INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA

1. Teoremas de preparação e de divisão de Weierstraß

1.1. Lema. *Sejam $\mathbb{C} \supset U \supset \gamma$ um conjunto aberto e um caminho simples fechado (parametrizado no sentido anti-horário) contrátil em U e seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $fp \neq 0$ para todo $p \in \gamma$. Então $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'z}{fz} z^k \,\mathrm{d}\, z = q_1^k + \cdots + q_m^k$, onde $q_1, \ldots, q_m$ são todos os zeros da função f na região limitada por γ, listados com multiplicidade.*

Denotamos por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,p}$ a $\mathbb{C}$-álgebra de germes em $p \in \mathbb{C}^n$ de funções analíticas e seja $\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Denotamos também $\mathbb{R}^n_{>0} := \big\{(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n \mid r_1, \ldots, r_n > 0\big\}$. Para $r \in \mathbb{R}^n_{>0}$ e $c := (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$, denotamos por $\Delta(c, r) := \big\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z - c| < r\big\}$ o *polidisco centrado* em c de *poliraio* r, onde $|z - c| < r$ significa que $|z_i - c_i| < r_i$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$.

1.2. Observação. *Seja $0 \neq f \in \mathcal{O}_n$. Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que a série $f(tz) = \sum_{i=m}^{\infty} f_i(z)t^i$ converge para todos $t \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}^n$ suficiente pequenos, onde $f_i(z)$ é um polinômio homogêneo de grau i em $z = (z_1, \ldots, z_n)$ e $f_m \not\equiv 0$. Em particular, existe um conjunto de mudanças $\mathbb{C}$-lineares de coordenadas em $\mathbb{C}^n$, aberto e denso por Zariski, após as quais $f_m(0, \ldots, 0, 1) \neq 0$* ■

O número $m \in \mathbb{N}$ na Observação 1.2 é a *ordem* de f em 0.

1.3. Definição. Um polinômio mônico $p(u, z_n) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ é dito um *polinômio de Weierstraß* em z_n se $p(0, z_n) = z_n^m$ para algum $m \in \mathbb{N}$.

1.4. Teorema (Weierstraß)**.** *Seja f uma função analítica definida em uma vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{f(0,z_n)}{z_n^m} \neq 0$. Então existem um germe inversível $\alpha \in \mathcal{O}_n$ e um polinômio de Weierstraß $p(u, z_n) = z_n^m + c_1(u)z_n^{m-1} + \cdots + c_m(u) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ tais que $f(u, z_n) = \alpha(u, z_n)p(u, z_n)$. Tais α e p são únicos. Além disto, $c_i(u) = O|u|^i$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m$ se m é a ordem de f em 0.*

Para qualquer $g \in \mathcal{O}_n$, existem únicos $q \in \mathcal{O}_n$ e $r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]_{<m}$ tais que $g = pq + r$.

Suponha que os coeficientes de $p(u, z_n)$ são analíticos em uma vizinhança de $\overline{\Delta}(0, r)$, que, para cada $u \in \overline{\Delta}(0, r)$, o polinômio $p(u, z_n)$ não possui raízes com $|z_n| \geqslant r_n - \varepsilon$ e que a função g é limitada sobre o polidisco $\Delta := \Delta(0, r) \times \Delta(0, r_n)$, onde $r \in \mathbb{R}^{n-1}_{>0}$ e $r_n > \varepsilon > 0$. Então as funções q e r são holomorfas sobre Δ e existe uma constante $c > 0$ que independe de g tal que $\sup_\Delta |q|, \sup_\Delta |r| \leqslant c \cdot \sup_\Delta |g|$.

Demonstração. Caso $s = 0$, não há nada para demonstrar. Suponha $s > 0$.

Sendo os zeros de $f(0, z_n)$ isolados, encontramos um número $r_n > 0$ tal que $f(0, 0) = 0$ e $f(0, z_n) \neq 0$ para todo z_n com $0 < |z_n| \leqslant r_n$. Sendo f contínua e $\big\{z_n \in \mathbb{C} \mid |z_n| = r_n\big\}$ um compacto, existem um poliraio $r \in \mathbb{R}^{n-1}_{>0}$ e um número $0 < \varepsilon < r_n$ tais que $f(u, z_n) \neq 0$ para todos $u \in \Delta(0, r)$ e $r_n - \varepsilon \leqslant |z_n| \leqslant r_n + \varepsilon$.

A função

$$p_k u := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_n+\delta} \Big(\frac{\partial f(u, z_n)}{\partial z_n} \Big/ f(u, z_n)\Big) z_n^k \,\mathrm{d}\, z_n$$

é analítica em $u \in \Delta(0, r)$ e independe de δ para $-\varepsilon < \delta < \varepsilon$. Em particular, pelo Lema 1.1, o número de zeros de $f(u, z_n)$ no disco $\Delta(0, r_n + \delta)$ para $\Delta(0, r) \ni u$ fixo é igual a m (contando com multiplicidade), pois $p_0 0 = m$ uma vez que $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{f(0,z_n)}{z_n^m} \neq 0$ e $\Delta(0, r)$ é conexo. Denotando tais zeros por $q_1 u, \ldots, q_m u$, vemos que $p_k u = \sum_{i=1}^{m}(q_i u)^k$ pelo Lema 1.1. Assim, obtemos um polinômio $p(u,z_n) := \prod_{i=1}^{m}(z_n - q_i u) = z_n^m + c_1(u)z_n^{m-1} + \cdots + c_m(u) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ cujos coeficientes são analíticos em $u \in \Delta(0,r)$, pois são polinômios nos $p_k u$'s pelo teorema conhecido sobre polinômios simétricos. De $q_1 0 = \cdots = q_m 0 = 0$ segue que $p(u,z_n)$ é um polinômio de Weierstraß.

Para qualquer $\Delta(0,r) \ni u$ fixo, a função $\alpha(u,z_n) := \frac{f(u,z_n)}{p(u,z_n)}$ é analítica em $z_n \in \Delta(0,r_n+\delta)$ e nunca nula. Por outro lado, $\alpha(u,z_n)$ é analítica na região dada por $u \in \Delta(0,r)$ e $r_n - \varepsilon < |z_n| < r_n + \varepsilon$, pois f e, portanto, p, não possuem zeros nesta região. Pela fórmula de Cauchy, temos $\alpha(u,z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_n+\delta} \frac{\alpha(u,z)}{z-z_n}\,\mathrm{d}\,z$ para qualquer $(u,z_n) \in \Delta := \Delta(0,r)\times\Delta(0,r_n)$, onde $0<\delta<\varepsilon$. Daí concluímos que α é analítica e inversível sobre Δ.

A unicidade segue da rigidez de funções analíticas: um polinômio de Weierstraß $p(u,z_n)$ é univocamente determinado por suas raízes em $\Delta(0,r_n)$, onde u percorre $\Delta(0,r)$, tomando r e r_n arbitrariamente pequenos. As cotas $c_i(u) = O|u|^i$ são imediatas.

Para a unicidade na segunda parte do teorema, basta observar que, caso $p(u,z_n)q(u,z_n) = r(u,z_n) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]_{<m}$, para cada u fixo, as raízes de $p(u,z_n)$ são raízes de $r(u,z_n)$, contando com multiplicidade.

Para a existência, podemos supor que os coeficientes de $p(u,z_n)$ são analíticos em uma vizinhança de $\overline{\Delta}(0,r)$, que, para cada $u \in \overline{\Delta}(0,r)$, o polinômio $p(u,z_n)$ não possui raízes com $|z_n| \geqslant r_n - \varepsilon$ e que a função g é limitada sobre o polidisco $\Delta := \Delta(0,r)\times\Delta(0,r_n)$, onde $r \in \mathbb{R}^{n-1}_{>0}$ e $r_n > \varepsilon > 0$.

Façamos

$$q(u,z_n) := \lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_n-\delta}\frac{g(u,z)}{p(u,z)(z-z_n)}\,\mathrm{d}\,z$$

para qualquer $(u,z_n) \in \Delta := \Delta(0,r)\times\Delta(0,r_n)$. (Note que o limite se atinge se $\delta < r_n - |z_n|$.) É imediato que q é analítica sobre Δ. Logo, a função $r := g - pq$ é analítica sobre Δ. Pela fórmula de Cauchy,

$$r(u,z_n) = \lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_n-\delta}\Big(\frac{p(u,z)}{z-z_n} - \frac{p(u,z_n)}{z-z_n}\Big)\frac{g(u,z)}{p(u,z)}\,\mathrm{d}\,z$$

para qualquer $(u,z_n) \in \Delta$. Observando que $\frac{p(u,z)}{z-z_n} - \frac{p(u,z_n)}{z-z_n}$ é um polinômio em z, z_n de grau $< m$ com coeficientes holomorfos em $u \in \Delta(0,r)$, obtemos a existência desejada.

Pelo princípio do máximo, $m := \inf_{\substack{u\in\Delta(0,r)\\ |z|=r_n}}\big|p(u,z)\big| = \inf_{\substack{|u|=r\\ |z|=r_n}}\big|p(u,z)\big| > 0$. Portanto, $\sup_\Delta |r| \leqslant c_0 m^{-1}\sup_\Delta |g|$ para uma constante $c_0 > 0$. Aplicando este princípio para $q = \frac{g-r}{p}$, obtemos $|q| \leqslant m^{-1}\big(\sup_\Delta |g| + \sup_\Delta |r|\big)$ ∎

2. Álgebra de $\mathcal{O}_n$

2.1. Corolário. *$\mathcal{O}_n$ é noetheriano.*

Demonstração. Seja $0 \neq p \in I \lhd \mathcal{O}_n$. Pela Observação 1.2 e pelo Teorema 1.4, podemos supor que p é um polinômio de Weierstraß em z_n. Pela divisão no Teorema 1.4, $\mathcal{O}_n/\mathcal{O}_n p$ é um $\mathcal{O}_{n-1}$-módulo finitamente gerado. Resta proceder por indução sobre n ∎

2.2. Observação. *Sejam $0 \neq f_1,\ldots,f_k \in \mathcal{O}_n$. Então existe um conjunto de mudanças $\mathbb{C}$-lineares de coordenadas em $\mathbb{C}^n$, aberto e denso por Zariski, que providenciam as decomposições $f_i = \alpha_i p_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, onde $\alpha_i \in \mathcal{O}_n$ são inversíveis e $p_i \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ são polinômios de Weiersttraß em z_n.*

Demonstração. Fazendo $f_i(tz) = \sum_{j=m_i}^{\infty} f_{i,j}(z)t^j$ com $f_{i,m_i}(z) \not\equiv 0$ como na Observação 1.2, basta mandar um ponto $p \in \mathbb{C}^n$ satisfazendo $fp \neq 0$ para $p \mapsto (0,\ldots,0,1)$, onde $f := \prod_{i=1}^{k} f_{i,m_i}$ ∎

2.3. Observação. *Seja $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ um polinômio e seja $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ um polinômio de Weierstraß. Se $f = ph$ com $h \in \mathcal{O}_n$, então $h \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.*

Demonstração. O polinômio p é mônico. Portanto, $f = pq+r$, onde $q, r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ e $\deg r < \deg p$. Por outro lado, $f = ph$. Pela unicidade da divisão no Teorema 1.4, $h = q$ e $r = 0$ ∎

2.4. Observação. *Seja $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ um polinômio de Weierstraß. Então p é irredutível em $\mathcal{O}_n$ se e só se p é irredutível $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.*

Demonstração. Se $p = p_1p_2$ com $p_1, p_2 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, então $p(0, z_n) = z_n^m$ implica que, a menos de multiplicação por uma constante não-nula, temos $p_i(0, z_n) = z_n^{m_i}$ com $m_1 + m_2 = m$. Reciprocamente, seja $p = f_1f_2$ uma decomposição não-trivial em $\mathcal{O}_n$. Então $p(0, z_n) = z_n^m$ implica que $f_i(0, z_n) = s_i(z_n)z_n^{m_i}$ com $m_1 + m_2 = m$, onde $s_1(z_n)s_2(z_n) = 1$ e $m_i > 0$. Pelo Teorema 1.4, $f_i = \alpha_i p_i$, onde p_i é um polinômio de Weierstraß de grau m_i em z_n e α_i é inversível em $\mathcal{O}_n$. Pela Observação 2.3, p_i divide p em $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ ∎

2.5. Corolário. *$\mathcal{O}_n$ é fatorial.*

Demonstração. Sendo $\mathcal{O}_n$ noetheriano, basta mostrar a implicação

- p divide fg em $\mathcal{O}_n$ implica que p divide f em $\mathcal{O}_n$ ou p divide g em $\mathcal{O}_n$

para $f, g, p \in \mathcal{O}_n$ com p irredutível em $\mathcal{O}_n$. Pela Observação 2.2, podemos supor que f, g, p são polinômios de Weierstraß. Pela Observação 2.3, p divide fg em $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ e, pela Observação 2.4, p é irredutível em $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Por indução sobre n e pelo teorema de Gauß, $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ é fatorial ∎

2.6. Observação. *Seja $f(z_n) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ um polinômio mônico. Então existem um polinômio mônico $\alpha(z_n) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ e um polinômio de Weierstraß $p(z_n) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ em z_n tais que $\alpha(0)$ é inversível em $\mathcal{O}_{n-1}$ e $f(z_n) = \alpha(z_n)p(z_n)$.*

Demonstração. Para algum $m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{f(0,z_n)}{z_n^m} \neq 0$. Pelo Teorema 1.4, encontramos um polinômio de Weierstraß $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ em z_n e um elemento inversível $\alpha \in \mathcal{O}_n$ tais que $f = \alpha p$. Por outro lado, sendo p mônico podemos dividir f por p com resto: $f = pq + r$, onde $q, r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ e $\deg r < \deg p$. Pela unicidade da divisão no Teorema 1.4, $\alpha = q$ e $r = 0$ ∎

Sejam $v_0, \ldots, v_m, w_0, \ldots, w_n, x$ variáveis. Consideramos polinômios

$$f(x) := v_0x^m + v_1x^{m-1} + \cdots + v_m, \qquad g(x) := w_0x^n + w_1x^{n-1} + \cdots + w_n.$$

As linhas da matriz

$$M := \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & \ldots & v_m & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & v_0 & \ldots & v_{m-1} & v_m & 0 & \ldots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & v_0 & v_1 & \ldots & v_m \\ w_0 & w_1 & w_2 & \ldots & w_n & 0 & \ldots \\ 0 & w_0 & w_1 & w_2 & \ldots & w_n & \ldots \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots \\ 0 & \ldots & 0 & w_0 & \ldots & w_{n-1} & w_n \end{bmatrix}$$

podem ser lidas como os polinômios $x^{n-1}f(x), x^{n-2}f(x), \ldots, f(x), x^{m-1}g(x), x^{m-2}g(x), \ldots, g(x)$. Seja $L := [\, c_0\ c_1\ \ldots\ c_{n-1}\ d_0\ d_1\ \ldots\ d_{m-1} \,]$ a última linha da matriz adjunta $\operatorname{adj} M$. Então a igualdade $LM = [\, 0\ \ldots\ 0\ \det M \,]$ se lê como

$$g_0(x)f(x) + f_0(x)g(x) = r(f, g), \tag{2.7}$$

onde $g_0(x) := c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \cdots + c_{n-1}$, $f_0(x) := d_0x^{m-1} + d_2x^{m-2} + \cdots + d_{m-1}$ e $r(f, g) := \det M$. Note que $r(f, g)$, chamado de *resultante* dos polinômios f e g, é um polinômio bihomogêneo de bigrau (n, m) em coeficientes (v, w) dos polinômios.

Sejam $v_0, q_1, \ldots, q_m, w_0, r_1, \ldots, r_n$ variáveis. Para $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, fazemos $v_i := v_0 s_i(q)$ e $w_j := w_0 s_j(r)$, isto é, $f(x) = v_0 \prod_{i=1}^{m}(x - q_i)$ e $g(x) = w_0 \prod_{j=1}^{n}(x - r_j)$. Sabendo que $s_1(q), \ldots, s_m(q), s_1(r), \ldots, s_n(r)$ são algebricamente independentes, concluímos que $v_0, v_1, \ldots, v_m, w_0, w_1, \ldots, w_n$ são algebricamente independentes.

2.8. Teorema. $r(f, g) = v_0^n w_0^m \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} (q_i - r_j)$.

Demonstração. O fato que $v_0^n w_0^m$ divide $r(f, g)$ é imediato.
Substituindo $r_j := q_i$, deduzimos de (2.7) que $r(f, g)|_{r_j := q_i} = 0$, ou seja, que $q_i - r_j$ divide $r(f, g)$. Concluímos que a parte direita da igualdade no teorema, denotada por p, divide $r(f, g)$.

Note que $p = v_0^n \prod_{i=1}^{m} g(q_i) = (-1)^{mn} w_0^m \prod_{j=1}^{n} f(r_j)$. Portanto, em termos das variáveis independentes (v, w), o polinômio p é homogêneo de grau m em w e é homogêneo de grau n em v. Logo, $r(f, g) = qp$ com $q \in \mathbb{Q}$. O coeficiente do monômio $v_0^n w_n^m$ em $r(f, g)$, tal como em p, é 1 ∎

2.9. Corolário. *Seja D um domínio fatorial e sejam $f, g \in D[x]$ polinômios mônicos. Então f e g são coprimos em $D[x]$ se e só se $r(f, g) \neq 0$.*

Demonstração. Se $r(f, g) \neq 0$, então, pela fórmula (2.7), os polinômios f e g não possuem uma raiz comum no fecho algébrico $\overline{K}$ do corpo de frações $K := \mathrm{K}\, D$ de D e, portanto, são coprimos em $D[x]$. Se $r(f, g) = 0$, então, pelo Teorema 2.8, $f(r) = g(r) = 0$ para algum $r \in \overline{K}$. Denotamos por $p \in K[x]$ o polinômio minimal de r sobre K. Existe um polinômio $p_0 \in D[x]$ com o conteúdo (= o maior divisor comum dos coeficientes) igual a 1 tal que $p = kp_0$ com $k \in K$. Sabemos que p_0 divide f e g em $K[x]$, isto é, $df = f_0 p_0$ e $dg = g_0 p_0$ para alguns $f_0, g_0 \in D[x]$ e $0 \neq d \in D$. Pelo lema de Gauß, ambos os conteúdos de f_0 e de g_0 são iguais a d. Em outras palavras, p_0 divide f e g em $D[x]$ ∎

2.10. Corolário. *Sejam f e g funções analíticas definidas em uma vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{C}^n$. Suponha que os germes f_0 e g_0 são coprimos em $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Então os germes f_p e g_p são coprimos em $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,p}$, onde p percorre uma vizinhança aberta de 0.*

Demonstração. Podemos supor que f e g são polinômios de Weierstraß em z_n, $f, g \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.
∎

3. Teorema de Oka

3.1. Teorema (Oka)**.** *Seja M uma variedade analítica. Então o feixe $\mathcal{O}_M$ de funções analíticas sobre M é coerente.*

Demonstração. ∎

Dizemos que um subespaço $S \subset T$ em um espaço topológico T é *relativamente compacto* se o fecho $\overline{S}$ é compacto.

3.2. Teorema (propriedade noetheriana forte). *Seja M uma variedade analítica, seja F um feixe coerente sobre M, sejam $F_m \leqslant F_{m+1} \leqslant F$, $m \in \mathbb{N}$, subfeixes coerentes e seja $M \supset U$ um conjunto aberto relativamente compacto. Então existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_m|_U = F_{m+1}|_U$ para todos $m \geqslant m_0$.*

Demonstração. Escolhendo uma cobertura aberta de $\overline{U}$ por polidiscos relativamente compactos em M, podemos supor que U e M são polidiscos em $\mathbb{C}^n$ centrados na origem, $\overline{U} \subset M \subset \mathbb{C}^n$, e que temos um epimorfismo $\pi : \mathcal{O}_M^{k+1} \to F$. Considerando $\mathcal{O}_M^{k+1}$ no lugar de F e $\pi^{-1} F_m$ no lugar de F_m, podemos supor que $F = \mathcal{O}_M^{k+1}$. Usando as sequências exatas $0 \to \mathcal{O}_M^k \to \mathcal{O}_M^{k+1} \to \mathcal{O}_M \to 0$, reduzimos o problema para o caso $F = \mathcal{O}_M$.

Podemos também supor que $F_0 M \ni p(z_n)$, um polinômio de Weierstraß em z_n cujos coeficiente são definidos,

■

4. Espaços analíticos

4.1. Definição. Seja M uma variedade analítica. Um subconjunto fechado $A \subset M$ é um *conjunto analítico* em M se, para todo $p \in A$, existem uma vizinhança aberta $p \in U \subset M$ e funções analíticas $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_M U$ tais que $A \cap U = \{q \in U \mid f_1 q = \cdots = f_m q = 0\}$. As funções $f_1, \dots, f_m$ são *equações locais* de A sobre U.

É fácil ver que uniões e interseções finitas de conjuntos analíticos são conjuntos analíticos. Seja $M \supset U$ um conjunto aberto e seja $M \supset A$ um conjunto analítico em M. É imediato que $A \cap U$ é um conjunto analítico em U.

Em seguida, vamos precisar do seguinte fato.

4.2. Observação. *Seja M uma variedade analítica conexa e seja $M \supsetneq A$ um conjunto analítico próprio. Então $M \setminus A$ é conexo e denso em M. Qualquer função analítica $f \in \mathcal{O}_M(M \setminus A)$ limitada em cada $U \setminus A$, onde U percorre uma cobertura aberta de A, se estende univocamente a uma função $\hat{f} \in \mathcal{O}_M M$.*

4.3. Definição. Seja M uma variedade analítica e seja $M \ni p$ um ponto. Dados conjuntos $A, A' \ni p$ analíticos em algumas vizinhanças abertas de p, introduzimos uma relação de equivalência: $A \sim_p A'$ se e só se existe uma vizinhaça aberta $p \in U \subset M$ de p tal que $A \cap U = A' \cap U$. As classes desta equivalência são ditas *germes analíticos* em p e são denotados por (A, p), onde A é um *representante* da classe.

Uniões e interseções finitas no nível de representantes definem corretamente uniões e interseções finitas de germes analíticos em p. De modo semelhante, podemos tratar a inclusão de germes analíticos em p.

4.4. Definição. Dizemos que um germe analítico (A, p) é *irredutível* se $(A, p) = (A_1, p) \cup (A_2, p)$ implica $(A, p) = (A_1, p)$ ou $(A, p) = (A_2, p)$.

4.5. Definição. Seja (A, p) um germe analítico em p. Denotamos por

$$\mathbf{I}(A, p) := \big\{ f \in \mathcal{O}_{M,p} \mid f(A \cap U) = 0 \text{ para alguma vizinhança aberta } p \in U \subset M \big\}$$

o *ideal do germe*, $\mathbf{I}(A, p) \lhd \mathcal{O}_{M,p}$.

Seja $\mathcal{O}_{M,p} \rhd I$ um ideal. Pelo Corolário 2.1, I admite um número finito de geradores $g_1, \dots, g_m \in I$ e os g_i's possuem representantes $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{O}_M U$, onde $M \supset U \ni p$ é uma vizinhança aberta de p em M. Definindo $A := \{q \in U \mid g_1 q = \cdots = g_m q = 0\}$, obtemos um conjunto analítico em U. É fácil verificar que o germe analítico $\mathbf{V}\, I := (A, p)$ independe da escolha de geradores g_i's e da escolha de U.

4.6. Observação. *Sejam (A, p) e (A', p) germes analíticos em p e sejam $\mathcal{O}_{M,p} \rhd I, I'$ ideais. Então $(A, p) \supset (A', p)$ implica $\mathbf{I}(A, p) \subset \mathbf{I}(A', p)$ e $I \subset I'$ implica $\mathbf{V}\, I \supset \mathbf{V}\, I'$. Além disto, $I \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}\, I)$ e $\mathbf{V}\big(\mathbf{I}(A, p)\big) = (A, p)$.*

Demonstração. A inclusão $\mathbf{V}\big(\mathbf{I}(A, p)\big) \supset (A, p)$ é óbvia. Por outro lado, se (A, p) é dado por equações locais $f_1, \dots f_m \in \mathcal{O}_{M,p}$, então $f_1, \dots f_m \in \mathbf{I}(A, p)$, implicando $\mathbf{V}\big(\mathbf{I}(A, p)\big) \subset (A, p)$. As afirmações restantes são óbvias ■

4.7. Observação. *Um germe analítico (A, p) é irredutível se e só se o ideal $\mathbf{I}(A, p)$ é primo em $\mathcal{O}_{M,p}$.*

Demonstração. Se $f_1 f_2 \in \mathbf{I}(A, p)$, então $(A, p) = (A_1, p) \cup (A_2, p)$, onde $(A_i, p) := \mathbf{V}\big(\mathbf{I}(A, p) + \mathcal{O}_{M,p} f_i\big)$. Caso (A, p) seja irredutível, $(A, p) = (A_i, p)$ implica $f_i \in \mathbf{I}(A, p)$. Reciprocamente, se $(A, p) =$

$(A_1,p)\cup(A_2,p)$ com $(A,p)\neq(A_i,p)$, então existem germes de funções $f_i\subset\mathcal{O}_{M,p}\setminus\mathbf{I}(A,p)$, $i=1,2$, tais que $f_iA_i=0$. Portanto, $f_1f_2\in\mathbf{I}(A,p)$ e $\mathbf{I}(A,p)$ não é primo ■

4.8. Observação. *Sejam $(A_m,p)\supset(A_{m+1},p)$, $m\in\mathbb{N}$, germes analíticos em p. Então existe $m_0\in\mathbb{N}$ tal que $(A_m,p)=(A_{m+1},p)$ para todo $m\geqslant m_0$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.1 e pela Observação 4.6, podemos supor que $\mathbf{I}(A_m,p)=\mathbf{I}(A_{m+1},p)$ para todo $m\in\mathbb{N}$. Pela Observação 4.6, $(A_m,p)=(A_{m+1},p)$ ■

4.9. Observação. *Cada germe analítico (A,p) em p admite uma única decomposição na união finita de subgermes analíticos irredutíveis maximais, chamados* componentes irredutíveis *de (A,p).*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que (A,p) se decompõe na união finita de subgermes irredutíveis. Senão, (A,p) é redutível e $(A,p)=(A_1,p)\cup(B_1,p)$, onde um dos subgermes, digamos, (B_1,p), não admite uma decomposição na união finita de subgermes irredutíveis. Logo, (B_1,p) é redutível, $(B_1,p)=(A_2,p)\cup(B_2,p)$ e assim por diante. Obtemos $(B_m,p)\supsetneq(B_{m+1},p)$ para todo $m\in\mathbb{N}$, contradizendo a Observação 4.8.

Tendo uma decomposição $(A,p)=(A_1,p)\cup\dots\cup(A_m,p)$ na união de germes irredutíveis, podemos supor que $(A_i,p)\not\subset(A_j,p)$ para todos $i\neq j$.

Note que $(B,p)\subset(B_1,p)\cup(B_2,p)$ implica $(B,p)\subset(B_1,p)$ ou $(B,p)\subset(B_2,p)$ se o germe analítico (B,p) é irredutível. Portanto, qualquer subgerme irredutível de (A,p) está contido em um dos (A_i,p)'s. Em particular, os (A_i,p)'s formam uma lista completa de subgermes irredutíveis maximais ■

4.10. Estrutura de germes analíticos. Seja $(A,0):=\mathbf{V}\,I$ um germe analítico na origem $0\in\mathbb{C}^n$, onde $I\lhd\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}=\mathcal{O}_n$.

4.10.1. Observação. *Existe um número $0\leqslant d\leqslant n$ e um conjunto de mudanças $\mathbb{C}$-lineares de coordenadas em $\mathbb{C}^n$, aberto e denso por Zariski, após as quais $I\cap\mathcal{O}_d=0$ e, para cada $d+1\leqslant i\leqslant n$, existe $p_i=z_i^{m_i}+c_{i,1}z_i^{m_i-1}+\dots+c_{i,m_i}\in I\cap\mathcal{O}_{i-1}[z_i]$, um polinômio de Weierstraß em z_i, tal que $c_{i,j}=O|z|^j$.*

Demonstração. Se $I=0$, não há nada para fazer além de indicar $d:=n$. Caso contrário, escolhemos $0\neq p_n\in I$ de ordem $m_n>0$ em 0. Pela Observação 1.2 e pelo Teorema 1.4, após uma mudança $\mathbb{C}$-linear de coordenadas em $\mathbb{C}^n$, podemos supor que p_n é um polinômio de Weierstraß em z_n, $p_n=z_n^{m_n}+c_{n,1}z_n^{m_n-1}+\dots+c_{n,m_n}\in I\cap\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, com $c_{n,j}=O|z|^j$. Resta considerar $I\cap\mathcal{O}_{n-1}\lhd\mathcal{O}_{n-1}$ e proceder por indução sobre n ■

Em seguida, atuamos na situação após a mudança de coordenadas descrita na Observação 4.10.1. Denotamos $u:=(z_1,\dots,z_d)$ e $w:=(z_{d+1},\dots,z_n)$.

4.10.2. Observação. *Se $r^m+c_1r^{m-1}+\dots+c_m=0$ com $c_1,\dots,c_m,r\in\mathbb{C}$, então $|r|\leqslant 2\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|c_j|^{\frac{1}{j}}$.*

Demonstração. Caso contrário, temos $|r|^j>2^j|c_j|$ para todos j, isto é, $\frac{|c_j|}{|r|^j}<2^{-j}$. Segue de $-1=\frac{c_1}{r}+\frac{c_2}{r^2}+\dots+\frac{c_m}{r^m}$ que $1=|\frac{c_1}{r}+\frac{c_2}{r^2}+\dots+\frac{c_m}{r^m}|\leqslant|\frac{c_1}{r}|+|\frac{c_2}{r^2}|+\dots+|\frac{c_m}{r^m}|\leqslant 2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-m}<1$ ■

4.10.3. Lema. *Existem $r_0\in\mathbb{R}^d_{>0}$, $s_0\in\mathbb{R}^{n-d}_{>0}$ e uma constante $c>0$ tais que A é dado por equações locais em $\Delta(0,r_0)\times\Delta(0,s_0)$, $A\subset\big\{(u,w)\in\Delta(0,r_0)\times\Delta(0,s_0)\mid c|u|\geqslant|w|\big\}$ e a projeção $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^d$, $(u,w)\mapsto u$, induz uma função própria $A\cap\big(\Delta(0,r)\times\Delta(0,s)\big)\xrightarrow{\pi}\Delta(0,r)$ para quaisquer $r_0\geqslant r\in\mathbb{R}^d_{>0}$ e $s_0\geqslant s\in\mathbb{R}^{n-d}_{>0}$ sujeitos à desigualdade $cr\leqslant s$.*

Demonstração. Pelas Observações 4.10.1 e 4.10.2, existem constantes $c_{d+1},\dots,c_n>0$ tais que, para todo $d+1\leqslant i\leqslant n$ e qualquer $(z_1,\dots,z_n)\in A$, valem as desigualdades $|z_i|\leqslant c_i\big(|z_1|+\dots+|z_{i-1}|\big)$. Isto implica a existência de uma constante $c>0$ tal que $A\subset\big\{(u,w)\in\Delta(0,r_0)\times\Delta(0,s_0)\mid c|u|\geqslant|w|\big\}$.

Para mostrar que π é própria, basta verificar que $\pi^{-1}\overline{\Delta}(0,r')$ é um compacto para qualquer $r > r' \in \mathbb{R}^d_{>0}$. Se $(u,w) \in A$ e $|u| \leqslant r' < r$, então $|w| \leqslant c|u| \leqslant cr' < cr \leqslant s$. Em outras palavras, $\pi^{-1}\overline{\Delta}(0,r') = A \cap \big(\overline{\Delta}(0,r') \times \overline{\Delta}(0,cr')\big) \subset \Delta(0,r) \times \Delta(0,s)$ ■

4.10.4. Corolário. *A extensão $\mathcal{O}_d \hookrightarrow \mathcal{O}_n/I$ é inteira e gerada por $\overline{z}_{d+1},\dots,\overline{z}_n$.*

Demonstração. Utilizando apenas a Observação 4.10.1, por indução sobre n, concluímos que a extensão $\mathcal{O}_d \hookrightarrow \mathcal{O}_{n-1}/(I \cap \mathcal{O}_{n-1})$ é inteira e gerada por $\overline{z}_{d+1},\dots,\overline{z}_{n-1}$. Pela divisão no Teorema 1.4, $\mathcal{O}_n/\mathcal{O}_n p_n$ é uma $\mathcal{O}_{n-1}$-álgebra gerada pelo elemento $\overline{z}_n$ inteiro sobre $\mathcal{O}_{n-1}$ ■

Assumimos agora que I é primo. Denotamos por $K := \mathrm{K}\,\mathcal{O}_d$ o corpo de frações de $\mathcal{O}_d$ e por $F := \mathrm{K}(\mathcal{O}_n/I)$, o corpo de frações de $\mathcal{O}_n/I$.

Vamos precisar do seguinte fato.

4.10.5. Lema (sobre elemento primitivo). *Seja $K \subset F = K[g_1,\dots,g_m]$ uma extensão algébrica separável de corpos e seja $K \supset k$ um subcorpo infinito. Então, para alguns $c_1,\dots,c_m \in k$, temos $F = K[g]$, onde $g := \sum_{i=1}^{m} c_i g_i$, e existe um conjunto aberto e denso por Zariski de tais $(c_1,\dots,c_m)$.*

Aplicando o Lema 4.10.5 para $k := \mathbb{C}$ e fazendo uma mudança de coordenadas, podemos supor que $F = K[\overline{z}_{d+1}]$.

4.10.6. Observação. *Seja D um domínio fatorial e seja $\overline{K} \ni r$ um elemento inteiro sobre D, onde $\overline{K}$ denota o fecho algébrico do corpo de frações $K := \mathrm{K}\,D$ de D. Então o polinômio minimal $p(x)$ de r sobre K pertence a $D[x]$.*

Demonstração. Seja $f(x) \in D[x]$ um polinômio mônico tal que $f(r) = 0$. Claramente, $p(x)$ divide $f(x)$ em $K[x]$. Portanto, todas as raízes de $p(x)$ em $\overline{K}$ são inteiras sobre D, implicando que os coeficientes de $p(x)$ são inteiros sobre D. Resta observar que, em K, apenas os elementos de D são inteiros sobre D. Com efeito, se $(\frac{a}{d})^m + c_1(\frac{a}{d})^{m-1} + \dots + c_m = 0$, onde $a, d, c_1, \dots, c_m \in D$ com a e d coprimos em D, então $a^m + c_1 a^{m-1} d + \dots + c_m d^m = 0$ e qualquer divisor irredutível de d deve dividir a. Logo, d é inversível em D e $\frac{a}{d} \in D$ ■

4.10.7. Observação. *Seja $f \in \mathcal{O}_n$. Então o polinômio minimal $p(x) \in K[x]$ de $\overline{f} \in \mathcal{O}_n/I$ sobre K é um polinômio de Weierstraß em x, $p(x) \in \mathcal{O}_d[x]$.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.10.4, $\overline{f}$ é inteiro sobre $\mathcal{O}_d$. Pelos Corolário 2.5 e Observação 4.10.6, $p(x) \in \mathcal{O}_d[x]$. Pela Observação 2.6, $p(x) = \alpha(x)q(x)$, onde $\alpha(x) \in \mathcal{O}_d[x]$ é um polinômio mônico tal que $\alpha(0)$ é inversível em $\mathcal{O}_d$ e $q(x) \in \mathcal{O}_d[x]$ é um polinômio de Weierstraß em x. Já que $p(x)$ é irredutível em $K[x]$, concluímos que $\alpha(x) = 1$ ■

Denotamos por $p(x) \in \mathcal{O}_d[x]$ o polinômio minimal de $\overline{z}_{d+1} \in \mathcal{O}_n/I$ sobre K. Sejam $r_1,\dots,r_m$ todas as raízes de $p(x)$ no fecho algébrico $\overline{K}$ de K. O discriminante $\delta := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (r_j - r_i)^2 \in \mathcal{O}_d$ de $p(x)$ não é nulo, pois $p(x)$ é irredutível sobre o corpo K de característica 0. Note que as regras $\sigma_j : \overline{z}_{d+1} \mapsto r_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, definem todos os K-homomorfismos de $F := K[\overline{z}_{d+1}]$ para $\overline{K}$.

4.10.8. Lema. *Se $f \in F = K[\overline{z}_{d+1}]$ é inteiro sobre $\mathcal{O}_d$, então $\delta f \in \mathcal{O}_d[\overline{z}_{d+1}]$.*

Demonstração. Para alguns $x_i \in K$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, temos $f = \sum_{i=0}^{m-1} x_i \overline{z}_{d+1}^i$. Daí, $\sigma_j f = \sum_{i=0}^{m-1} x_i r_j^i$. A matriz

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_m \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{m-1} & r_2^{m-1} & \dots & r_m^{m-1} \end{bmatrix}$$

tem determinante $\det M = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}(r_j - r_i)$. Realmente, considerando os r_j's como variáveis, vemos que $\det M$ tem grau $\frac{(m-1)m}{2}$ nos r_j's e é divisível por $r_j - r_i$ para quaisquer $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Ambos os lados da igualdade $\det M = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m}(r_j - r_i)$ contém o monômio $r_2 r_3^2 \dots r_m^{m-1}$ com coeficiente 1.

Levando em conta que $\delta = (\det M)^2$ e que $\det M$, os coeficientes da matriz adjunta $\operatorname{adj} M$ e os $\sigma_j f$ são inteiros sobre $\mathcal{O}_d$. De $\left[\begin{smallmatrix} x_0 & \dots & x_{m-1}\end{smallmatrix}\right]\det M = \left[\begin{smallmatrix} \sigma_1 f & \dots & \sigma_m f\end{smallmatrix}\right]\operatorname{adj} M$, deduzimos que $x_i\delta$ é inteiro sobre $\mathcal{O}_d$, implicando que $x_i\delta \in \mathcal{O}_d$ ■

Para cada $d+2 \leqslant i \leqslant n$, denotamos por $p(x), q_i(x) \in \mathcal{O}_d[x]$ os polinômios minimais de $\overline{z}_{d+1}$ e de $\overline{z}_i$ sobre K (vide a Observação 4.10.7). Seja $m := \deg p(x)$. Pelo Lema 4.10.8, para cada $d+2 \leqslant i \leqslant n$, existe um único polinômio $g_i(x) \in \mathcal{O}_d[x]_{<m}$ tal que $\delta z_i - g_i(z_{d+1}) \in I$. Para $d+1 \leqslant k \leqslant n$, denotamos por $J_k \lhd \mathcal{O}_k$ o ideal gerado por $p(z_{d+1})$ e por $\delta z_i - g_i(z_{d+1})$, $d+2 \leqslant i \leqslant k$. Obviamente, $J_{k-1} \subset J_k$.

4.10.9. Lema. *Para todo $d+1 \leqslant k \leqslant n$, temos $\delta^{mk}\mathcal{O}_k \subset J_k + \mathcal{O}_d[z_{d+1}]_{<m}$.*

Demonstração. Pela Observação 4.10.7, $p(z_{d+1}) \in \mathcal{O}_d[z_{d+1}]$ é um polinômio de Weierstraß em z_{d+1}. A afirmação é válida para $k = d+1$ pela divisão no Teorema 1.4. Procedemos por indução sobre k.

Seja $f \in \mathcal{O}_k$. Pela Observação 4.10.7, $q_k(z_k) \in \mathcal{O}_d[z_k] \subset \mathcal{O}_{k-1}[z_k]$ é um polinômio de Weierstraß em z_k. Pela divisão no Teorema 1.4, existem $q \in \mathcal{O}_k$ e $r(z_k) \in \mathcal{O}_{k-1}[z_k]_{\leqslant m}$ tais que $f = q_k(z_k)q + r(z_k)$, pois $\deg q_k(x) \leqslant m$. Por indução sobre k e por $p(z_{d+1}), \delta z_k - g_k(z_{d+1}) \in J_k$, obtemos $\delta^{m(k-1)}\delta^m r(z_k) \in J_k + \mathcal{O}_d[z_{d+1}]_{<m}$. Resta demonstrar que $\delta^{mk}q_k(z_k) \in J_k$.

Basta observar que $\delta^m q_k\big(\delta^{-1}g_k(z_{d+1})\big) \in J_{d+1}$ levando em conta que $\deg q_k(x) \leqslant m$. Sendo $p(x)$ o polinômio minimal de $\overline{z}_{d+1}$ sobre K, deduzimos das igualdades $\overline{z}_k = \delta^{-1}g_k(\overline{z}_{d+1})$ e $q_k(\overline{z}_k) = 0$, válidas em F, que $p(x)$ divide $q_k\big(\delta^{-1}g_k(x)\big)$ em $K[x]$. Portanto, $p(x)$ divide $\delta^m q_k\big(\delta^{-1}g_k(x)\big) \in \mathcal{O}_d[x]$ em $\mathcal{O}_d[x]$ ■

4.10.10. Corolário. *Seja $\mathcal{O}_n \rhd J$ o ideal em $\mathcal{O}_n$ gerado por $p(z_{d+1})$ e $\delta z_i - g_i(z_{d+1})$, $d+2 \leqslant i \leqslant n$. Então $\delta^{mn}I \subset J \subset I$.*

Demonstração. A inclusão $J \subset I$ é óbvia. Levando em conta que $I \cap \mathcal{O}_d[z_{d+1}]_{<m} = 0$, concluímos pelo Lema 4.10.9 que $\delta^{mn}I \subset J$ ■

4.10.11. Lema. *Seja $p : Y \to X$ uma função étale própria entre espaços topológicos Hausdorff. Se Y é localmente compacto, então p é um recobrimento finito.*

Demonstração. Tomamos $x \in X$. Sendo p étale, a imagem inversa $p^{-1}x$ é discreta. Sendo p própria, $p^{-1}x$ é um compacto. Logo, $p^{-1}x$ é finita, $p^{-1}x = \{y_1, \dots, y_m\}$. Escolhemos vizinhanças abertas disjuntas $y_i \in V_i \subset Y$, $1 \leqslant i \leqslant m$, tais que $V_i \to pV_i$ é um homeomorfismo com uma vizinhança aberta pV_i de x para todo i. Seja $x \in W \subset X$ uma vizinhança aberta tal que $\overline{W}$ é um compacto e $\overline{W} \subset pV_i$ para todo i. Definimos $U := W \setminus p\Big(p^{-1}\overline{W} \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^m V_i\Big)$. Então U é aberto, pois $p^{-1}\overline{W}$ é um compacto, e $x \in U$, pois $x \notin p\Big(p^{-1}\overline{W} \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^m V_i\Big)$ devido a $p^{-1}x \subset \bigsqcup\limits_{i=1}^m V_i$. Se $y \notin \bigsqcup\limits_{i=1}^m V_i$ e $py \in U$, então $py \in \overline{W}$ e $y \in p^{-1}\overline{W} \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^m V_i$ contradizendo $py \in U$. Logo, $p^{-1}U \subset \bigsqcup\limits_{i=1}^m V_i$, implicando $p^{-1}U = \bigsqcup\limits_{i=1}^m (p^{-1}U \cap V_i)$ ■

4.10.12. Observação. *Sejam $h(x) := x^m + c_1x^{m-1} + \dots + c_m \in \mathbb{C}[x]$ e $h_i(x) := x^m + c_{i,1}x^{m-1} + \dots + c_{i,m} \in \mathbb{C}[x]$, $i \in \mathbb{N}$, polinômios mônicos tais que $\lim\limits_{i\to\infty} c_{i,k} = c_k$ para todo $1 \leqslant k \leqslant m$ e seja $h(r) = 0$, $r \in \mathbb{C}$. Então existem $r_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $h_i(r_i) = 0$ para todo i e $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = r$.*

Demonstração. Trocando x por $x+r$, podemos supor que $r = 0$, implicando $\lim\limits_{i\to\infty} c_{i,m} = 0$. Se todas as raízes r dos polinômios $h_{i_n}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, satisfazem a desigualdade $|r| \geqslant \varepsilon > 0$, então $|c_{i_n,m}| \geqslant \varepsilon^m$. Uma contradição ■

4.10.13. Teorema (de parametrização local). *Seja $\mathcal{O}_n \,{}_p\!\triangleright I$ um ideal primo e seja $(A,0) := \mathbf{V}\,I$ o correspondente germe analítico. Então $\mathbf{I}(A,0) = I$ e existe um conjunto de mudanças $\mathbb{C}$-lineares de coordenadas em $\mathbb{C}^n$, aberto e denso por Zariski, após as quais, para alguns $0 \leqslant d \leqslant n$, $r_0 \in \mathbb{R}^d_{>0}$, $s_0 \in \mathbb{R}^{n-d}_{>0}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \neq \delta \in \mathcal{O}\Delta(0,r_0)$ e uma constante $c > 0$, valem as seguintes afirmações:*

- *$\mathcal{O}_d \hookrightarrow O_n/I$ é uma extensão inteira finita de posto m;*
- *$A \subset \big\{(u,w) \in \Delta(0,r_0) \times \Delta(0,s_0) \mid c|u| \geqslant |w|\big\}$;*
- *para quaisquer $r_0 \geqslant r \in \mathbb{R}^d_{>0}$ e $s_0 \geqslant s \in \mathbb{R}^{n-d}_{>0}$ sujeitos a desigualdade $cr \leqslant s$, a projeção $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^d$, $(u,w) \mapsto u$, induz uma função própria $A \cap \big(\Delta(0,r) \times \Delta(0,s)\big) \xrightarrow{\pi} \Delta(0,r)$ tal que $|\pi^{-1}u| \leqslant m$ para todo $u \in \Delta(0,r)$;*
- *a restrição de π providencia um recobrimento $A_D \xrightarrow{p} \Delta(0,r) \setminus D$ de grau m, onde $D := \big\{u \in \Delta(0,r) \mid \delta u = 0\big\}$ e $A_D := A \cap \Big(\big(\Delta(0,r) \setminus D\big) \times \Delta(0,s)\Big)$ é uma variedade analítica conexa de dimensão d, densa em $A \cap \big(\Delta(0,r) \times \Delta(0,s)\big)$.*

Demonstração. Além da desigualdade $|\pi^{-1}u| \leqslant m$ e da igualdade $\mathbf{I}(A,0) = I$, as primeiras três afirmações foram demonstradas nos Corolário 4.10.4 e Lema 4.10.3.

Seja $(u_0,w_0) \in A_D$, $w_0 = (z_{d+1,0},\dots,z_{n,0})$. Segue de $\delta u_0 \neq 0$ que $\frac{\partial p}{\partial z_{d+1}}(u_0, z_{d+1,0}) \neq 0$. Pelo teorema da função implícita, existem uma vizinhança aberta $u_0 \in U \subset \Delta(0,r)$ e uma função analítica $f : U \to \mathbb{C}$ tais que $fu_0 = z_{d+1,0}$ e $p(u,fu) = 0$ para todo $u \in U$. Levando em conta que, pelo Corolário 4.10.10, $z_i = \frac{g_i(u,z_{d+1})}{\delta u}$ para todo $d+2 \leqslant i \leqslant n$ em pontos de A_D, obtemos uma parametrização analítica local de A_D. Em outras palavras, A_D é uma variedade analítica de dimensão d. Pelo Lema 4.10.11, p é um recobrimento finito.

Escolhendo r_0 suficientemente pequeno, podemos supor que os coeficientes dos polinômios de Weierstraß $p(x), q_{d+2}(x), \dots, q_n(x) \in \mathcal{O}_d[x]$ são limitados sobre $\Delta(0,r_0)$.

Pela Observação 4.10.2, para $u \in \Delta(0,r) \setminus D$ com $|u|$ suficiente pequeno, os $z_{d+1}, z_{d+2}, \dots, z_n$ dados por $p(u,z_{d+1}) = 0$ e $z_i = \frac{g_i(u,z_{d+1})}{\delta u}$, $d+2 \leqslant i \leqslant n$, têm módulos arbitrariamente pequenos, pois tais z_i's satisfazem as equações $q_i(u,z_i) = 0$, $d+2 \leqslant i \leqslant n$, pelo Corolário 4.10.10. Sendo $\Delta(0,r) \setminus D$ conexo pela Observação 4.2, p é um recobrimento de grau m.

Obviamente, $\mathbf{I}(A,0) \supset I$. Seja $f \in \mathbf{I}(A,0) \setminus I$. Pela Observação 4.10.7, existe um polinômio mônico $q(x) := x^k + c_1x^{k-1} + \dots + c_k \in \mathcal{O}_d[x]$ irredutível em $K[x]$ tal que $u := f^k + c_1f^{k-1} + \dots + c_k \in I$. Os coeficientes c_j's, u e f são definidos e limitados sobre $\Delta(0,r) \times \Delta(0,s)$ para r e s suficientemente pequenos. Podemos escolher r e s de modo que u e f são nulos sobre $A \cap \big(\Delta(0,r) \times \Delta(0,s)\big)$ e $cr \leqslant s$. Neste caso, p é um recobrimento de grau m, implicando que c_k é nulo sobre $\Delta(0,r) \setminus D$. Pela Observação 4.2, $c_k = 0$. Sendo $q(x)$ irredutível, obtemos $k = 1$, ou seja, $f \in I$. Portanto, $\mathbf{I}(A,0) = I$.

Seja $A_D = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k$ a decomposição de A_D em componentes conexas. Para cada j, temos um recobrimento $C_j \to \Delta(0,r) \setminus D$ de grau $m_j > 0$ e $m_1 + \dots + m_k = m$.

Fixamos $1 \leqslant j \leqslant k$ e escolhemos $\varphi \in \mathbb{C}^{n\vee}$ tal que $\varphi\mathbb{C}^d = 0$; em outras palavras, φ é uma forma linear em $z_{d+1}, \dots, z_n$. Para todo ponto $u \in \Delta(0,r) \setminus D$, existem uma vizinhança aberta $u \in U_u \subset \Delta(0,r) \setminus D$ e funções holomorfas $g_1, \dots, g_{m_j} : U \to C_j$ tais que $p^{-1}U \cap C_j = \bigsqcup_{i=1}^{m_j} g_iU$. Compondo φ com g_i, obtemos uma função analítica $f_i := \varphi \circ g_i : U_u \to \mathbb{C}$; tal função é limitada pela Observação 4.10.2, pois os coeficientes dos polinômios $p(x), q_{d+2}(x), \dots, q_n(x)$ são limitados sobre $\Delta(0,r_0)$. Montamos um polinômio mônico $h_{\varphi,j}(x) := \prod_{i=1}^{m_j}(x - f_i)$ de grau m_j cujos coeficientes pertencem a $\mathcal{O}_{\Delta(0,r)}U_u$ e são limitados. Considerando um outro ponto e sua vizinhança $u' \in U_{u'} \subset \Delta(0,r) \setminus D$, é fácil ver que os correspondentes coeficientes dos polinômios sobre U_u e sobre $U_{u'}$ se colam. Assim, obtemos um polinômio $h_{\varphi,j}(x) \in \mathcal{O}_{\Delta(0,r)}\big(\Delta(0,r) \setminus D\big)[x]$. Pela Observação 4.2, obtemos $h_{\varphi,j}(u,x) \in \mathcal{O}_{\Delta(0,r)}\Delta(0,r)[x]$. Por construção, $h_{\varphi,j}\big(u, \varphi(u,w)\big) = 0$ se $(u,w) \in C_j$.

Seja $h_\varphi(x) := h_{\varphi,1}(x)\dots h_{\varphi,k}(x)$. Então $(\delta u)h_\varphi\big(u,\varphi(u,w)\big) = 0$ para todo $(u,w) \in A \cap \big(\Delta(0,r) \times \Delta(0,s)\big)$. Sendo $\mathbf{I}(A,0) = I$ primo e $\delta \notin I$, obtemos $h_\varphi\big(u,\varphi(u,w)\big) = 0$ para todo $(u,w) \in A \cap \big(\Delta(0,r) \times \Delta(0,s)\big)$ com $\deg h_\varphi(x) = m$. Assim, $h_\varphi\big(u,\varphi(u,w)\big) \in I$. Por construção, se $h_\varphi(u,r) = 0$ e $u \in \Delta(0,r) \setminus D$, então $r = \varphi(u,w)$ para algum $(u,w) \in A_D$.

Escolhendo $\varphi := z_{d+1}$, vemos que $h_\varphi(z_{d+1}) \in I$. Logo, $h_\varphi(x) = p(x)$. Daí, $k = 1$, pois $p(x)$ é irredutível em $K[x]$. Em outras palavras, A_D é conexo.

Se $|\pi^{-1}u| > m$ para algum $u \in \Delta(0,r)$, podemos escolher φ de modo que os valores φw sejam distintos por pares para $(u,w) \in \pi^{-1}u$. Neste caso, o polinômio $h_\varphi(u,x)$ teria $> m$ raízes φw, onde $(u,w) \in \pi^{-1}u$, pois $h_\varphi\big(u,\varphi(u,w)\big) \in I$. Concluímos que $|\pi^{-1}u| \leqslant m$ para todo $u \in \Delta(0,r)$.

Seja $(u,w) \in \Big(A \cap \big(\Delta(0,r) \times \Delta(0,s)\big)\Big) \setminus \overline{A}_D$. Então $u \in D$, $(u,w) \notin \overline{A}_D \cap \pi^{-1}u$ e existe um funcional $\varphi \in \mathbb{C}^{n\vee}$ tal que $\varphi\mathbb{C}^d = 0$ e $\varphi(u,w) \notin \varphi(\overline{A}_D \cap \pi^{-1}u)$. Temos $h_\varphi\big(u,\varphi(u,w)\big) = 0$. Pela Observação 4.2, encontramos uma sequência $u_i \in \Delta(0,r) \setminus D$ que converge a u. Pela Observação 4.10.12, existem $r_i \in \mathbb{C}$ tais que $h_\varphi(u_i,r_i) = 0$ para todo i e $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = \varphi(u,w)$. Sabemos que $r_i = \varphi(u_i,w_i)$ para alguns $(u_i,w_i) \in A_D$. A sequência convergente u_i, $i \in \mathbb{N}$, junto com seu limite u, é um compacto e os pontos (u_i,w_i), $i \in \mathbb{N}$, estão na π-pré-imagem deste compacto. Sendo π própria, podemos supor que a sequência (u_i,w_i), $i \in \mathbb{N}$, converge. Seu limite está obviamente em $\overline{A}_D \cap \pi^{-1}u$. Logo, $\varphi(u,w) = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi(u_i,v_i) = \varphi\big(\lim\limits_{i\to\infty}(u_i,w_i)\big) \in \varphi(\overline{A}_D \cap \pi^{-1}u)$. Uma contradição ■

4.10.14. Nullstellensatz (D. Hilbert). *Seja $\mathcal{O}_n \rhd I$ um ideal. Então $\sqrt{I} = \mathbf{I}(\mathbf{V}\,I)$.*

Demonstração. Sendo $\mathbf{I}(\mathbf{V}\,I)$ um ideal radical, a inclusão $\sqrt{I} \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}\,I)$ segue da Observação 4.6. Se $I \subset p \lhd_p \mathcal{O}_n$, então $\mathbf{V}\,I \supset \mathbf{V}\,p$ e $\mathbf{I}(\mathbf{V}\,I) \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}\,p) = p$ pela Observação 4.6 e pelo Teorema 4.10.13. Resta lembrar que $\sqrt{I} = \bigcap\limits_{I \subset p \lhd_p \mathcal{O}_n} p$ ■

4.11. Definição. Seja $M \supset A$ um conjunto analítico em uma variedade analítica M. Denotamos por I_A o *ideal* de I, isto é, o feixe de todas as funções analíticas que anulam-se em A. Este feixe é dado por $I_A U := \{f \in \mathcal{O}_M U \mid fp = 0 \text{ para todo } p \in A \cap U\}$ para todo conjunto aberto $U \subset M$.

É claro que $I_{A,p} = \mathbf{I}(A,p)$ para todo $p \in M$. Isto inclui as igualdades $I_{A,p} = \mathcal{O}_{M,p}$ para todo $p \in M \setminus A$. Se $M \supset A, A'$ são conjuntos analíticos, então obviamente $I_{A \cup A'} = I_A \cap I_{A'}$.

4.12. Teorema (H. Cartan). *Seja $M \supset A$ um conjunto analítico em uma variedade analítica M. Então o feixe I_A é coerente.*

Demonstração. Podemos supor M um polidisco arbitrariamente pequeno centrado na origem $0 \in \mathbb{C}^n$. Pela Observação 4.9, $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, onde os $(A_i,0)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, são germes analíticos irredutíveis. Sabendo que $I_A = \bigcap\limits_{i=1}^{k} I_{A_i}$, podemos supor pelo [Gal, Corolário 3.19.6] que $(A,0)$ é irredutível. Denotamos $I := \mathbf{I}(A,0) \lhd_p \mathcal{O}_n$.

Vamos atuar como na demonstração do Teorema 4.10.13, mas, nesta vez, variando z_{d+1}. Isto significa que, no lugar de z_{d+1}, consideramos $cz := c_{d+1}z_{d+1} + \dots + c_n z_n$, onde $c := (c_{d+1},\dots,c_n) \in \mathbb{C}^{n-d}$ é genérico. Isto quer dizer que $\mathcal{O}_n/I \ni \overline{cz}$ é primitivo em $F := \mathrm{K}(\mathcal{O}_n/I)$ sobre $K := \mathrm{K}\,O_d$, ou seja, $F = K[\overline{cz}]$ (vide o Lema 4.10.5).

Como na demonstração do Teorema 4.10.13, seja $\delta(c,u) := \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m} (\sigma_j\overline{cz} - \sigma_i\overline{cz})^2 \in \mathcal{O}_d[c]_{(m-1)m}$ o discriminante do polinômio minimal $p(c,u,x) := \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant m} (x - \sigma_i\overline{cz}) \in \mathcal{O}_d[c][x]_m$ de $\overline{cz}$ sobre K, seja $q_i(u,x) \in \mathcal{O}_d[x]_{\leqslant m}$, $d+2 \leqslant i \leqslant n$, o polinômio minimal de $\overline{z}_i$ sobre K; de novo, $p(c,u,x), q_{d+2}(u,x), \dots, q_n(u,x)$ são polinômios de Weierstraß em x. Pelo Lema 4.10.8 aplicado a cz no lugar de z_{d+1}, encontramos polinômios $g_i(c,u,x) \in \mathcal{O}_d[c][x]_{<m}$, $d+2 \leqslant i \leqslant n$, tais que $\delta(c,u)z_i - g_i(c,u,cz) \in I$. O fato que

g_i é um polinômio em c pode ser visto da demonstração do Lema 4.10.8. Com efeito, $r_i := \sigma_i \overline{cz}$ é linear em c. Logo, os coeficientes da matriz adjunta $\operatorname{adj} M$ são polinomiais em c e $\det M \in \mathcal{O}_d[c]_{\frac{(m-1)m}{2}}$.

Escolhemos poliraios $r \in \mathbb{R}^d_{>0}$ e $s \in \mathbb{R}^{n-d}_{>0}$ sujeitos a $cr \leqslant s$, onde $0 < c$ é a constante do Teorema 4.10.13, tão pequenos que todos os coeficientes dos polinômios $\delta(c), p(c,u,x), q_{d+2}(u,x), \ldots, q_n(u,x), g_{d+2}(c,u,x), \ldots, g_n(c,u,x)$ pertencentes a $\mathcal{O}_d$ estão em $\mathcal{O}\Delta(0,r)$.

Seja $p \in M$, onde $M := \Delta(0,r) \times \Delta(0,s)$. Escolhemos $c \in \mathbb{C}^{n-r}$, que podemos interpretar como um funcional $c \in \mathbb{C}^{n\vee}$ tal que $c\mathbb{C}^d = 0$, de modo que c é injetivo sobre $\pi^{-1}(\pi p)$

■