alguns $n_j > 0$ e $X = \bigcup\limits_{j\in J} \mathbf{D}\, a_j = \bigcup\limits_{j\in J} \mathbf{D}\, a_j^{n_j}$ significa que $1 \in \sum\limits_{j\in J} A a_j^{n_j}$. A localização comuta com cohomologias, pois é um funtor exato. Pela Observação 5.4.6, $C^\bullet_+(\mathcal{U}, F)[a_j^{-1}] = C^\bullet_+(\mathbf{D}\, a_j \cap \mathcal{U}, F)$. Um membro da cobertura aberta $\mathbf{D}\, a_j \cap \mathcal{U}$ do subesquema $\mathbf{D}\, a_j$ coincide com $\mathbf{D}\, a_j$. Pelas Observações 5.4.4 e 5.4.5, o complexo $C^\bullet_+(\mathbf{D}\, a_j \cap \mathcal{U}, F)$ é acíclico ∎

5.4.8. Proposição. *Seja X um k-esquema separável quase-compacto e seja F um feixe quase-coerente sobre X. Então $\mathrm{H}^\bullet(X, F) := \mathrm{H}^\bullet C^\bullet(\mathcal{U}, F)$ independe da escolha de uma cobertura aberta finita afim $\mathcal{U}$ de X e tais cohomologias satisfazem as propriedades* 5.4.1.

Demonstração. Adicionando um conjunto aberto afim $U \subset X$ a uma cobertura aberta finita afim $\mathcal{U}$ de X, obtemos uma cobertura aberta finita afim $\mathcal{U}'$ e a sequência $0 \to C^\bullet_+(U \cap \mathcal{U}, F)[-1] \to C^\bullet(\mathcal{U}', F) \to C^\bullet(\mathcal{U}, F) \to 0$ é exata pelas Observações 5.4.5 e 5.4.4. Pela Observação 5.4.7, o complexo $C^\bullet_+(U \cap \mathcal{U}, F)$ é acíclico, pois $U \cap \mathcal{U}$ é uma cobertura finita aberta afim do k-esquema afim U. Portanto, $\mathrm{H}^\bullet C^\bullet(\mathcal{U}', F) = \mathrm{H}^\bullet C^\bullet(\mathcal{U}, F)$. Isto possibilita modificar coberturas.

As propriedades 5.4.1.a e 5.4.1.c foram observadas na Definição 5.4.2. A propriedade 5.4.1.b é tautológica, pois a imagem inversa de uma cobertura afim é afim e os complexos de Čech para o cálculo de $\mathrm{H}^\bullet(X, f_*G)$ e de $\mathrm{H}^\bullet(Y, G)$ coincidem literalmente. A propriedade 5.4.1.d é imediata.

Mostraremos a propriedade 5.4.1.e. Seja $A := k[x_0, x_1, \dots, x_m]$ e seja $\mathcal{U} := \{\mathbf{D}_+ x_j \mid 0 \leqslant j \leqslant m\}$. Consideramos o feixe quase-coerente $\mathbb{Z}$-graduado $F := \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_k}(i)$. Inicialmente calculamos $\mathrm{H}^n(\mathcal{U}, F)$ e depois passamos para as partes homogêneas de grau i. É fácil entender que o complexo de Čech relativo a $\mathcal{U}$ tem a forma $C^k(\mathcal{U}, F) = \bigoplus\limits_{|S|=k+1} A[S^{-1}]$, onde $S \subset \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$, e as componentes de d^k são monomorfismos de localização munidos de sinal $+1, -1, 0$, como explicado na Definição 5.4.3. Portanto, $\mathrm{H}^0(\mathcal{U}, F)$ é formado por todas as coleções $a_j \in A[x_j^{-1}]$, $0 \leqslant j \leqslant m$, tais que $a_{j_1} = a_{j_2}$ para todos j_1, j_2, considerando os elementos dentro de $A[S^{-1}]$ com $|S| = m+1$. Deste modo, $\mathrm{H}^0(\mathcal{U}, F) = A$ e $\binom{m+i}{i}$ é conhecidamente o número de monômios de grau $i \geqslant 0$ com potências não-negativas dos $x_0, x_1, \dots, x_m$. O k-módulo $C^m(U, F) = A[S^{-1}]$, $|S| = m+1$, é livremente gerado por todos os monômios com potências inteiras dos $x_0, x_1, \dots, x_m$ e o k-módulo $d^{m-1}C^{m-1}(U, F)$ é livremente gerado por todos os monômios com pelo menos uma potência não-negativa. Logo, $\mathrm{H}^m(\mathcal{U}, F)$ é livremente gerado por todos os monômios em $x_0, x_1, \dots, x_m$ com todas as potências negativas. O número de tais monômios de grau i (necessariamente $i \leqslant -m-1$) se calcula por $\binom{m+j}{j}$, onde $j := -i-m-1$.

Para a parte restante, consideramos o k-esquema $Y := \operatorname{Spec} A \backslash \mathbf{V} A^{>0}$. Temos um óbvio morfismo afim $f : Y \to \mathbb{P}^m_k$ induzido localmente pelas inclusões $A[x_j^{-1}] \supset A[x_j^{-1}]^0$ de k-álgebras, isto é, $f^{-1}(\mathbf{D}_+ x_j) = \mathbf{D}\, x_j$. A cobertura aberta finita afim $\mathcal{U}' := \{\mathbf{D}\, x_j \mid 0 \leqslant j \leqslant m\}$ produz o mesmo complexo de Čech: $C^\bullet(\mathcal{U}', \mathcal{O}_Y) = C^\bullet(\mathcal{U}, F)$. Pelas Observações 5.4.6 e 5.4.7, $\mathrm{H}^n\, C^\bullet(\mathcal{U}', \mathcal{O}_Y)[x_m^{-1}] = 0$ para todo $n > 0$. Em outras palavras, para todo $h \in \mathrm{H}^n(Y, \mathcal{O}_Y)$, existe $r > 0$ tal que $x_m^r h = 0$.

A multiplicação por x_m induz a sequência exata $0 \to A \xrightarrow{x_m} A \to B \to 0$ de A-módulos, onde $B := k[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}]$. Logo, obtemos a sequência exata $0 \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{x_m} \mathcal{O}_Y \to j_*\mathcal{O}_Z \to 0$ de feixes quase-coerentes sobre Y, onde $j : Z \hookrightarrow Y$ é o subesquema fechado dado pela "equação" $x_m = 0$. Basta mostrar que $\mathrm{H}^n(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{x_m} \mathrm{H}^n(Y, \mathcal{O}_Y)$ é um isomorfismo para todo $0 < n < m$.

Por indução sobre m, temos $\mathrm{H}^n(Y, j_*\mathcal{O}_Z) = \mathrm{H}^n(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ para todo $0 < n < m-1$. Assim obtemos os isomorfismos $\mathrm{H}^n(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{x_m} \mathrm{H}^n(Y, \mathcal{O}_Y)$ para todo $1 < n < m-1$ e as sequências exatas

$$0 \to \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{x_m} \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y) \to \mathrm{H}^0(Y, j_*\mathcal{O}_Z) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{x_m} \mathrm{H}^1(Y, \mathcal{O}_Y) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{H}^{m-1}(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{x_m} \mathrm{H}^{m-1}(Y, \mathcal{O}_Y) \to \mathrm{H}^{m-1}(Y, j_*\mathcal{O}_Z) \xrightarrow{\delta^{m-1}} \mathrm{H}^m(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{x_m} \mathrm{H}^m(Y, \mathcal{O}_Y) \to 0.$$

Já sabemos que a sequência $0 \to \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{x_m} \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y) \to \mathrm{H}^0(Y, j_*\mathcal{O}_Z) \to 0$ é exata, pois $\binom{m+i}{i} = \binom{m-1+i}{i} + \binom{m+i-1}{i-1}$. Logo, $\delta^0 = 0$. Não é difícil verificar no nível de monômios que o homomorfismo δ^{m-1} é a multiplicação por x_m^{-1}. Pelo cálculo semelhante, a sequência $0 \to \mathrm{H}^{m-1}(Y, j_*\mathcal{O}_Z) \xrightarrow{\delta^{m-1}} \mathrm{H}^m(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{x_m} \mathrm{H}^m(Y, \mathcal{O}_Y) \to 0$ é exata ■