SMA0501. CÁLCULO I. TEOREMAS E DEFINIÇÕES

2º semestre de 2015

1. Quantificadores e símbolos lógicos

Escrevemos

• $\forall$ no lugar de "para todo(s)" ou "qualquer que seja" ...
• $\exists$ no lugar de "existe(m)" ou "para algum (alguns)" ...
• $A \Longrightarrow B$ no lugar de "A implica B" ou "B segue de A" ... (onde A é a hipótese e B é a conclusão da implicação $\Longrightarrow$)
• $\Longleftrightarrow$ no lugar de "equivalente" ou "se e só se" ...
• $:=$ no lugar de "igual por definição" ...

2. Notação de funções e conjuntos

Em vez de definir o que é um conjunto, aceitamos a visão ingênua de que é razoável imaginar um conjunto como um saco de elementos. Escrevemos $e \in E$ quando e é um elemento do conjunto E (e está no saco E). Para descrever um conjunto C usamos a notação $C := \big\{e \mid P(e)\big\}$ ou $C := \big\{e \in E \mid P(e)\big\}$, onde $P(x)$ é uma propriedade (de elementos) e E é um conjunto dado. Isto se lê assim: O conjunto C é formado por todos os e (ou por todos os elementos e do conjunto E) que satisfazem a propriedade P.

Por exemplo:
$\mathbb{R} := \{r \mid r$ é um número real$\}$ é o conjunto de todos os números reais;
$\mathbb{Q} := \{q \in \mathbb{R} \mid q$ é um número racional$\}$ é o conjunto de todos os números racionais;
$\mathbb{Z} := \{z \in \mathbb{Q} \mid z$ é um número inteiro$\}$ é o conjunto de todos os números inteiros;
$\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ é o conjunto de todos os números naturais;
$\mathbb{R}^{\geqslant 0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geqslant 0\}$ é o conjunto de todos os números reais não-negativos;
$\mathbb{R}^{>0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ é o conjunto de todos os números reais positivos;
$[a, b] := \{r \in \mathbb{R} \mid a \leqslant r \leqslant b\}$, $(a, b) := \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}$, $[a, b) := \{r \in \mathbb{R} \mid a \leqslant r < b\}$, $(a, b] := \{r \in \mathbb{R} \mid a < r \leqslant b\}$ são os intervalos fechado, abertos e semiabertos entre $a, b \in \mathbb{R}$;
$(-\infty, b] := \{r \in \mathbb{R} \mid r \leqslant b\}$, $(-\infty, b) := \{r \in \mathbb{R} \mid r < b\}$, $[a, \infty) := \{r \in \mathbb{R} \mid a \leqslant r\}$, $(a, \infty) := \{r \in \mathbb{R} \mid a < r\}$, $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$ intervalos (semi)infinitos;
$\varnothing := \{e \mid e \neq e\}$ o conjunto vazio (saco vazio).

Essas notações são padrões. (Note que $[a, b] = \varnothing$ se $a > b$.)

Sejam A, B conjuntos. Dizemos que A está *contido* em B ou que B *contém* A ou que A é um *subconjunto* de B se $\forall a\ a \in A \Longrightarrow a \in B$ e escrevemos $A \subset B$ ou $B \supset A$. Em outras palavras, para verificar que $A \subset B$, precisa-se provar a implicação $a \in A \Longrightarrow a \in B$. É facil ver que $\varnothing \subset A$ para qualquer conjunto A. Dois conjuntos A e B são considerados como iguais se eles têm os mesmos elementos. Em outras palavras, $A = B$ é equivalente a $A \subset B$ e $A \supset B$. Por exemplo, $p \neq \{p\}$ para qualquer conjunto p. Em particular, o conjunto $\{\varnothing\}$ não é vazio.

Denotamos por $A \cap B$ a *interseção* de A e B, isto é, $A \cap B := \{x \mid x \in A$ e $x \in B\}$. Denotamos por $A \cup B := \{x \mid x \in A$ ou $x \in B\}$ a *união* de A e B. Denotamos por $A \times B := \big\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\big\}$ o produto *cartesiano* de A e B. Este produto é formado por todos os pares *ordenados* (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$. Não é necessário saber o que é um par ordenado. É suficiente saber apenas a propriedade que caracteriza este conceito: $(a, b) = (a', b') \iff a = a'$ e $b = b'$. (Um exemplo: $[0, 1] \times [0, 1]$ pode ser visto como um quadrado.) De modo análogo, podemos definir o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Seja A um conjunto e sejam $S, S' \subset A$ subconjuntos. Denotamos por $S \setminus S' := \{s \in S \mid s \notin S'\}$ o *complemento* de S' em S. Claro que $A \cap B \subset A$, $A \cup B \supset A$, $S \setminus S' \subset S$ e $(S \setminus S') \cap S' = \varnothing$.

Uma *função* $f : A \to B$ de A para B é uma lei pela qual a cada elemento $a \in A$ está associado um único elemento $b \in B$, denotado por $b = f(a)$ e chamado a *imagem* de a. Escreve-se também $A \xrightarrow{f} B$. Dizemos que A é o *domínio* e B é o *codomínio* de f. Note que, por definição, consideramos duas funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$ como diferentes se os domínios ou codomínios são diferentes, isto é, se $A \neq C$ ou $B \neq D$, mesmo se a lei parece a mesma. Por exemplo, temos duas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : r \mapsto r^2$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, $g : r \mapsto r^2$, que são diferentes embora dadas através da mesma lei $r \mapsto r^2$. (Escrevendo $f : a \mapsto b$ enfatizamos como f "age" sobre elementos; isto é equivalente a escrever $f(a) = b$.)

Seja $f : A \to B$ uma função. Denotamos por $\Gamma_f := \Big\{\big(a, f(a)\big) \in A \times B \mid a \in A\Big\}$ o *gráfico* da função f. Em nossos estudos, temos normalmente $A, B \subset \mathbb{R}$. Neste caso, o gráfico é o usual.

Seja $f : A \to B$ uma função e sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$. Então $f(A') := \big\{f(a) \mid a \in A'\big\}$ é a *imagem* de A' por f e $f^{-1}(B') := \big\{a \in A \mid f(a) \in B'\big\}$ é a imagem *inversa* de B' por f. Definimos a *restrição* $f|_{A'} : A' \to B$ de f para A' pela regra óbvia $f|_{A'} : a' \mapsto f(a')$. A função de *inclusão* $i : A' \hookrightarrow A$ é dada pela regra $i : a' \mapsto a'$ para todo $a' \in A'$.

Sejam $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ duas funções dos formatos indicados. Definimos a função *composta* ou a *composição* $g \circ f : A \to C$ pela regra $(g \circ f)(a) := g\big(f(a)\big)$ para todo $a \in A$. Essa operação é associativa: é fácil verificar que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ para funções $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$. Podemos observar também que a restrição $f|_{A'}$ da função $f : A \to B$ para $A' \subset A$ é a composição $f \circ i$, isto é, $f|_{A'} = f \circ i$, onde $i : A' \hookrightarrow A$ é a função de inclusão. Para qualquer conjunto A, temos a função *idêntica* $1_A : A \to A$ dada pela regra $1_A : a \mapsto a$. Essa função satisfaz as identidades $f \circ 1_A = f$ e $1_A \circ g = g$ para quaisquer funções $f : A \to B$ e $g : C \to A$.

Uma função $f : A \to B$ é dita *injetora* ou uma *injeção* se $\forall a_1, a_2 \in A$ $f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$. A função de inclusão considerada acima é um exemplo de uma função injetora. Uma função $f : A \to B$ é dita *sobrejetora* ou uma *sobrejeção* se todo elemento de B é a imagem por f de um elemento de A, isto é, se, para todo $b \in B$, existe um $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Equivalentemente, f é sobrejetora se e só se $f(A) = B$. Uma função $f : A \to B$ simultâneamente injetora e sobrejetora é dita *bijetora* ou uma *bijeção.*

2.1. Lema. *Uma função $f : A \to B$ é bijetora se e só se existe uma função $g : B \to A$* (chamada *inversa* para f e denotada por f^{-1}) *tal que $f \circ g = 1_B$ e $g \circ f = 1_A$.*

2.2. Operações com funções. Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções. Definimos as funções $f + g, f - g, f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ respectivamente pelas regras $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$, $(f - g)(a) := f(a) - g(a)$, $(f \cdot g)(a) := f(a)g(a)$. Caso $g(a) \neq 0$ para todo $a \in A$, definimos a função $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ pela regra $\frac{f}{g}(a) := \frac{f(a)}{g(a)}$.

2.3. Observação. Há o hábito de se associar a uma função *numérica* $f : A \to B$ (isto significa que $A, B \subset \mathbb{R}$) o "maior" domínio possível e o "menor" codomínio possível. Por exemplo, nessa visão, a função $\frac{1}{x}$ tem os domínio e codomínio iguais a $\{r \in \mathbb{R} \mid r \neq 0\}$.

2.4. Funções exponenciais e logaritmos. Seja $1 \neq a > 0$. Definimos a função *exponencial* $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$. Para $n \in \mathbb{N}$, o valor a^n é bem conhecido. Definimos $a^0 := 1$ e $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim, a^z é definido para todo $z \in \mathbb{Z}$. Cada número racional q tem a forma $q = \frac{z}{n}$ com $z \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Façamos $a^q := \sqrt[n]{a^z}$. O valor de a^r para $r \in \mathbb{R}$ é o limite dos valores a^q, onde q tende a r. (Precisamos de algumas definições dadas posteriormente.)

Uma função numérica $f : A \to B$ é *monótona crescente* (respectivamente, *decrescente*) se $\forall a_1, a_2 \in A$ $a_1 < a_2 \Longrightarrow f(a_1) < f(a_2)$ (respectivamente, $\forall a_1, a_2 \in A$ $a_1 < a_2 \Longrightarrow f(a_1) > f(a_2)$). Claro que toda função monótona é injetora.

As propriedades da função a^x :

• a função $f(x) := a^x$ é monótona (crescente se $a > 1$ e descrescente se $a < 1$) com $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{>0}$.
• $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$, $a^0 = 1$, donde $a^{x_1-x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$; $(a^x)^b = a^{bx}$; além disso, $(a_1a_2)^x = a_1^x a_2^x$ para $1 \neq a_1, a_2 > 0$.

Daí concluímos que a função $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ é bijetora. A sua inversa se chama *logaritmo* e é denotada por $\log_a : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ (o número a é a *base* do logaritmo). Logo, $\log_a a^x = x$ e $a^{\log_a y} = y$ para todos $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{>0}$. Chegamos às seguintes propriedades do logaritmo:

• a função $\log_a$ é monótona (crescente se $a > 1$ e descrescente se $a < 1$) com $\log_a(\mathbb{R}^{>0}) = \mathbb{R}$.
• $\log_a(y_1y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$, $\log_a 1 = 0$, donde $\log_a \frac{y_1}{y_2} = \log_a y_1 - \log_a y_2$; $\log_a y^b = b \log_a y$; além disso, $\log_{a_1a_2} a_1^x + \log_{a_1a_2} a_2^x = x$ para $1 \neq a_1, a_2 > 0$.

De $b = a^{\log_a b}$, concluímos que $b^x = a^{x \log_a b}$. Em outras palavras, para calcular os valores da função exponencial b^x, basta saber o número $\log_a b$ e como calcular os valores da função a^x. De modo análogo, $\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$ para $1 \neq a, b > 0$, o que possibilita calcular os valores do logaritmo com a base b em termos do logaritmo com a base a. Realmente, a igualdade $\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$ se reescreve como $\log_a b \log_b y = \log_a y$ e é equivalente a $a^{\log_a b \log_b y} = y$, isto é, a $b^{\log_b y} = y$.

3. Limites e funções contínuas

3.1. Definição. Seja $f : A \to B$ uma função numérica e sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Dizemos que o *limite* de $f(x)$ quando $x \in A$ *tende* a a (*existe* e) é igual a b e escrevemos $\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) = b$ (ou $f(x) \to b$ quando $A \ni x \to a$) se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ |x - a| < \delta \Longrightarrow \big|f(x) - b\big| < \varepsilon.$$

Informalmente, o valor $f(x)$ é arbitrariamente próximo a b se $x \in A$ é suficientemente próximo a a.

As variantes dessa definição no caso quando um ou ambos dentre a, b é $\pm\infty$:

$\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) = \infty$ se $\forall L\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > L$,
$\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) = -\infty$ se $\forall L\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) < L$,
$\lim\limits_{A \ni x \to \infty} f(x) = b$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ L\ \forall x \in A\ x > L \Longrightarrow \big|f(x) - b\big| < \varepsilon$,
$\lim\limits_{A \ni x \to -\infty} f(x) = b$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ L\ \forall x \in A\ x < L \Longrightarrow \big|f(x) - b\big| < \varepsilon$,
$\lim\limits_{A \ni x \to \infty} f(x) = \infty$ se $\forall L\ \exists\ M\ \forall x \in A\ x > M \Longrightarrow f(x) > L$,
$\lim\limits_{A \ni x \to -\infty} f(x) = \infty$ se $\forall L\ \exists\ M\ \forall x \in A\ x < M \Longrightarrow f(x) > L$,
$\lim\limits_{A \ni x \to \infty} f(x) = -\infty$ se $\forall L\ \exists\ M\ \forall x \in A\ x > M \Longrightarrow f(x) < L$,
$\lim\limits_{A \ni x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall L\ \exists\ M\ \forall x \in A\ x < M \Longrightarrow f(x) < L$.

Por exemplo, seja $s_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, uma *sequência numérica* e seja $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \pm\infty$. Interpretando a sequência como uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f : n \mapsto s_n$, escrevemos $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = b$ se $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = b$. Note que o limite da sequência permanece o mesmo se alterarmos apenas um número finito de elementos da sequência. Mais ainda, se $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = b$, então $\lim\limits_{m \to \infty} s_{n_m} = b$ para qualquer subsequência s_{n_m}, $m \in \mathbb{N}$. (A escolha de uma subsequência é nada mais do que a escolha de uma sequência crescente n_m, $m \in \mathbb{N}$, de índices.)

Os limites do tipo $\lim\limits_{A\ni x\to\pm\infty} f(x)$ estão dando origem às *assíntotas horizontais.* Por exemplo, de $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ segue que a reta horizontal dada por $y = 0$ é uma assíntota horizontal da função $\frac{1}{x}$.

Sequências fazem um papel fundamental no cálculo de limites:

3.2. Proposição. *Seja $f : A \to B$ uma função numérica. Então $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = b$ se e só se, para qualquer sequência $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, que tende a a, a sequência $f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, tende a b.*

O cálculo de limites é compatível com desigualdades, operações e commposta de funções:

3.3. Proposição. *Sejam $f, g : A \to B$ e $h : B \to C$ funções numéricas. Então*

- *se f é uma constante $b \in \mathbb{R}$ (isto é, $f : x \mapsto b$ para todo $x \in A$), então $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = b$;*
- *se $A = B$ e $f = 1_A$, então $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = a$;*
- *se $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = b$ e o limite $\lim\limits_{B\ni y\to b} h(y)$ existe, então o limite $\lim\limits_{A\ni x\to a} (h\circ f)(x)$ existe e $\lim\limits_{A\ni x\to a} (h\circ f)(x) = \lim\limits_{B\ni y\to b} h(y)$;*
- *se os limites $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{A\ni x\to a} g(x)$ existem e não constituem $-\infty, \infty$ ou $\infty, -\infty$, então o limite $\lim\limits_{A\ni x\to a} (f + g)(x)$ existe e $\lim\limits_{A\ni x\to a} (f + g)(x) = \lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) + \lim\limits_{A\ni x\to a} g(x)$;*
- *se os limites $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{A\ni x\to a} g(x)$ existem e não constituem $0, \pm\infty$ ou $\pm\infty, 0$, então o limite $\lim\limits_{A\ni x\to a} (f \cdot g)(x)$ existe e $\lim\limits_{A\ni x\to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{A\ni x\to a} g(x)$;*
- *se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, os limites $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{A\ni x\to a} g(x)$ existem e não constituem $\pm\infty, \pm\infty$ ou $\pm\infty, \mp\infty$ ou $b, 0$, então o limite $\lim\limits_{A\ni x\to a} \frac{f}{g}(x)$ existe e $\lim\limits_{A\ni x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{A\ni x\to a} f(x)}{\lim_{A\ni x\to a} g(x)}$;*
- *se $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in A$ e os limites $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{A\ni x\to a} g(x)$ existem, então $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{A\ni x\to a} g(x)$.*

3.4. Definição. Sejam $f : A \to B$ uma função numérica e $a \in \mathbb{R}$. Denotamos as restrições $f^+ := f|_{A\cap(a,\infty)}$ e $f^- := f|_{A\cap(-\infty,a)}$. Os limites *laterais* $\lim\limits_{A\ni x\to a^+} f(x) := \lim\limits_{A\cap(a,\infty)\ni x\to a} f^+(x)$ e $\lim\limits_{A\ni x\to a^-} f(x) := \lim\limits_{A\cap(-\infty,a)\ni x\to a} f^-(x)$ são respectivamente *à esquerda* e *à direita.*

3.5. Critério. *Sejam $f : A \to B$ uma função numérica e $a \in \mathbb{R}$. Para a existência do limite $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x)$ é necessária e suficiente a existência dos limites laterais coincidentes $\lim\limits_{A\ni x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{A\ni x\to a^+} f(x)$. Neste caso, $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{A\ni x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{A\ni x\to a^+} f(x)$.*

3.6. Definição. Uma função numérica $f : A \to B$ é *contínua* no ponto $a \in A$ se $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = f(a)$. A função $f(x)$ se chama *contínua* se ela é contínua em cada ponto $a \in A$.

Da Proposição 3.3, obtemos imediatamente o

3.7. Corolário.

- *qualquer função constante é contínua,*
- *a função idêntica é contínua,*
- *qualquer restrição de uma função contínua é contínua,*
- *a composta de funções contínuas é contínua,*
- *a soma de funções contínuas é contínua,*
- *o produto de funções contínuas é uma função contínua,*
- *a fração de funções contínuas é contínua.*

Nem toda função possui inversa, mas a restrição de uma função para um menor domínio é às vezes bijetora. Por exemplo, as funções trigonométricas sen, cos, tan, ... são monótonas respectivamente nos intervalos $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[0, \pi]$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ... Além disso, $\text{sen}[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = [-1, 1]$, $\cos[0, \pi] = [-1, 1]$, $\tan(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \mathbb{R}$, ... Assim concluímos que as correspondentes restrições são bijetoras e podemos considerar as funções trigonométricas inversas $\text{sen}^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ... Do mesmo modo, definimos a inversa para a função x^n, $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se n é ímpar e $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ se n é par.

3.8. Proposição. *As funções x^n, $n \in \mathbb{N}$, exponenciais, trigonométricas e suas inversas são contínuas.*

O seguinte fato útil parece óbvio, mas sua demonstração não é trivial.

3.9. Teorema (do valor intermediário)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, e seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a imagem $f[a, b]$ é um intervalo fechado; já que este contém o intervalo fechado com extremidades $f(a), f(b)$, a função $f(x)$ assume todos valores intermediários entre $f(a)$ e $f(b)$.*

4. Derivadas

4.1. Definição. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ uma função numérica e $a \in A$. Definimos a função $g : A' \to \mathbb{R}$ pela regra $g : a' \mapsto \frac{f(a')-f(a)}{a'-a}$ para todo $a' \in A'$, onde $A' := A \setminus \{a\}$. Se o limite $\lim\limits_{A' \ni x \to a} g(x)$ existe, a função f é dita *derivável* no ponto $a \in A$ e $f'(a) := \lim\limits_{A' \ni x \to a} g(x) = \lim\limits_{A' \ni x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se chama *derivada* de f em a. A função f é *derivável* se ela é derivável em cada $a \in A$. Neste caso, a função $f' : A \to \mathbb{R}$ dada pela regra $a \mapsto f'(a)$ se chama *derivada* de f.

A definição da derivada $f'(a)$ de $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, pode ser reescrita: $f(a+\delta) = f(a)+f'(a)\delta+h(\delta)\delta$ para suficientemente pequenos δ's tais que $a + \delta \in A$, onde $h(\delta)$ é uma função numérica, definida para pequenos δ's tais que $a + \delta \in A$ e tal que $\lim\limits_{A-a \ni \delta \to 0} h(\delta) = 0$. Em outras palavras, a função $A \ni x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ é a melhor aproximação de f por uma função linear na proximidade do ponto a. Por isto, é adequado imaginar o gráfico dessa função linear como a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\big(a, f(a)\big)$. As mesmas considerações implicam também que uma função derivável em um ponto é contínua neste ponto.

Outras notações para a derivada $f'(a)$: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}|_{x=a}$, $\dot{f}(a)$.

Com uso da derivada podemos calcular limites:

4.2. Lema (regra de L'Hôspital)**.** *Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que o limite $\lim\limits_{A \ni x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe para algum $a \in A$. Se $f(a) = g(a) = 0$, então $\lim\limits_{A \ni x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{A \ni x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

4.3. Proposição. *Sejam $f, g : A \to B$ e $h : B \to C$ funções numéricas deriváveis respectivamente em $a \in A$, $a \in A$ e $b := f(a) \in B$ e seja $a \in A' \subset A$. Então*

- *a derivada de qualquer função constante é nula*;
- *a derivada da função idêntica é a função constante igual* a 1 ;
- $\frac{\mathrm{d}\frac{1}{x}}{\mathrm{d}x}(c) = -\frac{1}{c^2}$ *para todo* $c \neq 0$;
- *a restrição $f|_{A'}$ é derivável em a e* $\frac{\mathrm{d}f|_{A'}}{\mathrm{d}x}(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$;
- (regra de cadeia) *a composta $h \circ f$ é derivável em a e* $(h \circ f)'(a) = h'\big(f(a)\big)f'(a)$;
- *a soma $f + g$ é derivável em a e* $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
- (regra de Leibniz) *o produto $f \cdot g$ é derivável em a e* $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;
- *se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, a função $\frac{f}{g}$ é derivável em a e* $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$;
- *se f é bijetora e a função inversa f^{-1} é derivável em b, então* $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

4.4. Lema. $\lim\limits_{0\neq x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$ *e* $\lim\limits_{0\neq x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$.

Posteriormente, introduziremos um número $e\approx 2.72$ tal que $\lim\limits_{0\neq\varepsilon\to 0}\frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}=1$. Denotamos por $\ln y:=\log_e y$ a função chamada *logaritmo natural.*

4.5. Proposição. *Sejam $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{R}$ e $1\neq a>0$. Então as funções*

$$\operatorname{sen},\cos,\tan^{-1},a^x,x^n:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad \log_a,x^r:\mathbb{R}^{>0}\to\mathbb{R};\quad x^{-n}:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R};$$

$$\operatorname{sen}^{-1},\tan:(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})\to\mathbb{R};\quad \cos^{-1}:(0,\pi)\to\mathbb{R}$$

são deriváveis e

$$(\operatorname{sen} x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\operatorname{sen} x,\quad (\tan x)'=\tfrac{1}{\cos^2 x},\quad (a^x)'=a^x\ln a,\quad (x^n)'=nx^{n-1},$$

$$(\log_a y)'=\tfrac{1}{y\ln a},\quad (x^r)'=rx^{r-1},\quad (x^{-n})'=-nx^{-n-1},\quad (\operatorname{sen}^{-1}x)'=\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\tan^{-1}x)'=\tfrac{1}{1+x^2},\quad (\cos^{-1}x)'=-\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4.6. Diferenciação implícita. Às vezes, uma função numérica $f(x)$ é dada por meio de uma equação $E\big(x,f(x)\big)=0$, ou seja, *implicitamente.* Supondo que a função (de duas variáveis!) $E(x,y)$ é derivável[1] no ponto (a,b), onde $b=f(a)$, a derivada $f'(a)$ (se existir) satisfaz a equação $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\big(a,f(a)\big)+f'(a)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}y}\big(a,f(a)\big)=0$.

4.7. Teorema (do valor médio). *Sejam $f_1,f_2:[u,v]\to\mathbb{R}$ funções deriváveis tais que $\dot f(x):=\big(f_1'(x),f_2'(x)\big)\neq 0$ para todo $x\in(u,v)$. Se os pontos $p:=\big(f_1(u),f_2(u)\big)$ e $q:=\big(f_1(v),f_2(v)\big)$ são distintos, então, para algum $\xi\in(u,v)$, o vetor $\dot f(\xi)$ é paralelo à reta R ligando p e q.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.9, para algum $\xi\in[u,v]$, a distância entre $f(x)$ e R é máxima. Isto significa que, em $x=\xi$, a função (que expressa o quadrado da distância em questão; $\langle -,-\rangle$ denota o produto escalar) $\varphi(x)=\big\langle f(x),f(x)\big\rangle-\frac{\langle f(x),q-p\rangle^2}{\langle q-p,q-p\rangle}$ atinge seu máximo. Temos $f_i(\xi+\varepsilon)=f_i(\xi)+c_i\varepsilon+h_i(\varepsilon)\varepsilon$ para todo $i=1,2$, onde $\dot f(\xi)=(c_1,c_2)$ e $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}h_i(\varepsilon)=0$. Resta observar que

$$\varphi(x)=\big\langle f(\xi),f(\xi)\big\rangle+2\big\langle\dot f(\xi),f(\xi)\big\rangle\varepsilon-\frac{\big\langle f(\xi),q-p\big\rangle^2}{\langle q-p,q-p\rangle}-\frac{2\big\langle\dot f(\xi),q-p\big\rangle\big\langle f(\xi),q-p\big\rangle}{\langle q-p,q-p\rangle}\varepsilon+h(\varepsilon)\varepsilon$$

implica $\big\langle\dot f(\xi),f(\xi)\big\rangle\langle q-p,q-p\rangle=\big\langle\dot f(\xi),q-p\big\rangle\big\langle f(\xi),q-p\big\rangle$, onde $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}h(\varepsilon)=0$ (note que o caso de $f(\xi)$ proporcional a $q-p$ é trivial, pois isto implica $\varphi(\xi)=0$) ■

4.8. Corolário (teorema de Lagrange). *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua derivável em (a,b). Então $f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$ para algum $\xi\in(a,b)$.*

4.9. Derivadas superiores. Seja $f(x)$ uma função numérica. Se, por sua vez, a derivada $f'(x)$ é derivável, podemos considerar a segunda derivada $f''(x):=\big(f'(x)\big)'$. Por indução, definimos a $(n+1)$-ésima derivada $f^{(n+1)}(x):=\big(f^{(n)}(x)\big)'$. (Por definição, $f^{(0)}(x){:=}f(x)$.) Outra notação: $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}:=f^{(n)}(x)$.

[1] Isto significa que $E(x,y)=E(a,b)+c_1(x-a)+c_2(y-b)+R(x-a,y-b)$ para alguns $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, onde a função $R(x,y)$ satisfaz $\lim\limits_{0\neq(x,y)\to 0}\frac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. Neste caso, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}(a,b):=c_1$ e $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}y}(a,b):=c_2$.

4.9.1. Teorema (fórmula de Taylor). *Se uma função $f:(b,c)\to\mathbb{R}$ é derivável $n{+}1$ vezes, então, para quaisquer $a,y\in(b,c)$, existe ξ entre a e y tal que* $f(y)=f(a)+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(y-a)^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y-a)^{n+1}$.

Demonstração. Podemos supor que $f^{(i)}(a)=0$ para $i=0,1,\dots,n$. Suponhamos, pela simplicidade, que $y>a$. Apliquemos o Teorema 4.7 para $u=a$, $v=y$, $f_1(x):=(x-a)^{n+1}$ e $f_2(x):=f(x)$. Obtemos $\frac{f'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-a)^n}=\frac{f(y)}{(y-a)^{n+1}}$ para algum $\xi_1\in(a,y)$. Apliquemos o Teorema 4.7 para $u=a$, $v=\xi_1$, $f_1(x):=(n+1)(x-a)^n$ e $f_2(x):=f'(x)$. Obtemos $\frac{f''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-a)^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-a)^n}=\frac{f(y)}{(y-a)^{n+1}}$ para algum $\xi_2\in(a,\xi_1)$. Continuando deste jeito, finalmente chegamos a $\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}=\frac{f(y)}{(y-a)^{n+1}}$ ∎

4.9.2. Lema (regra de L'Hôspital). *Sejam $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ funções deriváveis tais que $l:=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Suponhamos que $g'(x)\neq0$ para todo $x\in(a,b)$. Se $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$ ou $\lim\limits_{x\to a^+}\big|f(x)\big|=\lim\limits_{x\to a^+}\big|g(x)\big|=\infty$, então $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.*

Demonstração. Para $x\in(a,b)$, denotamos $m(x):=\inf\limits_{\xi\in(a,x)}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ e $M(x):=\sup\limits_{\xi\in(a,x)}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Sejam $x,y\in(a,b)$, $x\neq y$. Pelo Corolário 4.8, $g(x)\neq g(y)$ e, pelo Teorema 4.7, $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ para algum ξ entre x e y. Logo, $m(x)\leqslant\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\leqslant M(x)$ se $a<y<x<b$. Note que $\lim\limits_{x\to a^+}m(x)=\lim\limits_{x\to a^+}M(x)=l$. Caso $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$, o limite $y\to a^+$ de $m(x)\leqslant\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(y)}{g(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}}\leqslant M(x)$ produz $m(x)\leqslant\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant M(x)$. Caso $\lim\limits_{x\to a^+}\big|g(x)\big|=\infty$, o limite $y\to a^+$ de $m(x)\leqslant\frac{\frac{f(y)}{g(y)}-\frac{f(x)}{g(y)}}{1-\frac{g(x)}{g(y)}}\leqslant M(x)$ produz $m(x)\leqslant\liminf\frac{f(y)}{g(y)}\leqslant\limsup\frac{f(y)}{g(y)}\leqslant M(x)$ ∎

4.10. Extremos locais e a análise qualitativa de gráficos de funções. Sejam $f:A\to\mathbb{R}$ uma função numérica e $a\in A$. Dizemos que $f(a)$ é um *extremo local* de $f(x)$ se existe $(b,c)\ni a$ tal que $f(x)\le f(a)$ para todo $x\in(b,c)\cap A$ (*máximo local*) ou tal que $f(x)\ge f(a)$ para todo $x\in(b,c)\cap A$ (*mínimo local*).

Do Corolário 4.8, segue o

4.10.1. Lema. *Seja $f:A\to\mathbb{R}$ uma função derivável em $a\in A$. Se $f(a)$ é um extremo local de $f(x)$, então $f'(a)=0$. Caso $A=(b,c)$ e $f'(x)>0$ para todo $x\in(b,c)$, a função $f(x)$ é crescente em (b,c). Caso $A=(b,c)$ e $f'(x)<0$ para todo $x\in(b,c)$, a função $f(x)$ é decrescente em (b,c).*

4.10.2. Definição. Uma função numérica $f:A\to\mathbb{R}$ é *convexa* (respectivamente, *côncava*) se, para quaisquer $a_1,a_2\in A$, $a_1<a_2$, o gráfico da função $f|_{A\cap[a_1,a_2]}$ está abaixo (respectivamente, acima) da reta ligando os pontos $\big(a_1,f(a_1)\big)$ e $\big(a_2,f(a_2)\big)$, isto é, $f(x)\leqslant f(a_1)+\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}(x-a_1)$ (respectivamente, $f(x)\geqslant f(a_1)+\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}(x-a_1)$) para todos $x\in A\cap[a_1,a_2]$. Claro que f é convexa se e só se $-f$ é côncava.

4.10.3. Lema. *Uma função contínua $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ é convexa se e só se $f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ para todos $x_1,x_2\in(a,b)$.*

4.10.4. Lema. *Uma função derivável duas vezes $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ é convexa se e só se $f''(x)\geqslant0$ para todo $x\in(a,b)$.*

O exemplo da função $f(x):=x^3$ mostra que $f(0)$ não é um extremo local apesar de $f'(0)=0$.

4.10.5. Lema. *Seja $a\in(b,c)$ e seja $f:(b,c)\to\mathbb{R}$ uma função derivável duas vezes tal que $f'(a)=0$ e $f''(a)\neq0$. Então $f(a)$ é um extremo local de f (um mínimo local se $f''(a)>0$ e um máximo local se $f''(a)<0$).*

4.10.6. Lema. *Seja $f : (b,c) \to \mathbb{R}$ uma função. Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é constante.*

4.10.7. Esboço do gráfico de uma função derivável duas vezes. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função numérica derivável duas vezes definida na união finita A de intervalos. Resolvendo a equação $f(x) = 0$, achamos os pontos onde o gráfico de f intercepta o eixo x. Resolvendo a equação $f'(x) = 0$, achamos pontos dos possíveis extremos locais de f. Fora destes pontos, f é monótona em cada um dos correrspondentes intervalos: crescente se $f'(x) > 0$ e decrescente se $f'(x) < 0$. (Note que, nestes intervalos, $f'(x)$ é contínua e $f'(x) \neq 0$.) Calculando o sinal da segunda derivada $f''(x)$, entendemos onde f é convexa e onde é côncava. Além disso, determinamos quais dos pontos com $f'(x) = 0$ são os mínimos locais, quais são os máximos locais e quais são os pontos de inflexão.[2] Finalmente, pesquisamos as assíntotas calculando limites.

5. Integrais

5.1. Integral de função escada. Uma *partição* do intervalo fechado $[a,b]$, $a < b$, é um sequência de pontos $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$. Uma partição $a = b_0 < b_1 < \dots < b_{m-1} < b_m = b$ é um *refinamento* da partição $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ se $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\} \subset \{b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m\}$. É claro que um número finito de partições admitem um refinamento comum.

5.1.1. Definição. Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se chama função *escada* se existe uma partição $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n$ de $[a,b]$ tal que $f|_{(a_{i-1},a_i)}$ é constante para todo $i = 1, 2, \dots, n$. (Note que não há condições para os valores $f(a_i)$.) Nessa definição, podemos trocar a partição $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n$ por qualquer seu refinamento. Logo, $|f|$, rf e $f + g$ são funções escada se f, g são funções escada e $r \in \mathbb{R}$. Para qualquer função escada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definimos a *norma* $||f|| := \max\limits_{x \in [a,b]} \big|f(x)\big|$ de f e a *integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^n c_i(a_i - a_{i-1})$ de f, onde $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ é uma partição de $[a,b]$ tal que $f|_{(a_{i-1},a_i)} = c_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. É fácil ver que a integral será a mesma se refinamos a partição.

A integral de uma função escada é simplesmente a área sob o gráfico da função, levando em conta o sinal da área.

5.1.2. Lema. *Sejam $f, g : [a,c] \to \mathbb{R}$ funções escada, $b \in [a,c]$ e $s, t \in \mathbb{R}$. Então fg, $sf + tg$, $f|_{[a,b]}$ e $f|_{[b,c]}$ são funções escada, $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_a^c \big(sf(x) + tg(x)\big)\mathrm{d}x = s\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + t\int_a^c g(x)\mathrm{d}x$ e $\displaystyle\Big|\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\Big| \leqslant ||f||(c - a)$. Se $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a,c]$, então $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$. Se $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então $\frac{1}{f}$ é uma função escada* ■

5.2. Supremo e ínfimo. Sejam $A \subset \mathbb{R} \ni c$. Escrevemos $A \leqslant c$ (respectivamente, $c \leqslant A$) se $a \leqslant c$ (respectivamente, $c \leqslant a$) para todo $a \in A$ e chamamos c uma *cota superior* (respectivamente, *inferior*) de A.

5.2.1. Definição. Se $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N\ |c_m - c_n| < \varepsilon$, dizemos que a sequência numérica $c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, é *fundamental.*

5.2.2. Critério (de Cauchy). *Uma sequência numérica é convergente se e só se ela é fundamental.*

[2] Um ponto $a \in (b,c)$ é um *ponto de inflexão* da função $f : (b,c) \to \mathbb{R}$ se $0 = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n)}(a) \neq f^{(n+1)}(a)$ para um $n \in \mathbb{N}$ par.

5.2.3. Corolário. *Qualquer sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Por simplicidade, suponhamos que $c_n \geqslant c_{n+1} \geqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e algum $c \in \mathbb{R}$. Se a sequência não é fundamental, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$, existem $n > m > N$ tais que $c_m - c_n \geqslant \varepsilon$. Definimos $n_1 := 1$. Tomando $N = n_1$, temos $n_2 > m > n_1$ tais que $c_m - c_{n_2} \geqslant \varepsilon$. Logo, $c_{n_1} - c_{n_2} \geqslant \varepsilon$. Por indução, suponhamos que já temos escolhidos $n_1 < \cdots < n_k$ tais que $c_{n_i} - c_{n_{i+1}} \geqslant \varepsilon$ para todo $i = 1, \dots, k-1$. Tomando $N = n_k$, encontramos $n_{k+1} > m > n_k$ tais que $c_m - c_{n_{k+1}} \geqslant \varepsilon$, implicando $c_{n_k} - c_{n_{k+1}} \geqslant \varepsilon$. Agora, $c_{n_1} - k\varepsilon \geqslant c_{n_{k+1}}$ e a sequência não é limitada ■

Suponhamos que existe uma cota superior (respectivamente, inferior) de A (neste caso, A é dito *limitado por cima* (respectivamente, *por baixo*)) e que $A \neq \varnothing$. Então existe a menor (respectivamente, maior) cota superior (respectivamente, inferior) de A, chamada *supremo* (respectivamente, *ínfimo*) de A e denotada por $\sup A$ (respectivamente, $\inf A$). (Por definição, $\sup A = \infty$ se A não é limitado por cima, $\inf A = -\infty$ se A não é limitado por baixo, $\sup \varnothing = -\infty$ e $\inf \varnothing := \infty$.) Realmente, seja c uma cota superior de A tal que $\varepsilon + A \not\leqslant c$ para qualquer $\varepsilon > 0$ (onde $\varepsilon + A := \{\varepsilon + a \mid a \in A\}$). Então c é a menor cota superior de A, pois existe uma sequência $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Portanto, podemos supor que, para qualquer cota superior $A \leqslant c$, existe um $z \in \mathbb{Z}$ tal que $2^z + A \leqslant c$. Já que $A \neq \varnothing$, existe o maior tal z, denotado por $z(c)$. Note que $c - 2^{z(c)}$ também é uma cota superior de A e $z\big(c - 2^{z(c)}\big) < z(c)$, pois, caso contrário, $2^{z(c)} + A \leqslant c - 2^{z(c)}$, implicando $2^{z(c)+1} + A \leqslant c$ e contradizendo a escolha de $z(c)$. Assim, construímos uma sequência decrescente c_n, $n \in \mathbb{N}$, de cotas superiores de A tal que $z(c_n) \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência decrescente. De $A \neq \varnothing$ segue que a sequência c_n é limitada. Pelo Corolário 5.2.3, temos $c := \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Claro que $c \leqslant c_n$ e que c é uma cota superior de A (para todo $a \in A$, temos $a \leqslant c_n$, implicando $a \leqslant c$). Portanto, $2^{z(c)} \leqslant 2^{z(c_n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma contradição. (Para o ínfimo, a demonstração é semelhante.)

O supremo (respectivamente, ínfimo) satisfaz a seguinte propriedade característica: $A \leqslant \sup A$ (respectivamente, $\inf A \leqslant A$) e $A \leqslant c$ (respectivamente, $c \leqslant A$) implica $\sup A \leqslant c$ (respectivamente, $c \leqslant \inf A$).

5.3. Convergência uniforme. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos a *norma* de f (sobre A) pela fórmula $||f|| := ||f||_A := \sup |f|(A)$. Claro que $||f|| = 0$ implica $f = 0$.

5.3.1. Lema. *Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções. Então $||f + g|| \leqslant ||f|| + ||g||$ e $||fg|| \leqslant ||f|| \cdot ||g||$.*

Demonstração. Para qualquer $a \in A$, temos $\big|f(a) + g(a)\big| \leqslant \big|f(a)\big| + \big|g(a)\big| \leqslant ||f|| + ||g||$ e $\big|f(a) \cdot g(a)\big| = \big|f(a)\big| \cdot \big|g(a)\big| \leqslant ||f|| \cdot ||g||$ ■

5.3.2. Definição. Dizemos que uma sequência de funções $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, converge *uniformemente* a uma função $f : A \to \mathbb{R}$ e escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ se $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$. O fato que $||f_n - f|| \leqslant \varepsilon$ significa que o gráfico de f_n está situado na "faixa" de largura 2ε em torno do gráfico de f. Consequentemente, a convergência uniforme implica que o gráfico de f_n está na faixa, de largura arbitrariamente pequena, em torno do gráfico de f para todo n suficientemente grande.

5.3.3. Lema. *Qualquer função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é o limite uniforme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ de uma sequência de funções escada $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.*

5.3.4. Lema. *Sejam $f, f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funções e $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ o limite uniforme. Então $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$ para todo $a \in A$.*

Demonstração. Note que $\big|f_n(a) - f(a)\big| \leqslant ||f_n - f||$ tende a 0 quando $n \to \infty$ ■

5.4. Integral de função integrável. Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita *integrável* se f é o limite uniforme de uma sequência de funções escada $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Neste caso, a sequência numérica $I_n := \displaystyle\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ é fundamental. Com efeito, pelos Lemas 5.1.2 e 5.3.1, $|I_m - I_n| = \Big|\displaystyle\int_a^b \big(f_m(x) - f_n(x)\big)\mathrm{d}x\Big| \leqslant ||f_m - f_n||(b-a) = ||f_m - f + f - f_n||(b-a) \leqslant \big(||f_m - f|| + ||f - f_n||\big)(b-a)$ tende a 0 quando $m, n \to \infty$. Usando o Critério 5.2.2, definimos $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} I_n$. Essa definição não depende da escolha da sequência de funções escada. Realmente, se $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = f$ para uma outra sequência de funções escada $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, então $||f_n - g_n|| = ||f_n - f + f - g_n|| \leqslant ||f_n - f|| + ||f - g_n||$ tende a 0 quando $n \to \infty$. Portanto, denotando $J_n := \displaystyle\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x$, concluímos que, pelo Lema 5.1.2, $|I_n - J_n| = \Big|\displaystyle\int_a^b \big(f_n(x) - g_n(x)\big)\mathrm{d}x\Big| \leqslant ||f_n - g_n||(b-a)$ tende a 0, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} J_n$.

Qualquer função integrável f é limitada, isto é, $||f|| < \infty$. Com efeito, $||f_n - f|| < 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$, onde f_n é uma função escada. Pelo Lema 5.3.1, $||f|| = ||-f_n + f_n - f|| \leqslant ||f_n|| + ||f_n - f|| < ||f_n|| + 1 < \infty$, pois $||f_n|| < \infty$.

Intuitivamente, a integral de f é a área sob o gráfico de f, levando em conta o sinal da área, pois a menos da área de uma faixa, de largura pequena, em torno do gráfico de f, a área em questão coincide com a área sob o gráfico da função escada f_n e a área da faixa tende a 0 quando $n \to \infty$.

Da mesma maneira, a integral $\displaystyle\int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\mathrm{d}x$ produz a área da figura limitada por gráficos de funções integráveis $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

5.4.1. Observação. *Sejam $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ uma função e $b \in [a,c]$. As funções $f|_{[a,b]}$ e $f|_{[b,c]}$ são integráveis se e só se a função f é integrável.*

Demonstração. Note que $\max\big(||g||_{[a,b]}, ||g||_{[b,c]}\big) = ||g||_{[a,c]}$ para qualquer função $g : [a,c] \to \mathbb{R}$ ■

5.4.2. Proposição. *Sejam $f, g, h_n : [a,c] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funções integráveis, $h : [a,c] \to \mathbb{R}$ uma função, $b \in [a,c]$ e $s, t \in \mathbb{R}$. Então os seguintes fatos são válidos.*

- *As funções $f|_{[a,b]}$ e $f|_{[b,c]}$ são integráveis e $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.*
- *A função $sf + tg$ é integrável e $\displaystyle\int_a^c \big(sf(x) + tg(x)\big)\mathrm{d}x = s\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + t\int_a^c g(x)\mathrm{d}x$.*
- *Se $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [a,c]$, então $\displaystyle\int_a^c g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.*
- *A função $|f|$ é integrável e $\Big|\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\Big| \leqslant \int_a^c \big|f(x)\big|\mathrm{d}x$.*
- $\Big|\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\Big| \leqslant ||f||(c-a)$.
- *A função fg é integrável.*
- *Se $\big|f(x)\big| \geqslant m > 0$ para todo $x \in [a,c]$ e algum $m \in \mathbb{R}$, a função $\frac{1}{f}$ é integrável.*
- *Se $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$ é limite uniforme, então h é uma função integrável e $\displaystyle\int_a^c h(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^c h_n(x)\mathrm{d}x$.*

Em outras palavras, limite uniforme comuta com integral. Em particular, toda função contínua é integrável pelo Lema 5.3.3.

Demonstração. • O fato segue do Lema 5.1.2 e da Observação 5.4.1.
• O fato segue imediatamente dos Lemas 5.1.2 e 5.3.1.
• Pelo item anterior, basta considerar o caso $g = 0$. Seja $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ o limite uniforme, onde $f_n : [a,c] \to \mathbb{R}$ são funções escada. Definimos funções escada $g_n := \max(f_n, 0)$. Se $f_n(x) \geqslant 0$, então

$\big|f(x)-g_n(x)\big| = \big|f(x)-f_n(x)\big| \leqslant ||f-f_n||$. Se $f_n(x)<0$, então $\big|f(x)-g_n(x)\big| = f(x) < f(x)-f_n(x) = \big|f(x)-f_n(x)\big| \leqslant ||f-f_n||$, pois $f(x)\geqslant 0$. Logo, $||f-g_n|| \leqslant ||f-f_n||$. Em outras palavras, obtemos o limite uniforme $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = f$ com $g_n(x)\geqslant 0$ para todos $x\in[a,c]$ e $n\in\mathbb{N}$. Resta aplicar o Lema 5.1.2 para as funções escada g_n.

• Segue imediatamente do item anterior.

• Segue imediatamente de itens anteriores.

• Sejam $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ e $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ os limite uniformes, onde $f_n, g_n : [a,c]\to\mathbb{R}$ são funções escada. Então, pelo Lema 5.3.1,

$$||f_ng_n-fg|| = \big|\big|f(g_n-g)+(f_n-f)(g_n-g)+(f_n-f)g\big|\big| \leqslant ||f||\cdot||g_n-g||+||f_n-f||\cdot||g_n-g||+||f_n-f||\cdot||g||$$

tende a 0 quando $n\to\infty$ e f_ng_n, $n\in\mathbb{N}$, são funções escada pelo Lema 5.1.2.

• Seja $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ o limite uniforme, onde $f_n : [a,c]\to\mathbb{R}$ são funções escada. Então, para $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $||f_n-f|| < \frac{m}{2}$. Portanto,

$$m \leqslant |f(x)\big| \leqslant \big|f_n(x)\big| + \big|f(x)-f_n(x)\big| \leqslant \big|f_n(x)\big| + \tfrac{m}{2}$$

para todos n suficientemente grande e $x\in[a,c]$, implicando $|f_n(x)\big| \geqslant \frac{m}{2} > 0$. Consequentemente, $\frac{1}{f_n}$ é uma função escada pelo Lema 5.1.2 e $\big|\frac{1}{f_n(x)}-\frac{1}{f(x)}\big| = \frac{\big|f(x)-f_n(x)\big|}{\big|f_n(x)\big|\cdot\big|f(x)\big|} \leqslant \frac{2||f_n-f||}{m^2}$, ou seja, $||\frac{1}{f_n}-\frac{1}{f}|| \leqslant \frac{2||f_n-f||}{m^2}$ para tais n.

• Sejam $h_{nk} : [a,c]\to\mathbb{R}$, $n,k\in\mathbb{N}$, funções escada tais que $\lim\limits_{k\to\infty} h_{nk} = h_n$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, escolhemos $k_n\in\mathbb{N}$ tal que $||h_{nk_n}-h_n|| < \frac{1}{n}$. Então a sequência de funções escada h_{nk_n}, $n\in\mathbb{N}$, converge uniformemente a f. Realmente, $||h_{nk_n}-h|| \leqslant ||h_{nk_n}-h_n||+||h_n-h||$ tende a 0 quando $n\to\infty$. Portanto, h é integrável. O resto segue do item anterior: $\Big|\int_a^c h_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^c h(x)\mathrm{d}x\Big| \leqslant ||h_n-h||(c-a)$ ■

5.4.3. Lema (teorema fundamental do cálculo)**.** *Seja $f : [a,c]\to\mathbb{R}$ uma função integrável. Então a função $F : [a,c]\to\mathbb{R}$ definida pela regra $F(y) := \int_a^y f(x)\mathrm{d}x$ é contínua. Se f é contínua em $b\in[a,c]$, então F é derivável em b e $F'(b) = f(b)$.*

Demonstração. Para $y_1,y_2\in[a,c]$, $y_1\leqslant y_2$, temos

$$\big|F(y_2)-F(y_1)\big| = \Big|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\mathrm{d}x\Big| \leqslant \int_{y_1}^{y_2}\big|f(x)\big|\mathrm{d}x \leqslant ||f||_{[a,c]}(y_2-y_1)$$

pela Proposição 5.4.2, implicando a continuidade de F.

Suponhamos que f é contínua em $b\in[a,c]$. Tomemos $\varepsilon\neq 0$. Por simplicidade, suponhamos que $\varepsilon>0$ e $b+\varepsilon\leqslant c$. Denotamos $m(\varepsilon) := \inf f|_{[b,b+\varepsilon]}$ e $M(\varepsilon) := \sup f|_{[b,b+\varepsilon]}$. Pela Proposição 5.4.2, $F(b+\varepsilon)-F(b) = \int_b^{b+\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ e $m(\varepsilon)\varepsilon \leqslant \int_b^{b+\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(\varepsilon)\varepsilon$. Logo, $m(\varepsilon) \leqslant \frac{F(b+\varepsilon)-F(b)}{\varepsilon} \leqslant M(\varepsilon)$. Resta observar que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} m(\varepsilon) = f(b) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} M(\varepsilon)$ pela continuidade de f em b ■

Seja $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ uma função. Uma função derivável $F : [a,b]\to\mathbb{R}$ se chama *primitiva* de f se $F' = f$. Pelo Lema 4.10.6, a função primitiva de f é única a menos de uma constante. Pelo Lema 5.4.3, o cálculo da derivada e o cálculo da integral são, em um certo sentido, mutuamente inversos. Levando em conta essa observação, às vezes, escreve-se a primitiva (se existir) como a *integral indefinida* $\int f(x)\mathrm{d}x$ de f; essa é uma função conhecida a menos de uma constante.

5.4.4. Corolário. *Qualquer função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possui uma primitiva* ■

A regra de Leibniz implica o

5.4.5. Lema (integração por partes)**.** *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções deriváveis com derivadas contínuas. Então $\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$, onde $h(x)\Big|_{x=a}^{x=b} := h(b) - h(a)$* ■

É conveniente denotar $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ caso $a > b$. Com essa notação (que utilizamos em seguida), a igualdade no primeiro item da Proposição 5.4.2 vale sem restrição para a, b, c desde que as três integrias envolvidas façam sentido.

A regra de cadeia se transforma no

5.4.6. Lema (regra de substituição)**.** *Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável com derivada contínua e seja $f : \varphi[a,b] \to \mathbb{R}$ (pelo Teorema 3.9, a imagem $\varphi[a,b]$ é um intervalo fechado) uma função contínua. Então $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t$* ■

Para memorizar a última fórmula, podemos imaginar que substituímos $\varphi(t)$ no lugar de x na fórmula $\int_u^v f(x)\mathrm{d}x$. Já que x varia de u a v e temos $u = \varphi(a)$ e $v = \varphi(b)$ para a e b apropriados, entendemos que t varia de a a b. Obtemos a fórmula $\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\mathrm{d}\varphi(t)$. Usando (de maneira um pouco ingênua) a igualdade $\mathrm{d}\varphi(t) = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ de acordo com a notação $\varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}$, chegamos enfim à fórmula no Lema 5.4.6.

5.5. Funções exponenciais e logaritmos. Para as definições rigorosas, "esquecemos", para começar, o conteúdo do item 2.4.

Dado qualquer $y > 0$, definimos $\ln y := \int_1^y \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Pelo Lema 5.4.3, $(\ln y)' = \frac{1}{y} > 0$. Logo, pelo Lema 4.10.1, a função $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é crescente e derivável com derivada contínua. Sejam $y_1, y_2 > 0$. Pela Proposição 5.4.2 e pelo Lema 5.4.5,

$$\ln(y_1y_2) = \int_1^{y_1y_2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^{y_1} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{y_1}^{y_1y_2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln y_1 + \int_1^{y_2} \frac{\mathrm{d}w}{w} = \ln y_1 + \ln y_2$$

(fazendo $w := \frac{x}{y_1}$). Daí segue que $\ln y^{-1} = -\ln y$. Pela Proposição 5.4.2, $\ln 2 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \geqslant \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}$, implicando $\ln 2^n \geqslant \frac{n}{2}$ para $n \in \mathbb{N}$. Sendo ln função crescente, $\lim\limits_{y\to\infty} \ln y = \infty$. De $\ln y^{-1} = -\ln y$, concluímos que $\lim\limits_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$. Pelo Teorema 3.9, a imagem da função ln é todo $\mathbb{R}$. Pelo Lema 2.1, obtemos a função inversa $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$. De $\ln 1 = 0$ e $\ln(y_1y_2) = \ln y_1 + \ln y_2$, concluímos $\exp 0 = 1$ e $\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2$.

5.5.1. Lema. *Seja $f : [a,b] \to [c,d]$ uma função sobrejetora derivável com derivada contínua e nunca nula. Então f é uma bijeção e sua inversa é derivável.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.9, a derivada f' é sempre positiva ou sempre negativa. Supondo por simplicidade que f' é positiva, vemos que f é crescente pelo Lema 4.10.1. Consequentemente, f é uma bijeção. Pelo Teorema 3.9, $m := \inf f'[a,b] > 0$. Sejam $y_1, y_2 \in [c,d]$, $y_1 < y_2$. Façamos $x_1 := f^{-1}(y_1) < x_2 := f^{-1}(y_2)$ Pelo Corolário 4.8, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = f'(x) \geqslant m$ para algum $x \in [x_1, x_2]$. Portanto,

$\big|f^{-1}(y_2)-f^{-1}(y_1)\big| \leqslant \frac{|y_2-y_1|}{m}$, implicando a continuidade de f^{-1}. Agora, $\lim\limits_{y_0\neq y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim\limits_{x_0\neq x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$ para $x_0 := f^{-1}(y_0)$ (e $x := f^{-1}(y)$) ■

Pelo Lema 5.5.1, a função exp é derivável. Pela Proposição 4.3, $(\exp x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{1/y} = y = \exp x$, onde $x := \ln y$.

Para $a>0$, definimos $a^x := \exp(x\ln a)$.

Então $a^{x_1+x_2} = \exp\big((x_1+x_2)\ln a\big) = \exp(x_1\ln a)\cdot\exp(x_2\ln a) = a^{x_1}\cdot a^{x_2}$ e $a^0=\exp 0 = 1$. Para $b\in\mathbb{R}$, temos $(a^x)^b = \big(\exp(x\ln a)\big)^b = \exp\Big(b\ln\big(\exp(x\ln a)\big)\Big) = \exp(bx\ln a) = a^{bx}$. Para $a_1,a_2>0$, temos $(a_1\cdot a_2)^x = \exp\big(x\ln(a_1a_2)\big) = \exp(x\ln a_1 + x\ln a_2) = \exp(x\ln a_1)\cdot\exp(x\ln a_2) = a_1^x\cdot a_2^x$.

Assim obtemos todas as propriedades do item 2.4 de funções exponenciais e logaritmos.

5.6. Integração de funções racionais. Por definição, uma *função racional* r é a fração de dois polinômios, isto é, $r(x) = \frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0} = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x) := a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0$ e $q(x) := b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0$ são *polinômios.* As funções do tipo $\frac{1}{(x+b)^k}$ ou do tipo $\frac{1}{(x^2+b_1x+b_0)^k}$ ou do tipo $\frac{x}{(x^2+b_1x+b_0)^k}$, onde $k\in\mathbb{N}$ e o polinômio $x^2+b_1x+b_0$ não possui raízes reais, se chamam *frações parciais.* É conhecido que toda função racional r admite a forma $r = p+\sum_{i=1}^l c_if_i$, onde p é um polinômio, os f_i's são frações parciais e $c_i\in\mathbb{R}$. Assim, para saber integrar uma função racional, basta saber integrar frações parciais. Fazendo substituição linear $y=ax+b$, reduzimos o problema à integração de frações $\frac{1}{x^k}$, $\frac{1}{(x^2+1)^k}$ e $\frac{x}{(x^2+1)^k}$. Fazendo derivadas, é fácil ver que $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|+c$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \tan^{-1}x+c$, $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac12\ln|x^2+1|+c$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^k} = -\frac{1}{(k-1)x^{k-1}}+c$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^k} = \frac{x}{(2k-2)(x^2+1)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2k-2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{k-1}}+c$, $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^k} = \frac{1}{(2-2k)(x^2+1)^{k-1}}+c$ para $1<k\in\mathbb{N}$, onde $c\in\mathbb{R}$ é uma constante.

5.7. Integrais impróprias. Sejam $\mathbb{R}\ni a<b$, onde $b\in\mathbb{R}$ ou $b=\infty$, e seja $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ uma função integrável sobre $[a,t]$ para qualquer $t\in[a,b)$. Dizemos que a *integral imprópria* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *converge* em b (respectivamente, *diverge* em b) se existe (respectivamente, não existe) o limite finito $\displaystyle\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$. Caso este exista, definimos $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$. Da mesma forma se define a integral imprópria relativa ao limite inferior de integração (e também relativa a ambos os limites de integração). Aqui vamos tratar apenas o limite superior da integração, pois as outras variantes são bem análogas.

Dos Critério 5.2.2 e Proposição 3.2 segue o

5.7.1. Critério (de Cauchy). *A integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *converge em* b *se e só se* $\displaystyle\lim_{\substack{s,t\to b\\ s\leqslant t}}\int_s^t f(x)\mathrm{d}x = 0$, *isto é,* $\forall\varepsilon>0\ \exists b_0\in[a,b)\ \forall s,t\in(b_0,b)\ \Big|\displaystyle\int_s^t f(x)\mathrm{d}x\Big| < \varepsilon$ ■

5.7.2. Critério. *A integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *converge em* b *se existe* $M>0$ *tal que* $\displaystyle\int_a^t \big|f(x)\big|\mathrm{d}x < M$ *para todo* $t\in[a,b)$.

Demonstração. Pelos Corolário 5.2.3 e Proposições 5.4.1 e 3.2, existe o limite finito $\displaystyle\lim_{t\to b}\int_a^t\big|f(x)\big|\mathrm{d}x$.

Logo, $\lim\limits_{\substack{s,t\to b\\ s\leqslant t}} \int_s^t \big|f(x)\big|\mathrm{d}x = 0$. Pela Proposição 5.4.1, $\Big|\int_s^t f(x)\mathrm{d}x\Big| \leqslant \int_s^t \big|f(x)\big|\mathrm{d}x$ ∎

5.7.3. Critério (de comparação). *Se a integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *converge em* b *e* $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ *é uma função integrável sobre* $[a,t)$ *para todo* $t \in [a,b)$ *tal que* $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in [a,b)$*, então a integral* $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *converge em* b*.*

Se a integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *diverge em* b *e* $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ *é uma função integrável sobre* $[a,t)$ *para todo* $t \in [a,b)$ *tal que* $g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in [a,b)$*, então a integral* $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *diverge em* b*.*

Demonstração. Pela Proposição 5.4.1, para a primeira parte, temos $\Big|\int_s^t f(x)\mathrm{d}x\Big| \geqslant \Big|\int_s^t g(x)\mathrm{d}x\Big|$ e, para a segunda parte, temos $\Big|\int_s^t g(x)\mathrm{d}x\Big| \geqslant \Big|\int_s^t f(x)\mathrm{d}x\Big|$ ∎

5.7.4. Exemplos. A integral $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge em 0 se $p < 1$ e diverge em 0 se $p \geqslant 1$. A integral $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge em ∞ se $p > 1$ e diverge em ∞ se $p \leqslant 1$.

A palavra "imprópria" é bem apropriada para as integrais em questão, pois usando um conceito adequado de funções integráveis, o de Lebesgue, o problema desaparece.

5.8. Comprimento de arco. Seja $f(t) := \big(f_1(t), f_2(t)\big)$, onde as funções $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ são deriváveis, um *caminho parametrizado*. Suponhamos que a função $|\dot{f}| := \sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2}$ é integrável. Por exemplo, tal função é integrável se as derivadas f_1', f_2' são contínuas (por partes). Então $\ell f := \int_a^b \big|\dot{f}(t)\big|\mathrm{d}t$ é o *comprimento* do caminho percorrido. Mudando a parametrização do caminho f, cujas derivadas f_1', f_2' são contínuas, através de uma função $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$ com derivada contínua e nunca nula, obtemos $\ell(f\circ\varphi) = \int_{a'}^{b'} \Big|\dot{f}\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\Big|\mathrm{d}s = \int_a^b \big|\dot{f}(t)\big|\mathrm{d}t = \ell f$ pelo Lema 5.4.6. Assim, em um certo sentido, o comprimento não depende da parametrização. Um exemplo típico é o comprimento de gráfico de uma função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ com derivada contínua. Este gráfico Γ_g pode ser parametrizado por $f(t) := \big(t, g(t)\big)$. Logo, $\ell\Gamma_g = \int_a^b \sqrt{1 + \big(g'(t)\big)^2}\mathrm{d}t$.

5.9. Dois problemas práticos: o volume de sólido com simetria rotacional e a área de superfície de revolução. Calculando a área sob o gráfico de uma função no item 5.4, de fato, aproximamos a função por funções escada, ou seja, por funções constantes por partes, de modo que a diferença entre correspondentes áreas tende "obviamente" a zero. Calculando o comprimento de um caminho parametrizado, fazemos algo parecido: de fato, aproximamos o caminho f por caminhos com velocidade constante por partes, ou seja, por caminhos poligonais inscritos no caminho f. Essa "idéia" tem infinitas variações, às vezes, práticas.

5.9.1. Cálculo de volume por cascas cilíndricas. Sejam $0 \leqslant a < b$ e seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável que é nunca negativa. Denotamos por F_f a figura limitada pelo gráfico de f e por três segmentos ligando consecutivamente os pontos $\big(a, f(a)\big)$, $(a,0)$, $(b,0)$, $\big(b, f(b)\big)$. Consideramos o plano da figura F_f como estando no espaço e seja S_f o sólido obtido pela rotação de F_f em torno do eixo y. Queremos calcular o volume $v(S_f)$ de S_f.

Se f for constante, $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$, o cálculo é fácil: a área da coroa circular é igual a $\pi b^2 - \pi a^2$, portanto, $v(S_f) = \pi c(b^2 - a^2)$, ou seja, $v(S_f) = 2\pi \displaystyle\int_a^b f(x)x\mathrm{d}x$. Agora, podemos calcular o volume pela mesma fórmula caso f seja uma função escada.

Se f_n é uma função escada e f é uma função integrável tais que $||f_n - f|| < \varepsilon$, então $\big|v(S_{f_n}) - v(S_f)\big| \leqslant 2\pi\varepsilon(b^2 - a^2)$, pois a "diferença" entre os sólidos S_{f_n} e S_f está contida na casca cilíndrica cuja base tem raios a e b e cuja altura é no máximo 2ε. Consequentemente, para o limite uniforme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} v(S_{f_n}) = v(S_f)$.

Assim, a resposta é $v(S_f) = 2\pi \displaystyle\int_a^b f(x)x\mathrm{d}x$ por definição de integral.

5.9.2. Área de superfície de revolução. Sejam $a < b$ e seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função que é nunca negativa e tem derivada contínua. Denotamos por Γ_f o gráfico de f e por R_f a superfície de revolução, isto é, aquela criada pela rotação de Γ_f em torno do eixo x. Queremos calcular a área $a(R_f)$ de R_f.

Se f for linear, $f(x) = cx + d$ para todo $x \in [a, b]$, o cálculo é um exercício de segundo grau. A área da superfície lateral do tronco de um cone é a diferença das áreas de setores circulares concêntricos. Denotando por α o ângulo dos setores e por r, R os correspondentes raios, a área lateral do tronco do cone é igual a $(R^2 - r^2)\frac{\alpha}{2}$. Em nosso caso, temos $R - r = (b - a)\sqrt{1 + c^2}$, $r\alpha = 2\pi(ca + d)$ e $R\alpha = 2\pi(cb + d)$ (supondo $c > 0$). Daí, $(R - r)\alpha = 2\pi c(b - a)$ e, portanto, $\alpha = \frac{2\pi c}{\sqrt{1+c^2}}$. A área é igual a $\frac{4\pi^2\left((cb+d)^2-(ca+d)^2\right)}{2\alpha}$, ou seja, a $\frac{2\pi\left(c(a+b)+2d\right)(b-a)\sqrt{1+c^2}}{2}$ (para $c \leqslant 0$, obtemos o mesmo resultado). Assim, $a(R_f) = 2\pi\frac{f(a)+f(b)}{2}(b - a)\sqrt{1 + c^2}$. Equivalentemente, podemos escrever $a(R_f) = 2\pi \displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\mathrm{d}x$.

É claro que essa mesma fórmula vale no caso de f linear por partes.

No caso da função f arbitrária, a função $f\sqrt{1 + (f')^2}$ é o limite uniforme de funções $f_n\sqrt{1 + (f_n')^2}$, onde as f_n's são lineares por partes,[3] e a resposta é $a(R_f) = 2\pi \displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\mathrm{d}x$ por definição de integral.

5.10. Alguns truques de integração, sujos e inúteis. No início do século passado, o título de engenheiro foi considerado como muito nobre, pois qualquer engenheiro sabia (além de como cuidadosamente construir um prédio, uma ponte ou uma fábrica) as matemática, física, química, gramática e várias outras coisas, principalmente femininas e acentuadas. Uma parte microscópica dos conhecimentos profundos nas áreas mencionadas era saber como calcular qualquer integral do mundo. Hoje em dia, apenas os melhores físicos teóricos são capazes disto. Mas, com o tempo, o país necessita de mais e mais apertadores de botões. Em seguida, explica-se como apertar alguns destes.

5.10.1. Integrais trigonométricas. Caso um (ou ambos) dos $m, n \in \mathbb{Z}$ seja ímpar, as integrais $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m x\cdot\cos^n x\mathrm{d}x$ se reduzem as integrais de funções racionais após a substituição $t = \cos x$ ou $t = \operatorname{sen} x$. No caso de m, n pares, às vezes, são úteis as fórmulas $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$ e outras fórmulas trigonométricas. Alguns casos se resolvem pela substituição $t = \tan x$ ou $t = \frac{1}{\cos x}$. Note também que $\displaystyle\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c$ e $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln|1 + \operatorname{sen} x| - \ln|\cos x| + c$. Mas todas essas receitas tem um paladar (al)químico.

[3]Na verdade, omitimos aqui uma demonstração rigorosa. Mas essa não é difícil.

Uma função de duas variáveis da forma $p(x,y) := \sum\limits_{m,n\in\mathbb{N}} c_{m,n}x^{m-1}y^{n-1}$ (o somatório é finito) se chama *polinômio* em x, y. Uma função de duas variáveis da forma $r(x,y) := \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$, onde $p(x,y)$ e $q(x,y)$ são polinômios em x, y, é dita função *racional* em x, y.

Seja $r(x,y)$ uma função racional em x, y. A substituição $t = \operatorname{sen} x$ reduz a integral $\int r(\operatorname{sen} x, \cos x)\mathrm{d}x$ à integral $\int \frac{r(t,\sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$. Assim, precisamos aprender como integrar a função do tipo $r(t, \sqrt{1-t^2})$ (com uma outra função racional $r(x,y)$). Para um matemático qualificado, basta pronunciar o fato que toda cônica é racional; isto reduz o problema à integração de uma função racional de uma variável. (Vide o próximo item.)

5.10.2. "Substituição trigonométrica". Consideramos a integral $\int r(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}t$, onde $r(x,y)$ é uma função racional em x, y. Queremos reduzir o cálculo dessa integral para o de uma função racional de uma variável. Após uma mudança linear de x, a expressão $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se transforma em $\sqrt{x^2+1}$ ou $\sqrt{x^2-1}$ ou $\sqrt{1-x^2}$ ou $\sqrt{x}$ ou 1. Os dois últimos casos se reduzem à integração de uma função racional de uma variável (fazendo a substituição $x = t^2$ se necessário). Nos primeiros três, utilizamos as substituições $x = \frac{2t}{t^2-1}$, $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$, $x = \frac{2t}{t^2+1}$, respectivamente, pois $\sqrt{x^2+1} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$, $\sqrt{x^2-1} = \frac{2t}{t^2-1}$, $\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, respectivamente, nestes casos.