SMA0501. CÁLCULO I. PROBLEMAS

$2^{\underline{o}}$ semestre de 2015

1. Utilizando quantificadores e símbolos lógicos, escreva sem palavras as seguintes afirmações e decida se são válidas:

1.1. Um apropriado número natural é maior do que um dado número real.

1.2. Qualquer que seja um número real positivo, encontra-se um numero racional positivo menor do que ele.

1.3. O fato que $1 = 2$ implica $2 \times 2 = 4$.

1.4. Existe um número real não-negativo tão pequenininho que é menor do que qualquer número positivo, mas ainda não é nulo.

2. Seja $P(a, b)$ uma afirmação sobre a e b. Verifique se valem as seguintes afirmações:

2.1. $\big(\forall a\ \exists b\ P(a, b)\big) \Longrightarrow \big(\exists b\ \forall a\ P(a, b)\big)$.

2.2. $\big(\exists b\ \forall a\ P(a, b)\big) \Longrightarrow \big(\forall a\ \exists b\ P(a, b)\big)$.

3. O que está errado com as seguintes sequências de símbolos?

3.1. $3 \subset \{0, 3\}$.

3.2. $C := \{c \mid C \neq C\}$.

3.3. $C := \{c \mid 1 \neq 1\}$.

4. Sejam A, B, C conjuntos. Prove que

4.1. $A \cap B$ é o maior subconjunto comum de A e B. (Qual seria o menor?)

4.2. $A \cup B$ é o menor conjunto que contém A e B.

4.3. $(A \subset B \text{ e } B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$.

4.4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

4.5. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

4.6. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

5. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções e sejam $A' \subset A$ e $C' \subset C$ subconjuntos. Prove que

5.1. f é injetora se $g \circ f$ é injetora.

5.2. g é sobrejetora se $g \circ f$ é sobrejetora.

5.3. f é bijetora se $A = C$ e $g \circ f = 1_A$.

5.4. $(g \circ f)(A') = g\big(f(A')\big)$.

5.5. $(g \circ f)^{-1}(C') = f^{-1}\big(g^{-1}(C')\big)$.

6. Utilizando as funções $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$

$$f_1 : x \mapsto 2015, \quad f_2 : x \mapsto -x, \quad f_3 : x \mapsto x^8, \quad f_4 := 1_{\mathbb{R}}, \quad f_5(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x<0 \\ x \text{ se } x\geq 0 \end{cases},$$

suas compostas e operações com funções, expresse

6.1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x - 2015)^8$.

6.2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$.

7. Sejam $1 \neq a, b, c, d > 0$. Prove que

7.1. $\log_a b \log_b a = 1$.

7.2. $\log_d(\log_a b) + \log_d(\log_b c) + \log_d(\log_c a) = 0$.

7.3. $\log_a b \log_b c = \log_a c$.

8. Definimos seno e coseno *hiperbólicos* $\operatorname{senh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Prove as identidades seguintes:

8.1. $\cosh(-x) = \cosh x$ e $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

8.2. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$ e $\operatorname{senh}(x_1 + x_2) = \operatorname{senh} x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \operatorname{senh} x_2$.

8.3. $\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \operatorname{senh} x_1 \operatorname{senh} x_2$.

9. Calcule os seguintes limites (e verifique se existem).

9.1. $\lim\limits_{1 \neq x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$.

9.2. $\lim\limits_{0 \neq x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2}$.

9.3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

9.4. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - x} - x$.

9.5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2(1 + \operatorname{sen}^2 x)}{(x + \operatorname{sen} x)^2}$.

9.6. $\lim\limits_{x \to \infty} x(\sqrt{x + 2} - x)$.

9.7. $\lim\limits_{1 \neq x \to 1} \frac{1}{x - 1}$.

10. Quais das seguintes definições é equivalente à definição do limite $\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) = b$ para uma função numérica $f : A \to B$?

10.1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ |x - a| \leq \delta \Longrightarrow \big|f(x) - b\big| < \varepsilon$.

10.2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ |x - a| < \delta \Longrightarrow \big|f(x) - b\big| \leqslant \varepsilon$.

10.3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ |x - a| < 5\delta \Longrightarrow \big|f(x) - b\big| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

10.4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ |x - a| = \delta \Longrightarrow \big|f(x) - b\big| < \varepsilon$.

10.5. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ \big|f(x) - b\big| \geqslant \varepsilon \Longrightarrow |x - a| \geqslant \delta$.

11. Prove que as funções seguintes são contínuas.

11.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := |x|$.

11.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 2^x & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$.

12. Em quais pontos são contínuas as funções seguintes?

12.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

12.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

12.3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

12.4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$.

12.5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

13. Por que as seguintes equações admitem soluções?

13.1. $\operatorname{sen} x = x - 1$.

13.2. $2^x = \cos x$.

14. Encontre a equação da reta tangente no ponto $(1, 2)$ ao gráfico das seguintes funções:

14.1. $f(x) := x + \frac{1}{x}$.

14.2. $f(x) := x + \cos(x - 1)$.

15. Calcule os seguintes limites (e verifique se existem).

15.1. $\lim\limits_{0 \neq x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$.

15.2. $\lim\limits_{0 \neq x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$.

16. Calcule as derivadas das funções seguintes.
16.1. $\operatorname{sen} \frac{\cos x}{x^2+1}$.
16.2. $2^{(x^2+1)^{\sqrt{2}}}$.
16.3. $\cos^{-1}\big(\log_3(\operatorname{sen}^2 x + 1.5)\big)$.
16.4. $\operatorname{sen}^{-1} x \cdot \tan^{-1} x \cdot \tan x + 2015$.

17. Calcule $f'(0)$ para a função $f(x)$ satisfazendo as seguintes identidades.
17.1. $\big(f(x)\big)^3 + f(x) + x^3 + 2x = 0$.
17.2. $\big(f(x)\big)^3 + 3f(x) + \operatorname{sen}^2 y + x^3 + 9x + 2\operatorname{sen}^2 x = 0$.

18. Utilizando a fórmula de Taylor, calcule os seguintes números com a exatidão $\pm\frac{1}{24}$.
18.1. $\cos 1$.
18.2. $\operatorname{sen} 1$.
18.3. e.

19. Calcule os seguintes limites (e verifique se existem).
19.1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$.
19.2. $\lim\limits_{x\to\infty} (2^x + x)^{\frac{1}{x}}$.
19.3. $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x)$.
19.4. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$.

20. Escolha a forma explícita de um jardim de área fixa que minimiza o comprimento da cerca ao seu redor.
20.1. O jardim tem a forma de um triângulo retângulo.
20.2. O jardim tem a forma de um setor do disco.

21. Esboce o gráfico das seguintes funções marcando o domínio de definição das funções, os pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados, todos os extremos locais, todos os pontos de inflexão, os intervalos onde a função é monótona/convexa/côncava e as assíntotas.
21.1. $\frac{x^2}{x^2-1}$.
21.2. $\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.
21.3. $2 - 15x + 9x^2 - x^3$.
21.4. $x\sqrt{5-x}$.
21.5. $\sqrt{x^2+1} - x$.
21.6. $\frac{x^3-1}{x^3+1}$.
21.7. $e^{\frac{1}{x^2}}$.
21.8. $x \ln x$.
21.9. $x + \sqrt{|x|}$.
21.10. $e^{3x} + e^{-2x}$.
21.11. $\tan^{-1} \frac{x-1}{x+1}$.
21.12. $\operatorname{sen} x - x$.
21.13. $\ln \operatorname{sen} x$.
21.14. $x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$.
21.15. $e^x - x$.

22. Sejam $f, g : [0, 2015] \to \mathbb{R}$ funções dadas explicitamente pelas fórmulas

$$f(x) := \begin{cases} 10 & \text{se } x=0 \\ -1 & \text{se } x\in(0,417) \\ 0 & \text{se } x\in[417,1500) \\ \pi & \text{se } x=1500 \\ 1 & \text{se } x\in(1500,1917) \\ \operatorname{sen} 10\pi & \text{se } x\in[1917,2015) \\ e^{2015} & \text{se } x=2015 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x\in[0,413) \\ -2 & \text{se } x\in[413,1564] \\ \cos\frac{\pi}{2} & \text{se } x\in(1564,2015] \end{cases}.$$

22.1. Descreva explicitamente as funções $2f + 3g$, fg, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, $|f|$, $f|_{[1,1499]}$, $\cos\big(f(x)\big)$ e $f(\cos x)$ para $x \in [0, 2015]$.

22.2. Quais das funções em 22.1 são funções escada?

22.3. Calcule as normas $||f||$, $||g||$, $||f|_{[1,1499]}||$ e $||fg||$. Será que $||fg|| = ||f|| \cdot ||g||$?

22.4. Calcule as integrais $\displaystyle\int_0^{2015} f(x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{2015} g(x)\mathrm{d}x$ e $\displaystyle\int_0^{2015} f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Será que $\displaystyle\int_0^{2015} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2015} f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^{2015} g(x)\mathrm{d}x$?

23. Será que $\inf A \in A$ e/ou $\sup A \in A$ para os seguintes conjuntos $A \subset \mathbb{R}$?

23.1. $A := \mathbb{Q}$.

23.2. $A := \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

23.3. $A := [-1, -2]$.

24. Seja c_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência numérica limitada. Definimos $a_n := \inf\{c_i \mid i \geq n\}$ e $b_n := \sup\{c_i \mid i \geqslant n\}$. Utilizando o fato que qualquer sequência monótona limitada é convergente, prove que os seguintes limites existem.

24.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \inf c_n := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

24.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup c_n := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(O limite de qualquer subsequência convergente da sequência c_n está em $\Big[\lim\limits_{n\to\infty} \inf c_n, \lim\limits_{n\to\infty} \sup c_n\Big]$.)

25. Utilizando o critério de Cauchy, prove que a sequência c_n, $n \in \mathbb{N}$, converge nos seguintes casos.

25.1. $c_n := \sum_{i=1}^n 2^{-i} \operatorname{sen} i$.

25.2. $c_n := \sum_{k=1}^n k^{-2}$ (dica: use a desigualdade $k^{-2} < (k-1)^{-1} - k^{-1}$).

26. Calcule as normas das seguintes funções.

26.1. $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

26.2. $\frac{1}{x^2+1}$.

26.3. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$.

26.4. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^n - g(x)$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $g(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x\in[0,1) \\ 1 & \text{se } x=1 \end{cases}$.

27. Verifique se as seguintes sequências de funções $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, convergem uniformemente. Caso convirjam, qual é a função limite?

27.1. $f_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{2^k}$.

27.2. $f_n(x) := x^n$ (dica: use o resultado do problema 26.4).

28. Calcule as seguintes integrais.

28.1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x$.

28.2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \ \mathrm{d}x$.

28.3. $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x} \ \mathrm{d}x$.

29. Mostre que

29.1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + \text{constante}.$

29.2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + \text{constante}.$

29.3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + \text{constante}.$

30. Calcule as seguintes integrais.

30.1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x.$

30.2. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$

30.3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}.$

30.4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

30.5. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x.$

30.6. $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x.$

30.7. $\displaystyle\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x.$

31. Calcule as seguintes integrais de funções racionais.

31.1. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x.$

31.2. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3-3x+2}.$

31.3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$

31.4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}.$

31.5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$

32. Quais das seguintes integrais impróprias convergem?

32.1. $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x.$

32.2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$

32.3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

32.4. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x.$

32.5. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}.$

33. Calcule o comprimento de arco.

33.1. $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0, 4]$.

33.2. $y = \ln\cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

33.3. $y = e^x$, $x \in [0, 1]$.

34. Para a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida abaixo, denotamos por F_f a figura limitada pelo gráfico de f e por três segmentos ligando consecutivamente os pontos $\big(a, f(a)\big)$, $(a, 0)$, $(b, 0)$, $\big(b, f(b)\big)$. Consideramos o plano da figura F_f como estando no espaço e seja S_f o sólido obtido pela rotação de F_f em torno do eixo y. Calcule o volume de S_f.

34.1. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$.

34.2. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

34.3. $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \operatorname{sen} x$.

35. Calcule a área da superfície de revolução obtida pela rotação em torno do eixo x do gráfico da função f definida abaixo.

35.1. $f(x) := x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0, 1]$.

35.2. $f(x) = \tan x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

36. Calcule as seguintes integrais trigonométricas.

36.1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2 \operatorname{sen} x - \cos x + 5}$.

36.2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, \mathrm{d}x$.

36.3. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, \mathrm{d}x$.