1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1.$$

Para quais valores $c \in \mathbb{R}$ a pré-imagem $f^{-1}(c)$ é uma variedade suave?

2. Considere a aplicação $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$f[x, y, z] := \frac{(x^2 - y^2, xy, xz, yz)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Mostre que f é um difeomorfismo sobre sua imagem. Isto mostra que $\mathbb{P}^2$ se realiza como subvariedade de $\mathbb{R}^4$.

3. Considere a função determinante $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, onde $\mathrm{GL}(n)$ denota o grupo das matrizes inversíveis $n \times n$.

a) Utilizando as entradas A_{ij} da matriz A como coordenadas em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, mostre que as derivadas parciais do determinante são dadas por

$$\frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}} = (\det A)(A^{-1})_{ji}.$$

b) Conclua que

$$d(\det_A)B = (\det A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}B)$$

para $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{T}_A\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \simeq M(n, \mathbb{R})$.

4. Seja $\mathrm{SL}(n)$ o grupo das matrizes $n \times n$ de determinante 1. Mostre que $\mathrm{SL}(n)$ é variedade diferenciável e calcule sua dimensão.

5. a) Calcule o grau da aplicação antípoda $A_n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.

b) Suponha que uma função $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ não tem pontos fixos. Mostre que $\deg f = (-1)^{n+1}$.

c) Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma aplicação de grau zero. Mostre que existem $x, y \in \mathbb{S}^n$ tais que $f(x) = x$ e $f(y) = -y$.

6. Utilize o teorema do ponto fixo de Brouwer para mostrar o seguinte resultado de Frobenius: uma matriz cujas entradas são todas não-negativas tem um autovalor não-negativo. (Dica: assumindo que a matriz A é não-degenerada, considere a aplicação $f : v \mapsto Av/|Av|$.)