SMA - 341 - Elementos de Matemática

Notas de Aulas

Ires Dias - Sandra Maria Semensato de Godoy

2006

Capítulo 1

Noções de Lógica

"Lógica é a higiene usada pelos matemáticos para conservar suas idéias saudáveis e fortes". Herman Weyl (1885-1955)

1.1 Proposições e Conectivos Lógicos

O estudo da lógica é o estudo dos princípios e métodos utilizados para distinguir argumentos válidos daqueles que não são válidos.

O principal objetivo desta seção é ajudar o aluno a entender os princípios e métodos usados em cada etapa de uma demonstração. Sem alguns conceitos lógicos básicos, é impossível escrever e/ou entender uma demonstração. Quando demonstramos um teorema, estamos demonstrando a veracidade de certas declarações. Em geral estas declarações são compostas de *proposições, quantificadores, conectivos* e/ou *modificadores.*

O ponto inicial da lógica é o termo "proposição" usado em um *sentido técnico.* Por uma **proposição** entendemos uma sentença declarativa (afirmativa) ou uma afirmação verbal que é verdadeira ou falsa, mas não ambas simultaneamente. A designação *Verdadeira* **(V)** ou *Falsa* **(F)** de uma proposição é dita ser seu **valor verdade** ou seu **valor lógico**.

Exemplo 1.1. As seguintes afirmações são proposições:

(a) $(e^{\pi})^2 = e^{2\pi}$.

(b) 6 é um número primo.

(c) Pedro tem olhos azuis.

(d) O dia 10 de agosto de 1935 foi uma quarta-feira.

(e) O 1000º digito da expansão decimal de $\sqrt{2}$ é 6.

(f) Existe vida inteligente em Marte.

Note que (a) é claramente V; (b) é claramente F; (c) é uma proposição pois é V ou F, mesmo que eu não conheça o Pedro; (d) é V ou F, mesmo que seja difícil saber a resposta; o mesmo vale para (e) e (f).

Exemplo 1.2. As seguintes afirmações **não** são proposições:

(a) $(e^{\pi})^2$ é igual à $e^{2\pi}$?

(b) AH! se eu passar em Elementos!

(c) $x > 3$.

(d) $2 + 3i$ é menor que $5 + 3i$.

(e) $x(x + 4) = x^2 + 4x$.

(f) Esta proposição é falsa.

(g) Hoje é terça-feira.

(h) Está chovendo.

Note que (a) é interrogativa e não declarativa; (b) é exclamativa e não declarativa; (c) é uma sentença aberta, pode ser V ou F dependendo da variável x; (d) não é V ou F, pois não existe ordem em $\mathbb{C}$; (e) não é uma proposição, o que seria proposição é "para todo $x \in \mathbb{R}$, $x(x + 4) = x^2 + 4x$; (f) é um paradoxo, viola a definição de proposição pois é V e F ao mesmo tempo; (g) é uma sentença aberta que depende da variável "hoje" assim como (h) depende da variável "tempo".

1.2 Proposições compostas e tabelas-verdade

As proposições do exemplo 1 são todas proposições simples, ou seja, não foram obtidas por combinações ou composições de outras proposições. A combinação ou conecção de duas ou mais proposições simples é uma **proposição composta**. Há várias maneiras de conectar proposições, somente cinco são freqüentemente usadas. São os **conectivos**:

(a) "não", simbolizado por $\sim$, também chamado de modificador.

(b) "e", simbolizado por $\wedge$.

(c) "ou", simbolizado por $\vee$.

(d) "se $\cdots$ então $\cdots$", simbolizado por $\longrightarrow$.

(e) "$\cdots$ se, e somente se $\cdots$", simbolizado por $\longleftrightarrow$.

Como em álgebra usamos letras para representar números, em lógica usaremos letras minúsculas para representar proposições.

Definição 1.3. *Para proposições p e q, definimos:*

(a) A **negação de** *p, denotada por $\sim p$, lida "não p", como sendo a proposição com valor verdade diferente do de p.*

(b) A **conjunção de** *p* **e** *q, denotada por $p \wedge q$, lida "p e q", como sendo a proposição que é verdadeira somente quando p e q são ambas verdadeiras.*

(c) A **disjunção de** *p* **e** *q, denotada por $p \vee q$, lida "p ou q", como sendo a proposição que é falsa somente quando p e q são ambas falsas.*

(d) A **condicional de** *p* **e** *q, denotada por $p \longrightarrow q$, lida "se p, então q, ou "p implica q", ou "p condiciona q, como sendo a proposição que assume o valor falso somente quando p for verdadeira e q for falsa.*

(e) A **bicondicional de** *p* **e** *q, denotada por $p \longleftrightarrow q$, lida "p se, e somente se q, ou "p bicondiciona q", como sendo a proposição que assume o valor verdadeiro somente quando p e q são ambas verdadeiras ou p e q são ambas falsas.*

Para expressarmos os valores lógicos de uma proposição composta é muito conveniente utilizarmos uma tabela, chamada **tabela-verdade** da proposição, onde em cada linha expressa os valores verdades da composta obtidos a partir dos valores verdades das proposições dadas e dos conectivos usados. Vejamos as tabelas verdades das proposições definidas acima:

(a) **Negação** ($\sim p$)

p	$\sim p$
V	F
F	V

(b) **Conjunção** ($p \wedge q$)

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(c) **Disjunção** ($p \vee q$)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(d) **Condicional** ($p \longrightarrow q$)

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(e) **Bicondicional** ($p \longleftrightarrow q$)

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

À partir destas cinco tabelas verdade, podemos construir uma tabela-verdade para qualquer proposição composta dada. Através de exemplos apresentaremos duas maneiras de fazermos isso.

Exemplo 1.4. Construa a tabela-verdade para a proposição $\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

Esta tabela representa como chegar na proposição $\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$ passo à passo.

Na realidade a tabela-verdade desta proposição é:

p	q	$\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Outra maneira de construir a tabela-verdade é separando por colunas todos os conectivos e proposições simples:

p	q	$\sim$	$[(\sim$	$p)$	$\wedge$	$\sim$	$q)]$
V	V	**V**	F	V	F	F	V
V	F	**V**	F	V	F	V	F
F	V	**V**	V	F	F	F	V
F	F	**F**	V	F	V	V	F
Etapas		4	2	1	3	2	1

Vale observar que:

(1) O conectivo $\sim$ abrange somente a primeira expressão que o segue, exceto quando utiliza-se parênteses e/ou colchetes

$$\sim p \wedge q \neq \sim (p \wedge q) \qquad\qquad \sim p \wedge q = (\sim p) \wedge q.$$

(2) Os conectivos $\longrightarrow$ e $\longleftrightarrow$ abrangem toda a expressão que não contenha o mesmo sinal

$$\sim p \wedge q \longrightarrow p \vee \sim q \quad \text{significa} \quad [(\sim p) \wedge q] \longrightarrow [p \vee (\sim q)].$$

Exemplo 1.5. Determine se a proposição seguinte é verdadeira:

$$\text{"}Ou \int_{-\pi}^{\pi} sen\ x\,dx \neq 0 \ \ e\ \ \frac{d}{dx}(2^x) = x2^{x-1} \quad ou \quad \int_{-\pi}^{\pi} sen\ x\,dx = 0 \quad e \quad \ln 6 = (\ln 2)\,(\ln 3)\text{"}.$$

Sejam p a proposição $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } x\,dx = 0$, q a proposição $\dfrac{d}{dx}(2^x) = x2^{x-1}$ e $r : \ln 6 = (\ln 2)\,(\ln 3)$.

Como o conectivo principal é "ou $\cdots$ ou $\cdots$", temos que a proposição dada é $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Vamos então construir a tabela-verdade desta proposição. Para tanto, notamos que, neste caso, temos 3 proposições simples p, q e r. Logo, nossa tabela terá $2^3 = 8$ linhas.

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$p \wedge r$	$(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	**F**
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F

Note que p é V pois $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 0$, desde que sen é uma função ímpar; q é F pois $\dfrac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2 \neq x2^{x-1}$; r é F pois $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3 \neq (\ln 2)(\ln 3)$. Conseqüentemente, p, q e r satisfazem as condições da linha 4 da tabela e, assim, a proposição dada é **Falsa**.

1.3 Tautologia e Equivalência Lógica

Definição 1.6. *Uma proposição que é verdadeira em todas as possibilidades lógicas é dita ser uma* **tautologia**. *Se ela é falsa para todas as possibilidades lógicas, ela é dita ser uma* **contradição**.

Note que se p é uma tautologia, então $\sim p$ é uma contradição e vice-versa.

Exemplo 1.7. Para toda proposição p, a proposição $p \vee \sim p$ é uma tautologia e $p \wedge \sim p$ é uma contradição.

De fato, basta observar sua tabela-verdade.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	**V**	**F**
F	V	**V**	**F**

Definição 1.8. *Duas proposições são ditas serem* **logicamente equivalentes** *se elas têm a mesma tabela-verdade, ou seja, elas têm o mesmo valor verdade para cada uma das possibilidade lógicas.*

Exemplo 1.9. As proposições $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$ são logicamente equivalentes.

De fato, basta verificar na tabela-verdade.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	**F**	F	F	**F**
V	F	V	**F**	F	V	**F**
F	V	V	**F**	V	F	**F**
F	F	F	**V**	V	V	**V**

O que significa a equivalência lógica deste exemplo?

Por exemplo, se uma pessoa dizer a seguinte afirmação:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 e^x\,dx \neq e$$

e, outra pessoa dizer :

$$\text{Não é verdade que ou} \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \int_0^1 e^x\,dx = e,$$

temos que as duas pessoas estão dizendo a mesma coisa, ou seja, ambas estão certas ou ambas estão erradas. Neste caso, como $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ e $\int_0^1 e^x\,dx \neq e$, temos que ambas estão erradas (basta ver a linha 2 da tabela anterior).

Note que se duas proposições p e q são logicamente equivalentes, então $p \longleftrightarrow q$ é uma tautologia e, reciprocamente, se $p \longleftrightarrow q$ é uma tautologia, então p e q são logicamente equivalentes.

Em matemática, a principal importância das equivalências lógicas está na idéia que duas proposições logicamente equivalentes podem ser vistas como a "mesma"do ponto de vista lógico. Por exemplo, se duas proposições p e q são logicamente equivalentes e, necessitamos demonstra p e, encontramos uma maneira mais simples ou mais fácil de demonstrarmos q, então podemos demonstra p provando q.

Exemplo 1.10. A proposição $p \longrightarrow q$ é logicamente equivalente a $\sim q \longrightarrow \sim p$ mas não é logicamente equivalente a $\sim p \longrightarrow \sim q$.

De fato, basta observar a tabela-verdade.

p	q	$p \longrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \wedge \sim p$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	**V**	F	F	**V**	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**	**V**
F	V	**V**	V	F	**V**	**F**
F	F	**V**	V	V	**V**	**V**

Mais ainda, a proposição $p \longrightarrow q$ é logicamente equivalente a $\sim (p \wedge \sim q)$ que é logicamente equivalente a $\sim p \vee q$, como mostra a tabela abaixo.

p	q	$p \longrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$	$\sim p \vee q$
V	V	**V**	F	F	**V**	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**	**F**
F	V	**V**	V	F	**V**	**V**
F	F	**V**	V	V	**V**	**V**

Definição 1.11. *Se $p \longrightarrow q$ é uma condicional, então $\sim q \longrightarrow \sim p$ é dita ser a condicional* **contra positiva**, *$q \longrightarrow p$ é dita ser a condicional* **recíproca** *e $\sim p \longrightarrow \sim q$ é a condicional* **inversa**.

1.4 Teoremas

Um **teorema** é uma proposição lógica que é uma tautologia. As tautologias de principal interesse em matemática são as que envolvem os conectivos condicional e/ou bicondicional. A demonstração de um teorema nada mais é do que a confecção da tabela-verdade mostrando que a proposição é de fato uma tautologia.

Em matemática usa-se outros termos como **axiomas** e **postulados** que são fatos aceitos sem uma demonstração, ou melhor, que não tem como provar; **lemas** e/ou **proposições** que são teoremas cujo propósitos são utilizá-los na demonstração de outro teorema e **corolários** que são teoremas que seguem imediatamente da demonstração de outro(s) teorema(s).

1.5 Definição de $\Longrightarrow$ e $\Longleftrightarrow$

Sejam p e q proposições. Se $p \longrightarrow q$ é uma tautologia, dizemos que esta proposição condicional é uma **implicação** e que p **implica logicamente** q e escrevemos $p \Longrightarrow q$. Se $p \longleftrightarrow q$ é uma tautologia, dizemos que esta bicondicional é uma **bi-implicação** e denotamos por $p \Longleftrightarrow q$. Lembre-se que $p \longleftrightarrow q$ ser tautologia significa que p e q são logicamente equivalentes e, assim, $p \Longleftrightarrow q$ representa a equivalência entre p e q.

Vamos ao nosso primeiro teorema que apresenta as propriedades básicas de $\Longrightarrow$.

Teorema 1.12. *Sejam p, q e r proposições. Então:*

(1) Reflexiva - $p \Longrightarrow p$.

(2) Transitiva - $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \Longrightarrow (p \longrightarrow r)$.

(3) Simplificação - $p \wedge q \Longrightarrow p$.

(4) Adição - $p \Longrightarrow p \vee q$.

(5) Modus Ponens - $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \Longrightarrow q$.

(6) Modus Tollens - $(p \longrightarrow q) \sim q \Longrightarrow \sim p$.

(7) Reduction ad absurdum - $(\sim p \longrightarrow (q \wedge \sim q)) \Longrightarrow p$.

(8) Simetria - $(p \longleftrightarrow q) \Longrightarrow (q \longleftrightarrow p)$.

(9) Transitiva - $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \Longrightarrow (p \longleftrightarrow r)$.

(10) $(p \longrightarrow r) \Longrightarrow (p \wedge q \longrightarrow r)$.

(11) Disjunção - $((p \vee q) \wedge \sim p) \Longrightarrow q$.

(12) $\sim p \Longrightarrow (p \longrightarrow q)$.

(13) $q \Longrightarrow (p \longrightarrow q)$.

(14) $(p \longleftrightarrow q) \Longrightarrow (p \longrightarrow q)$.

Dem.: fazer alguns casos □

As correspondentes propriedades de $\Longleftrightarrow$ são apresentadas no próximo teorema.

Teorema 1.13. *Sejam p, q e r proposições. Então:*

(1) Reflexiva - $p \Longleftrightarrow p$.

(2) Dupla negação - $\sim (\sim p)) \Longleftrightarrow p$.

(3) Negação da conjunção - Lei de Morgan - $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$.

(4) Negação da disjunção - Lei de Morgan - $\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

(5) Negação da condicional - $\sim (p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

(6) Negação da bicondicional - $\sim (p \longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$.

(7) Comutatividade de $\vee$ - $(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$.

(8) Comutatividade de $\wedge$ - $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$.

(9) Associatividade de $\vee$ - $(p \vee q) \vee r \Longleftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

(10) Associatividade de $\wedge$ - $(p \wedge q) \wedge r \Longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$.

(11) Distributividade - $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

(12) Distributividade - $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(13) Bicondicional - $(p \longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$.

(14) Contra positiva - $(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p)$.

(15) $(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$.

(16) $(p \longrightarrow (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q) \longrightarrow r$.

(17) $(p \vee q) \longrightarrow r \Longleftrightarrow (p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)$.

(18) $p \longrightarrow q \wedge r \Longleftrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)$.

(19) $(p \wedge q) \longrightarrow r \Longleftrightarrow (p \wedge \sim r) \longrightarrow \sim q)$.

(20) $(p \wedge q) \longrightarrow r \Longleftrightarrow (p \longrightarrow r) \vee (q \longrightarrow r)$.

(21) $(p \wedge q) \longrightarrow r \Longleftrightarrow (p \longrightarrow (q \longrightarrow r))$.

(22) $p \longleftrightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \longleftrightarrow \sim q$.

(23) Idempotências - $p \vee p \Longleftrightarrow p \quad e \quad p \wedge p \Longleftrightarrow p$.

(24) Transitividade - $(p \Longleftrightarrow q \quad e \quad q \Longleftrightarrow r) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow r)$.

Dem.: fazer alguns casos □

Referentes as tautologias e as contradições temos:

Teorema 1.14. *Sejam t uma tautologia, c uma contradição e p uma proposição qualquer. Então:*

(1) $c \Longrightarrow p$

(2) $p \Longrightarrow t$

(3) $p \wedge t \Longleftrightarrow p$

(4) $p \vee t \Longleftrightarrow t$

(5) $p \wedge \sim p \Longleftrightarrow c$

(6) $p \wedge c \Longleftrightarrow c$

(7) $p \vee c \Longleftrightarrow p$

(8) $\sim t \Longleftrightarrow c$

(9) $\sim c \Longleftrightarrow t$

(10) $p \vee \sim p \Longleftrightarrow t$

Dem.: fazer alguns casos □

1.6 Quantificadores

Existem sentenças que não há como decidir se assumem valor V ou F. Por exemplo: "$x+y=5$" e "Ele é jogador de futebol". Estas sentenças são denominadas **sentenças abertas** ou **predicados**. Podemos compor sentenças abertas usando os mesmos conectivos usados nas proposições e formarmos novas sentenças abertas a partir de outras mais simples.

Há duas maneiras formais de transformar uma sentença aberta em uma proposição, utilizando os dois **quantificadores**. Para isso, necessitamos de um "universo" ou "domínio de discussão", isto é, uma coleção de objetos para os quais consideramos propriedades. Por exemplo, na proposição *"Todos os homens são mortais",* o universo é a coleção de todos os homens e tal proposição pode ser escrita como

"Para todo x do universo, x é mortal".

A frase "Para todo x do universo" é chamada um **quantificador universal** e é simbolizado por "$\forall x$". A sentença "x é mortal" diz alguma coisa sobre x, então simbolizamos por $p(x)$. Assim escrevemos "Todos os homens são mortais" como

$$(\forall x)(p(x)).$$

que pode ser lida como:

- para todo x, $p(x)$;

- para cada x, $p(x)$;

- para qualquer x, $p(x)$.

Vejamos agora a proposição *"Alguns os homens são mortais".* O universo é o mesmo da proposição anterior. Com este universo em mente, podemos escrever esta proposição como:

"Existe no mínimo um homem que é mortal"

"Existe no mínimo um x, tal que x é mortal"

"Existe no mínimo um x, tal que $p(x)$".

A frase "Existe no mínimo um x, tal que" é chamada **quantificador existencial** e denotada por "$\exists x$". Usando este símbolo, podemos escrever a proposição "Alguns homens são mortais" como

$$(\exists x)(p(x))$$

que pode ser lida como:

- existe x tal que $p(x)$

- existe ao menos um x tal que $p(x)$

- para algum x, $p(x)$

- para pelo menos um x, $p(x)$.

Quando existe um único elemento no universo que torna a proposição $(\exists x)(p(x))$ verdadeira, denotamos esta proposição por $(\exists! x)(p(x))$ e lemos:

- existe um único x tal que $p(x)$

- para um único x, $p(x)$.

Note que $(\exists! x)(p(x)) \Longrightarrow (\exists x)(p(x))$.

O conjunto dos elementos do universo que tornam uma sentença aberta uma proposição verdadeira é denominado **conjunto-verdade**. Por exemplo, para $p(x) : x + 1 = 5$, o conjunto universo pode ser $\mathbb{R}$ e o conjunto-verdade é $\{4\}$, enquanto que para a sentença aberta $p(x)$: sen $^2 x + \cos^2 x = 1$, temos que o conjunto-verdade é igual ao conjunto universo que é igual a $\mathbb{R}$.

Quando estiver subentendido quem é o conjunto universo, os quantificadores podem ser omitidos, por exemplo, escrevemos "$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$" ao no lugar de escrever "$\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)(x-1) = x^2 - 1$". Também é comum escrevermos os quantificadores depois da sentença aberta, por exemplo, escrevemos "$f(x) = o$, para todo x" no lugar de escrever "$(\forall x)(f(x) = 0)$".

Observe que claramente temos $(\forall x)(p(x)) \Longrightarrow (\exists x)(p(x))$.

As negações de proposições com quantificadores são definidas por:

(a) $\sim [(\forall x)(p(x))] \Longleftrightarrow (\exists x)(\sim p(x))$.

(b) $\sim [(\exists x)(p(x))] \Longleftrightarrow (\forall x)(\sim p(x))$.

Os quantificadores nos dão uma idéia do que são os **exemplos** e os **contra-exemplos**. Quando temos uma proposição verdadeira que contém um dos quantificadores, dar um exemplo é escolher uma variável x para o qual ela é verdadeira, ou seja, é escolher um elemento do seu conjunto-verdade. Quando uma proposição que contém um dos quantificadores não é verdadeira, significa que o seu conjunto-verdade é diferente do conjunto universo. Assim, encontrar um contra-exemplo é escolher uma variável x que não esta no conjunto-verdade.

1.7 Método Dedutivo

Vimos que demonstrar teoremas significa verificar que a proposição dada é uma tautologia e, fizemos isso construindo tabelas-verdade. Veremos agora outra maneira de verificar a validade de proposições. Este procedimento é chamado de **método dedutivo**, que consiste na utilização de definições e outros resultados pré-estabelecidos e as propriedades transitivas de $\Longrightarrow$ e $\Longleftrightarrow$. Vejamos como utilizá-lo em exemplos:

Exemplo 1.15. Usando o método dedutivo mostra a validade de

$$(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p).$$

Como

$(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow \sim p \vee q$, pelo ítem (15) do Teorema 2,

$\sim p \vee q \Longleftrightarrow q \vee \sim p$, pelo ítem (7) do Teorema 2,

$q \vee \sim p \Longleftrightarrow \sim (\sim q) \vee \sim p$, pelo ítem (2) do Teorema 2 e

$\sim (\sim q) \vee \sim p \Longleftrightarrow \sim q \longrightarrow \sim p$, pelo ítem (15) do Teorema 2, usando a transitividade de $\Longleftrightarrow$, obtemos a equivalência desejada.

Exemplo 1.16. Mostre a validade de $(p \longrightarrow r) \vee (q \longrightarrow s) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \longrightarrow (r \vee s)$, usando o método dedutivo.

Como

$$\begin{aligned}
(p \longrightarrow r) \vee (q \longrightarrow s) &\Longleftrightarrow (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee s), \text{ por (15) do Teorema 2}\\
&\Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s), \text{ por (7) e (9) do Teorema 2}\\
&\Longleftrightarrow \sim (p \wedge q) \vee (r \vee s), \text{ por (3) do Teorema 2}\\
&\Longleftrightarrow (p \wedge q) \longrightarrow (r \vee s), \text{ por (15) do Teorema 2,}
\end{aligned}$$

usando a transitividada de $\Longleftrightarrow$, obtemos a equivalência.

Exemplo 1.17. Considere as seguintes afirmações:

H_1 - Tempo é dinheiro.

H_2 - Vagabundo tem muito tempo.

T - Vagabundo tem muito dinheiro.

A proposição $H_1 \wedge H_2 \Longrightarrow T$ é um teorema?

Se considerarmos p : "Ter tempo", q : "Ter dinheiro" e r : "Ser vagabundo", teremos que $H_1 : p \wedge q$, $H_2 : q \longrightarrow r$ e $T : r \longrightarrow q$. Assim, podemos escrever a proposição $H_1 \wedge H_2 \Longrightarrow T$ como $(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow p) \Longrightarrow (r \longrightarrow q)$ que é verdadeira, mostrando que a proposição dada é um teorema.

Exemplo 1.18. Considere agora as seguintes afirmações:

H_1 - Penso, logo existo.

H_2 - Pedras não pensam.

T - Pedras não existem.

A proposição $H_1 \wedge H_2 \Longrightarrow T$ é um teorema?

Se considerarmos p : "Pensar" e q : "Existir", teremos que $H_1 : p \longrightarrow q$, $H_2 :\sim p$ e $T :\sim q$. Assim, podemos escrever a proposição $H_1 \wedge H_2 \Longrightarrow T$ como $((p \longrightarrow q) \wedge \sim p) \Longrightarrow \sim q$ que não é verdadeira, pois $((p \longrightarrow q) \wedge \sim p) \longrightarrow \sim q$ não é uma tautologia, mostrando que a proposição dada não é um teorema.

1.8 Métodos de Demonstração

Veremos três maneiras ou métodos de demonstrar um teorema da forma $p \Longrightarrow q$.

(1) Prova ou demonstração direta: Consiste na utilização do método dedutivo, assumindo que p é verdadeira e, utilizando equivalências lógicas e fatos pré estabelecidos, deduzir que q é verdadeira.

Por exemplo, mostre que:

"Se x é um número inteiro par, então x^2 é um inteiro par".

Note que esta é uma implicação do tipo $p \Longrightarrow q$, onde p é a proposição "x é um número inteiro par" e q é a proposição "x^2 é um número inteiro par".

Assumindo p verdadeira, temos que x é um número inteiro par $\Longrightarrow$ x é divisível por 2, por definição $\Longleftrightarrow$ x é múltiplo de 2 $\Longleftrightarrow$ existe $n \in \mathbb{Z}$, tal que $x = 2n \Longrightarrow x^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2) = 2m$, para algum $m \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x^2$ é um número inteiro par $= q$.

(2) Demonstração por contraposição: Consiste na utilização da equivalência lógica $p \longrightarrow q \Longleftrightarrow \sim q \longrightarrow \sim p$, ou seja, para mostrarmos o teorema $p \Longrightarrow q$, mostramos, utilizando o método da demonstração direta que $\sim q \Longrightarrow \sim p$.

Por exemplo, mostre que:

"Se x é um número inteiro tal que x^2 é ímpar, então x é um inteiro ímpar".

Esta é uma implicação do tipo $p \Longrightarrow q$, onde p é a proposição "x^2 é um número inteiro ímpar" e q é a proposição "x é um número inteiro ímpar".

Note que não é possível utilizar o método da demonstração direta neste caso, pois de x^2 é um número inteiro ímpar, temos que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = 2n + 1$ e, não conseguimos chegar que existe um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2m + 1$.

Utilizando a equivalência lógica citada acima, vamos mostrar que $\sim q \Longrightarrow \sim p$.

Agora, $\sim q : x$ não é ímpar $\Longrightarrow x$ é par $\Longrightarrow x^2$ é par, pelo exemplo anterior $\Longrightarrow \sim p$. Consequentemente, $p \Longrightarrow q$.

(3) Demonstração por contradição (Reduction ad absurdum): Consiste na utilização da equivalência lógica $p \longrightarrow q \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q) \longrightarrow \sim p$, ou seja, para mostrarmos o teorema $p \Longrightarrow q$, mostramos, que $(p \wedge \sim q) \Longrightarrow \sim p$, o que chega em um absurdo pois como p é verdadeira e concluímos que $\sim p$ é também verdadeira, teremos que $p \wedge \sim p$ é verdadeira, o que é uma contradição.

Por exemplo, mostre que:

"Se x é um número inteiro tal que x^2 é par, então x é um inteiro par".

Aqui, p é a proposição "x^2 é um número inteiro par" e q é a proposição "x é um número inteiro par". Note que novamente não dá para demonstrar direto que $p \Longrightarrow q$. Assuma então que $(p \wedge \sim q)$ é verdadeira, ou seja que x^2 é par e x é ímpar $\Longrightarrow x = 2n+1$, para algum $n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2m + 1$, para algum $m \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x^2$ é ímpar $\Longrightarrow \sim p$, o que é uma contradição. Logo, a proposição "x é par" não pode ser falsa, o que mostra que $p \Longrightarrow q$.

1.9 Exercícios

1. Considere as proposições p : "Fred tem cabelos vermelhos", q : "Fred tem nariz grande" e r : "Fred gosta de comer figos". Passe para a linguagem simbólica as seguintes proposições:
   (a) Fred não gosta de comer figos.
   (b) Fred tem cabelos vermelhos ou gosta de comer figos.
   (c) Fred tem cabelos vermelhos e não tem nariz grande.
   (d) Fred gosta de comer figos e, tem cabelos vermelhos ou tem nariz grande.
   (e) Fred gosta de comer figos e tem cabelos vermelhos, ou tem nariz grande.
   (f) Não é o caso de Fred ter nariz grande ou cabelos vermelhos.

(g) Fred tem nariz grande e cabelos vermelhos, ou ele tem nariz grande e gosta de comer figos.

2. Sejam p : "A casa é azul", q : "A casa tem 30 anos" e r : "A casa é feia". Passe para a linguagem simbólica as seguintes sentenças:

   (a) Se a casa tem 30 anos, então ela é feia.

   (b) Se a casa é azul, então ela é feia ou tem 30 anos.

   (c) Se a casa é azul então ela é feia, ou tem 30 anos.

   (d) A casa não é feia se e somente se ela tem 30 anos.

   (e) A casa tem 30 anos se ela é azul, e ela não é feia se ela tem 30 anos.

   (f) Para que a casa seja feia é necessário e suficiente que ela seja feia e tenha 30 anos.

3. Supondo que p seja uma sentença verdadeira, que q seja falsa, que r seja falsa e que s seja verdadeira, decidir quais das sentenças abaixo são verdadeiras e quais são falsas.

   (a) $p \vee r$.

   (b) $(r \wedge s) \vee q$.

   (c) $\sim (p \wedge q)$.

   (d) $\sim s \vee \sim r$.

   (e) $(s \wedge p) \vee (q \wedge r)$.

   (f) $r \vee (s \vee (p \wedge q))$.

4. Suponha que p seja uma sentença falsa, que q seja verdadeira, que r seja falsa e que s seja verdadeira. Quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas?

   (a) $r \rightarrow q$.

   (b) $p \longleftrightarrow r$.

   (c) $(q \longleftrightarrow s) \wedge p$.

   (d) $s \rightarrow (p \rightarrow \sim s)$.

   (e) $[(q \rightarrow s) \longleftrightarrow s] \wedge \sim p$.

   (f) $(s \rightarrow p) \longleftrightarrow \sim (r \vee q)$.

5. Construir a tabela-verdade de cada uma das proposições abaixo:

   (a) $p \wedge \sim q$.

(b) $(r \vee s) \wedge \sim r$.

(c) $p \vee (\sim q \vee r)$.

(d) $(p \vee q) \wedge (p \vee s)$.

(e) $(p \wedge r) \vee \sim (q \wedge s)$.

(f) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$.

(g) $(p \rightarrow q) \rightarrow [p \vee (q \wedge r) \rightarrow p \wedge (p \vee r)]$.

(h) $\sim p \wedge q$.

(i) $\sim (p \rightarrow \sim q)$.

(j) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$.

(l) $\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \longleftrightarrow q)$.

(m) $(p \rightarrow q) \vee \sim (p \longleftrightarrow \sim q)$.

(n) $(p \rightarrow (\sim q \vee r)) \wedge \sim (q \vee (p \longleftrightarrow \sim r))$.

6. Quais das proposições acima são equivalentes? quais são tautologias? quais são contradições? Justifique suas respostas.

7. Verificar que as seguintes proposições são equivalentes:

   (a) $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$.

   (b) $\sim (p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$.

   (c) $\sim (p \rightarrow q)$ e $p \wedge \sim q$.

   (d) $\sim (p \longleftrightarrow q)$ e $(p \longleftrightarrow \sim q)$.

8. Quantificar as sentenças abertas a fim de obter proposições verdadeiras:

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2xz - 2xy - 2yz$.

   (b) $x + y = 8$.

   (c) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

   (d) $\text{sen}\, x = 2$.

9. Dar a negação das proposições abaixo:

   (a) $(\forall x)(p(x) \vee q(x) \rightarrow s(x))$.

   (b) $(\forall x)p(x) \rightarrow s(x)$.

   (c) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$.

   (d) $(\exists x)p(x) \longleftrightarrow q(x)$.

   (e) $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$.

   (f) $(\forall x)(\exists y)(p(x) \vee q(y))$.

   (g) $(\exists x)(\exists y)(p(x) \wedge \sim q(y))$.

   (h) $(\forall x)(\forall y)p(x, y)$.

Capítulo 2

Teoria dos Conjuntos

2.1 Noções primitivas, definições e axiomas

A maioria das noções em matemática são definidas utilizando outras noções que já foram estabelecidas. Assim, para definirmos uma noção precisamos de outra pré-estabelecida, para esta outra, precisamos de mais outra, etc... Aí surge a pergunta natural: E a primeira de todas as noções, como é estabelecida?

É natural que esta primeira noção não pode ser definida usando outra pré-estabelecida, de onde concluímos que são podemos definir tudo. Somos obrigados, ao iniciar o estudo de um certo conteúdo matemático, adotar sem definir as primeiras noções, que são chamadas **noções primitivas**.

Na teoria dos conjuntos adotamos duas noções primitivas a de **conjunto** e de **pertinência**, denotada por $\in$.

A segunda noção estabelece uma relação entre conjuntos da seguinte forma: se x e A são conjuntos, a expressão $x \in A$ pode ser lida como "x pertence a A" ou "x está em A". Com esta noção podemos definir a noção de **elemento**, da seguinte forma:

Definição 2.1. *Seja x um conjunto. Se existe um conjunto A tal que $x \in A$, então x é dito ser* **elemento***, ou seja dizemos que x* **é um elemento de** *A, ou ainda que x pertence a A.*

Quando um conjunto x não for um elemento do conjunto A, escrevemos $x \notin A$, e lemos "x **não pertence** *a A", ou ainda "x não esta em A", que é a negação de $x \in A$.*

Parece estranho escolhermos conjunto e pertinência como elementos primitivos ao invés de conjunto e elemento, mas é mais fácil definir elemento usando a noção de pertinência do que definir a noção de pertinência usando a noção de elemento.

Estabeleceremos como convenção o uso de letras maiúsculas para denotar conjuntos e letras minúsculas para denotar elementos.

A seguir definimos a noção de igualdade de conjuntos.

Definição 2.2. *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que o conjunto A é* **igual** *ao conjunto B, e denotamos por $A = B$, se todo elemento de A é um elemento de B e vice-versa. Simbolicamente escrevemos*

$$A = B \Longleftrightarrow (\forall x)[(x \in A \longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \longrightarrow x \in A)].$$

Note que com esta definição, dois conjuntos são iguais se, e somente se eles têm os mesmos elementos.

A nosso intuição nos diz que quando um elemento x está em um conjunto A e x é igual a outro elemento y, então é natural esperar que y também seja elemento de A, o que nos garante isso é o primeiro axioma da teoria dos conjuntos.

Axioma da Extensão - *Se $x = y$ e $x \in A$, então $y \in A$.*

A seguir definimos a noção de **inclusão** de conjuntos.

Definição 2.3. *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A* **está contido** *em B, (ou B* **contém** *A) e denotamos por $a \subseteq B$(ou $B \supseteq A$), se todo elemento de A é um elemento de B. Neste caso, dizemos também que A é um* **subconjunto** *de B. Simbolicamente escrevemos*

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow (\forall x)(x \in A \longrightarrow x \in B).$$

Se $A \subseteq B$ e A é diferente de B, dizemos que A é um **subconjunto próprio** *de B e denotamos por $A \subsetneq B$ ou $A \subset B$.*

Estas noções, definições e axioma, nos permitem demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Sejam A, B e C conjuntos. Então temos:*

(a) Reflexiva: $A = A$.

(b) Simétrica: $A = B \Longrightarrow B = A$.

(c) Transitiva: $(A = B) \wedge (B = C) \Longrightarrow A = C$.

(d) Reflexiva: $A \subseteq A$.

(e) Anti-simétrica: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longleftrightarrow A = B$.

(f) Transitiva: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Longrightarrow A \subseteq C$.

Dem.: Vamos mostrar alguns ítens, a demonstração dos restantes fica como exercício.

(a) A proposição $x \in A \longrightarrow x \in A$ é uma tautologia, logo da definição 2.2, temos $A = A$.

(b) Da definição 2.2 temos que $A = B \Longleftrightarrow (\forall x)[(x \in A \longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \longrightarrow x \in A)]$. Agora, pela comutatividade do conectivo $\wedge$ e novamente pela definição 2.2, concluímos que $B = A$.

(e) Da definição 2.3, temos que $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ é equivalente a proposição $(\forall x)[(x \in A \longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \longrightarrow x \in A)]$, que por sua vez, é equivalente a $A = B$ pela definição 2.2. □

Uma maneira de representar um conjunto é exibindo seus elementos entre chaves e separados por vírgulas, mas podemos também caracterizar um conjunto através de uma propriedade que o define. Isso deve ser feito axiomaticamente tomando certos cuidados para evitar contradições. Vejamos o axioma que nos permite construir conjuntos a partir de propriedades.

Axioma da especificação: *Sejam A um conjunto e p(x) uma proposição em x que deve ser expressa totalmente em função dos símbolos* $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\longrightarrow$, $\in$, $\exists$, $\forall$, [] *e variáveis* $x, y, z, \ldots, A, B, C, \ldots$. *Então existe um conjunto que consiste de todos os elementos* x *de* A *que tornam* $p(x)$ *verdadeira. Simbolicamente, escrevemos*

$$\{x \in A;\ p(x) \ \text{ é verdadeira}\}.$$

Observação 2.5. A restrição de $p(x)$ utilizar somente símbolos lógicos e variáveis faz sentido para evitar paradoxos do tipo semântico. Um exemplo disso é o seguinte paradoxo que numa versão simplificada diz:

Paradoxo de Richard: *Todo número inteiro pode ser descrito em palavras utilizando um certo número de letras. Por exemplo, o número* 36 *pode ser descrito como "trinta e seis"ou "quatro vezes nove". A primeira descrição utiliza 11 letras e a segunda 15 letras. Vamos dividir o conjunto dos números inteiros positivos em dois grupos, o primeiro contendo todos os números inteiros positivos que podem ser escritos com no máximo 100 letras e o segundo inclui todos todos os números inteiros positivos que necessitam de pelo menos 101 letras para descrevê-los. Há um número finito de números no primeiro grupo, pois existem no máximo* 24^{100} *expressões com no máximo 100 letras. Existe então um menor inteiro positivo no segundo grupo. Este menor* *inteiro pode ser descrito pela frase "o menor inteiro que não é descrito com menos de 100 letras", o que o descreve com menos de 100 letras. Então este número pertence ao primeiro grupo, o que é uma contradição.*

Note, que este conjunto não pode ser construído pelo axioma da especificação, pois a propriedade do axioma está restrita a operadores lógicos e alguns símbolos. Por isso estamos livre desta contradição.

Observação 2.6. Outra aplicação mais interessante deste axioma é que ele garante que não existe um conjunto que contenha todos os conjuntos.

De fato, supondo que exista o conjunto cujos elementos sejam todos os conjuntos, seja U tal conjunto. Assim, usando o axioma da especificação, podemos formar o conjunto $B = \{x \in U;\ x \notin x\}$. A questão agora é: será que $B \in U$?

Se sim, temos duas possibilidades, $B \in B$ ou $B \notin B$.

Se $B \in B$, pela especificação de B, temos que $B \notin B$ e, se $B \notin B$, então $B \in B$, o que é uma contradição. Assim, chegamos a conclusão que $B \notin U$, ou seja, não existe um conjunto universo. O argumento que levou a essa conclusão chama-se o **paradoxo de Russel**, cuja versão popular é: *Numa certa cidade existe um barbeiro que só faz a barba nos homens que não barbeiam a si próprios. Quem faz a barba do barbeiro?*

Com o auxílio do axioma da especificação, podemos construir vários conjuntos importantes.

Definição 2.7. *O* **conjunto vazio**, *denotado por $\emptyset$, é o conjunto que não possui nenhum elemento.*

A existência deste conjunto é garantida pelo axioma da especificação, pois dado qualquer conjunto A, temos que $\emptyset = \{x \in A; x \neq x\}$.

Definição 2.8. *Sejam A e B dois conjuntos. A* **união de** A **e** B, *denotada por $A \cup B$, é o conjunto formado pelos elementos x tais que x está em um dos dois conjuntos A ou B. Simbolicamente,*

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}.$$

A **intersecção de** A **e** B, *denotada por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos x tais que x está em ambos os conjuntos A e B. Simbolicamente,*

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}.$$

Dessa definição, temos as seguintes equivalências lógicas:

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B).$$

Note, que a existência dos conjuntos $A \cup B$ e $A \cap B$ é garantida pelo axioma da especificação.

Com relação a união e a intersecção de conjuntos temos as seguintes propriedades:

Teorema 2.9. *Sejam A e B conjuntos. Então:*

(a) $A \subseteq A \cup B$ *e* $B \subseteq A \cup B$.

(b) $A \cap B \subseteq A$ *e* $A \cap B \subseteq B$.

(c) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$ *e* $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

(d) $A \cup (B \cap A) = A$ *e* $A \cap (B \cup A) = A$.

Dem.: Para os ítens (a) e (b), mostraremos uma das inclusões, as outras são demonstradas de forma análoga e ficam como exercício.

Vamos mostrar que $A \subseteq A \cup B$, o que é equivalente, por definição, a mostrar que $x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B$. O que é equivalente a mostrar que $x \in A \longrightarrow x \in A \vee x \in B$ é uma tautologia o que é verdade, pois é uma implicação do tipo $p \longrightarrow p \vee q$.

No ítem (c), também provaremos somente uma das equivalências, ficando a outra como exercício.

Vamos mostrar que $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$. Como $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$, vamos mostrar as implicações $\Longrightarrow$ e $\Longleftarrow$ separadamente.

($\Longrightarrow$) Queremos mostrar que se $A \subseteq B$, então $A \cup B = B$. Note que po igualdade de conjuntos, temos que mostrar que $A \cup B \subseteq B$ e $B \subseteq A \cup B$. A segunda inclusão segue de (a). Para a primeira, seja $x \in A \cup B$, então, $x \in A \vee x \in B$. Se $x \in A$, como por hipótese, $A \subseteq B$, temos que $x \in B$. Assim, $x \in B$, em ambos os casos, como queríamos.

($\Longleftarrow$) Se $A \cup B = B$, então, como $A \subseteq A \cup B = B$, temos claramente que $A \subseteq B$.

A demonstração do ítem (d) fica como exercício. □

Dizemos que dois conjuntos A e B são **disjuntos** se eles não possuem elementos em comum, ou seja, se $A \cap B \emptyset$.

Teorema 2.10. *Sejam X, A e B conjuntos. Então temos:*

(a) $\emptyset \subseteq A$, $A \cup \emptyset = A$ *e* $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(b) $X \subseteq A \cup B \Longleftrightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B$ *e* $X \subseteq A \cap B \Longleftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$.

Dem.: Vamos mostrar a primeira inclusão do ítem (a), ou seja que $\emptyset \subseteq A$. Por definição, temos que mostrar que $x \in \emptyset \Longrightarrow x \in A$. Como a proposição $p : x \in \emptyset$ é sempre falsa, então $p \longrightarrow q$ é verdadeira para qualquer proposição q, o que mostra a inclusão. Outra maneira de mostrar é usando a contra-positiva, supondo que $x \notin A$, então certamente temos que $x \notin \emptyset$, pois o conjunto vazio não contém elementos, assim, $x \notin A \Longrightarrow x \notin \emptyset$.

Mostremos agora a equivalência $X \subseteq A \cap B \Longleftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$, deixando as restantes como exercício.

($\Longrightarrow$) Nesta implicação, a hipótese é $X \subseteq A \cap B$ e a tese é $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$.

Seja $x \in X$, como por hipótese $X \subseteq A \cap B$, temos que $x \in A \cap B$ e, pela definição de intersecção, temos que $x \in A \wedge x \in B$. Portanto $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$.

($\Longleftarrow$) Nesta implicação, a hipótese é $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ e a tese é $X \subseteq A \cap B$.

Seja $x \in X$, por hipótese $x \in A \wedge x \in B$ e, pela definição de intersecção, temos que $x \in A \cap B$. Portanto $X \subseteq A \cap B$. $\square$

Diagramas de Venn e de Linha

Uma maneira simples de ilustrar as relações entre conjuntos é por meio de diagramas. Existem dois tipos mais utilizados, que são os **diagrams de Venn** e os **diagramas de linha**.

No diagrama de Venn os conjuntos são representados por regiões limitadas do plano e suas relações são representadas pelas posições dessas regiões. Nas figuras abaixo, representamos algumas relações entre os conjuntos A e B.

No diagrama de linha, não representamos os conjuntos mas sim a relação de inclusão entre eles. Um conjunto que contém o outro conjunto estará num nível vertical acima ligado ao primeiro por um segmento de reta. Caso os conjuntos não possuam a relação de inclusão, eles não são unidos pelo segmento de reta. Neste caso eles são colocados horizontalmente em posição diferente. Na figura abaixo vemos um exemplo de um diagrama de linha.

2.2 Operações com conjuntos

Em aritmética podemos adicional, multiplicar ou subtrair dois números. Nos conjuntos, as operações união, intersecção e diferença (como definida abaixo), se comportam de maneira semelhante as operações aritméticas.

Definição 2.11. *Sejam A e B dois conjuntos. A* **diferença** *entre A e B, denotado por $A \setminus B$ ou $A - B$, é o conjunto formado pelos elementos que estão em A e não estão em B. Simbolicamente, escrevemos*

$$A \setminus B = \{x;\, x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Se $A \subseteq B$, o conjunto $B - A$ é dito também ser o **complementar** *de A em B e denotado por A^c_B. Se A está contido em um conjunto universo U, o complementar de A em U é denotado simplesmente por $A^c = \{x; x \notin A\}$.*

Com respeito a estas operações entre conjuntos, temos as seguintes propriedades:

Teorema 2.12. *Sejam A, B e C conjuntos. Então:*

(a) Associatividades - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *e* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(b) Comutatividades - $A \cup B = B \cup A$ *e* $A \cap B = B \cap A$.

(c) Distributividades - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(d) Idempotências - $A \cup A = A$ *e* $A \cap A = A$.

(e) $A - B \subseteq A$ *e* $(A - B) \cap B = \emptyset$.

(f) $A - B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subseteq B$ *e* $A - (A - B) = B \Longleftrightarrow B \subseteq A$.

Se A e B são subconjuntos de um mesmo conjunto universo U, então:

(g) Leis de Morgan - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *e* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(h) $(A^c)^c = A$ *e* $A \cap A^c = \emptyset$. *(i)* $A \subseteq B$ *se, e somente se* $B^c \subseteq A^c$.

Dem.: Demonstrar alguns casos

Axioma da potência - *Para cada conjunto, existe uma coleção de conjuntos que contém entre seus elementos, todos os subconjuntos do conjunto dado.*

Definição 2.13. *Seja A um conjunto. O* **conjunto potência** *de A ou* **conjunto das partes** *de A, denotado por $\wp(A)$, é o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A. Simbolicamente, temos $\wp(A) = \{B;\ B \subseteq A\}$.*

Exemplo 2.14. Para $A = \{a, b, c\}$, temos

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

Proposição 2.15. *Sejam A e B conjuntos. Então:*

(a) $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$.

(b) $\wp(A \cup B) \supseteq \wp(A) \cup \wp(B)$.

Dem.: Temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
X \in \wp(A \cap B) &\iff X \subseteq A \cap B, \text{ Pela definição 2....}\\
&\iff X \subseteq A \wedge X \subseteq B, \text{ pelo teorema 2....}\\
&\iff X \in \wp(A) \wedge X \in \wp(B), \text{ pela definição 2....}\\
&\iff X \in \wp(A) \cap \wp(B), \text{ pela definição de } \cap,
\end{aligned}$$

o que demonstra o ítem (a). A demonstração do ítem (b) fica como exercício. □

Observação 2.16. Note que a inclusão $\wp(A \cup B) \subseteq \wp(A) \cup \wp(B)$ não é verdadeira. De fato, para $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$, temos $\wp(A \cup B) = \wp(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ e $\wp(A) \cup \wp(B) = \{\emptyset, \{1\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.

Para definirmos a união e a intersecção de um número finito de conjuntos, podemos usar o axioma da especificação. Para uma coleção qualquer de conjuntos, já não é possível utilizar esse axioma para construir um conjunto união e um conjunto intersecção. Para tanto necessitamos do seguinte axioma:

Axioma da união - *Para toda coleção de conjuntos existe um conjunto que contém todos os elementos que pertencem a algum conjunto da dada coleção.*

Em outras palavras, este axioma garante que para toda coleção de conjuntos $\mathcal{C}$, existe um conjunto U tal que, se $x \in A$ para algum A em $\mathcal{C}$, então $x \in U$. Assim podemos definir:

Definição 2.17. *Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de conjuntos. A* **união dos conjuntos em $\mathcal{C}$** *ou a* **união dos elementos de $\mathcal{C}$**, *denotada por $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ ou $\bigcup \mathcal{C}$, consiste de todos os elementos que pertencem a pelo menos um conjunto da coleção. Em símbolos,*

$$\bigcup_{A\in \mathcal{C}} A = \{x \in A;\ A \in \mathcal{C}\}.$$

Note que nesta definição utilizamos o axioma da união e o axioma da especificação para garantir a existência de $\bigcup_{A\in \mathcal{C}} A$. A unicidade é garantida pelo axioma da extensão.

Podemos também escrever

$$\bigcup_{A\in \mathcal{C}} A = \{x; \exists\, A \in \mathcal{C} \text{ tal que } x \in A\}.$$

Para a intersecção de conjuntos de uma coleção temos:

Definição 2.18. *Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de conjuntos. A* **intersecção dos conjuntos em** $\mathcal{C}$ *ou a* **intersecção dos elementos de** $\mathcal{C}$*, denotada por* $\bigcap_{A\in \mathcal{C}} A$ *ou* $\bigcap \mathcal{C}$*, consiste de todos os elementos que pertencem a todos os conjuntos da coleção. Em símbolos*

$$\bigcap_{A\in \mathcal{C}} A = \{x;\ x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{C}\}.$$

Também podemos escrever

$$\bigcap \mathcal{C} = \{x; (A \in \mathcal{C} \longrightarrow x \in A)\}.$$

Vejamos a noção de família ou coleção indexada de conjuntos.

Definição 2.19. *Seja Γ um conjunto. Assuma que para cada elemento $\gamma \in \Gamma$ está associado um conjunto A_γ. A coleção de tais conjuntos A_γ é dita ser uma* **família indexada de conjuntos***, indexada pelo conjunto Γ e denotada por $\{A_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.*

Observação 2.20. Se $\mathcal{C} = \{A_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$, escrevemos

$$\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x;\ x \in A_\gamma \text{ para algum } \gamma \in \Gamma\}$$

e

$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x;\ x \in A_\gamma \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\}.$$

Note que dada qualquer coleção de conjuntos, sempre é possível encontrar um conjunto de índices Γ e tornar esta coleção uma família indexada de conjuntos, indexada por Γ.

Mais ainda se o conjunto de índices é finito, $\Gamma = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, escrevemos

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

e

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Se $\Gamma = \mathbb{N}$, escrevemos $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Exemplo 2.21. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $A_i = \{i, i+1, \ldots, 2i-1\}$. Encontre $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Note que cada inteiro entre 1 e $2n-1$ pertence a algum A_i da família e, nenhum outro inteiro pertence a estes A_i. Logo $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \{1, 2, 3, \ldots, 2n-1\}$.

Teorema 2.22. *Seja $\{A_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ uma família vazia de subconjuntos de um conjunto U, ou seja, $\Gamma = \emptyset$. Então*

(a) $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \emptyset$.

(b) $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = U$.

Dem.: (a) Note que mostrar que $\bigcup\limits_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma = \emptyset$ é equivalente a mostrar que para todo $x \in U$, temos $x \notin \bigcup\limits_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma$.

Para $x \in U$, temos que

$$\begin{aligned}
x \notin \bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma \quad &\Longleftrightarrow \quad \sim \left(x \in \bigcup_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma \right), \text{ por notação} \\
&\Longleftrightarrow \quad \sim (x \in A_\gamma, \text{ para algum } \gamma \in \emptyset), \text{ pela definição de de } \cup \\
&\Longleftrightarrow \quad (x \notin A_\gamma, \text{ para todo } \gamma \in \emptyset), \text{ pela negação} \\
&\Longleftrightarrow \quad (\gamma \in \emptyset \longrightarrow x \notin A_\gamma)
\end{aligned}$$

e esta ultima proposição é verdade para todo $x \in U$, pois $\gamma \in \emptyset$ é uma contradição. Isso completa a demonstração da parte (a).

(b) Temos que mostrar que para todo $x \in U$, temos $x \in \bigcap\limits_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma$. Observe que por definição $x \in \bigcap\limits_{\gamma \in \emptyset} A_\gamma \Longleftrightarrow (x \in A_\gamma,\ \forall\, \gamma \in \emptyset)$ que é equivalente a proposição $(\gamma \in \emptyset \longrightarrow x \in A_\gamma)$, que como visto na demonstração do ítem (a), é verdadeira para todo $x \in U$. □

Os próximos dois teoremas generalizam para uma família qualquer resultados mostrados.

Teorema 2.23. Leis de Morgan Generalizadas - *Seja $\{A_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ uma família arbitrária de subconjuntos de um conjunto$U$. Então*

(a) $\left(\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)^c = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c$.

(b) $\left(\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)^c = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c$.

Dem.: (a) Para todo $x \in U$, temos

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c &\iff \sim \left(x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right), \text{ pela definição de complementar,} \\ &\iff \sim (\exists\gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma), \text{ pela definição de união,} \\ &\iff (\forall\gamma \in \Gamma)(x \notin A_\gamma), \text{ pela negação,} \\ &\iff (\forall\gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma^c), \text{ pela def. de complementar,} \\ &\iff x \in \bigcap A_\gamma^c, \text{ pela definição de } \bigcap. \end{aligned}$$

Assim, por definição de igualdade de conjuntos temos a igualdade do ítem (a). A demonstração da igualdade do ítem (b) fica como exercício. □

Teorema 2.24. Leis Distributivas Generalizadas - *Sejam A um conjunto e $\mathcal{C} = \{B_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ uma família de conjuntos. Então*

(a) $A \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cap B_\gamma)$.

(b) $A \cup \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A \cup B_\gamma)$.

Dem.: Vamos provar a igualdade do ítem (a), a outra fica como exercício.

Um elemento x está no conjunto $A \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)$ se, e somente se $x \in A$ e $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, pela definição de $\cap$. Agora da definição de união de uma família qualquer de conjuntos, temos que esta proposição é equivalente a $x \in A$ e $x \in B_\gamma$, para algum $\gamma \in \Gamma$, que pode ser expressa como $x \in A \cap B_\gamma$, para algum $\gamma \in \Gamma$, a qual, por definição de $\cup$ é precisamente $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A \cap B_\gamma)$, o que mostra (a) pela definição de igualdade de conjunto. □

2.3 O Produto Cartesiano de Dois Conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos arbitrários. Para $a \in A$ e $b \in B$, utilizando o axioma da especificação podemos construir o conjunto

$$\{a, b\} = \{x;\ x = a \text{ ou } x = b\}.$$

Note que, como conjuntos $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Agora, queremos definir a noção de **par ordenado**, ou seja, um conjunto com dois elementos dados, onde possamos dizer qual é o primeiro e qual é o segundo elemento.

Para tanto, precisamos da certeza que este par é também um elemento. Isso é garantido pelo seguinte axioma.

Axioma do par - Para dois conjuntos quaisquer existe um conjunto ao qual ambos pertencem.

Este axioma garante a existência do conjunto definido a seguir:

Definição 2.25. *O* **par ordenado** *de a e b, denotado por (a, b), com primeira coordenada a e segunda coordenada b é o conjunto*

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}.$$

Dados dois conjuntos A e B, o **produto cartesiano** *de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto*

$$A \times B = \{x;\ x = (a, b) \text{ para algum } a \in A \text{ e algum } b \in B\}.$$

Note que em geral $(a, b) \neq (b, a)$ e $A \times B \neq B \times A$.

Vejamos como esta nova operação entre conjuntos se comporta com relação às outras definidas anteriormente.

Teorema 2.26. *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então temos:*

(a) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(d) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

Dem.: (a) Pela definição de produto cartesiano, temos $A \times \emptyset = \{(a, b);\ a \in Aeb \in \emptyset\}$. Como não existe $b \in \emptyset$, temos que não existe par ordenado cuja segunda coordenada seja b, assim $A \times \emptyset = \emptyset$. A outra igualdade é análoga.

(b) Note que aqui podemos assumir que os 3 conjuntos são diferentes do vazio, pois caso contrário a demonstração segue facilmente do ítem (a).

Para $a \in A$ e $x \in (B \cap C)$, temos

$$\begin{aligned}
& (a,x) \in A \times (B \cap C) \\
\iff & (a \in A) \wedge (x \in B \cap C), \text{ pela definição de prod. cartesiano,} \\
\iff & (a \in A) \wedge (x \in B \wedge x \in C), \text{ pela definição de } \cap, \\
\iff & (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C), \text{ pela associatividade do } \wedge, \\
\iff & (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (a \in A) \wedge (x \in C), \text{ pelo canc. pela comut. do } \wedge, \\
\iff & [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \in C)], \text{ pela associatividade do } \wedge, \\
\iff & [(a,x) \in A \times B] \wedge [(a,x) \in A \times C], \text{ pela definição de prod. cartesiano,} \\
\iff & (a,x) \in (A \times B) \cap (A \times C), \text{ pela definição de } \cap,
\end{aligned}$$

o que mostra a igualdade do ítem (b).

As demonstrações das igualdades dos ítem (c) e (d), ficam como exercício. □

2.4 Exercícios

1. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando.

   (a) $3 = \{3\}$.

   (b) $5 \in \{\{5\}\}$.

   (c) $4 \in \{\{4\}, 4\}$.

   (d) $\emptyset \in \{3\}$.

   (e) $\{2, 8\} \subseteq \{2, 8, 9\}$.

   (f) $\{3, 4\} \subseteq \{\{3, 4\}, \{5, 6\}\}$.

   (g) $(\forall A)(\forall B)(\forall C)(A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B))$.

   (h) $(\forall A)(\forall B)(\forall C)((A \cup B) - C = A \cup (B - C))$.

   (i) $(\forall A)(\forall B)(\forall C)(A \cup B = A \cup C \Longrightarrow B = C)$.

   (j) $(\{\emptyset\} \subseteq \wp(A)), (\forall A)$.

   (l) $(\{\emptyset\} \in \wp(A)), (\forall A)$.

   (m) $\wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2. Mostre que se A é um conjunto finito com n elementos, então $\wp(A)$ é finito e tem 2^n elementos. Mostre também que A é infinito se, e somente se $\wp(A)$ é infinito.

3. Sejam A e B conjuntos. Determine se cada uma das afirmações abaixo são verdadeiras. Se sim, mostre, caso contrário, dê um contra exemplo.

   (a) $x \in A$ e $A \in B \Longrightarrow x \in B$.

(b) $x \in A$ e $A \subseteq B \Longrightarrow x \in B$.

(c) $x \in A$ e $A \not\subseteq B \Longrightarrow x \notin B$.

(d) $A \subseteq B$ e $x \notin B \Longrightarrow x \notin A$.

(e) $A \subseteq B \Longleftrightarrow \wp(A) \subseteq \wp(B)$.

4. Para A, B e C conjuntos dados, mostre que:

(a) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$.

(b) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$.

(c) $A = B \Longleftrightarrow \wp(A) = \wp(B)$.

(d) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

(e) Se $B \subseteq A$, então $A \times A - B \times B = [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - B)]$.

(f) $A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

(g) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq B \Longleftrightarrow (C - B) \subseteq (C - A)$.

(h) $\displaystyle\bigcap_{X \in \wp(A)} X = \emptyset$ e $\displaystyle\bigcup_{X \in \wp(A)} X = A$.

5. Sejam A, B e C conjuntos. Para cada uma das afirmações abaixo, mostre ou dê um contra-exemplo:

(a) $(A - B) \cup C = (A \cup B \cup C) - (A \cap B)$.

(b) $(A \cup C) - B = (A - B) \cup (C - B)$.

(c) $(A \cup B) - (A \cap B \cap C) = [A - (B \cap C)] \cup [B - ((A \cap C))]$.

(d) $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$.

(e) $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$.

(f) $A \subseteq C$ e $B \subseteq C \Longrightarrow (A \cup B) \subseteq C$.

(g) $A \subseteq B$ e $A \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq B \cap C$.

6. Para conjuntos A e B, definimos a **diferença simétrica** de A e B, e denotamos por $A \triangle B$, como sendo o conjunto $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Mostre que:

(a) $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

(b) *(Comutativa)* - $A \triangle B = B \triangle A$.

(c) *(Associativa)* - $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

(d) *(Elemento Neutro)* - Existe um conjunto Φ tal que, para todo conjunto A tem-se que $A \triangle \Phi = A$.

(e) *(Elemento Inverso)* - Para cada conjunto A, existe um conjunto B tal que $A \triangle B = \Phi$.

(f) Mostre que $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$, para quaisquer conjuntos A, B e C.

7. Sejam A, B e E conjuntos tais que $E \neq \emptyset$. Mostre que se $A \times E = B \times E$, então $A = B$.

8. Sejam A e B conjuntos tais que $A \nsubseteq B$. Suponha que E seja um conjunto tal que $A \times E = B \times E$. Mostre que $E = \emptyset$.

9. Em cada um dos casos abaixo, considere a família infinita de conjuntos $\{B_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ e determine $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ e $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$.

   (a) $B_i = \{0, 1, 2, 3, ..., 2i\}$.

   (b) $B_i = \{i-1, i, i+1\}$.

   (c) $B_i = \left[\dfrac{3}{i}, \dfrac{5i+2}{i}\right] \bigcup \{10+i\}$.

   (d) $B_i = \left[-1, 3+\dfrac{1}{i}\right] \bigcup \left[5, \dfrac{5i+1}{i}\right]$.

10. Sejam I e J conjuntos tais que $J \subseteq I$, e $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família indexada de conjuntos. Mostre que:

    (a) $\displaystyle\bigcup_{j\in J} A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

    (b) $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{j\in J} A_j$.

11. Determine:

    (a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-1+1/n, 1-1/n]$.

    (b) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-1-1/n, 1+1/n)$.

    (c) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-1/n, 1/n)$.

12. Sejam A um conjunto e $\mathcal{C} = \{B_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ uma família de conjuntos. Mostre que:

    (a) $\displaystyle A \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} (A \cap B_\gamma)$.

    (b) $\displaystyle A \cup \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (A \cup B_\gamma)$.

Capítulo 3

Relações

3.1 Definições e exemplos

Utilizando pares ordenados, podemos estabelecer a teoria matemática das relações através da linguagem de conjuntos.

Começamos considerando o conjunto $A \times B$, onde A é o conjunto das mulheres e $B = \{\text{homens}\}$. Quando falamos "Maria é esposa de João" estamos dizendo que Maria esta relaciona com João pela relação "ser esposa de" ou seja, o par ordenado (a, b), onde $a =$Maria e $b =$ João, pertencem a relação. Note que o par (b, a) não pertence a relação, pois João não é esposa de Maria. Se a relação fosse "ser casado com", então ambos os pares estariam na relação. Formalmente temos:

Definição 3.1. *Uma* **relação entre dois conjuntos** A *e* B*, denotada por* $\mathcal{R}(A, B)$*, ou simplesmente por* $\mathcal{R}$*, é um subconjunto de* $A \times B$*.*

Se um par $(a, b) \in \mathcal{R}$*, dizemos que* a **esta relacionado com** b**, pela relação** $\mathcal{R}$ *e escrevemos* $a\mathcal{R}b$*.*

Se $A = B$*, então* $\mathcal{R}(A, A)$ *é dita ser uma* **relação sobre um conjunto** A *ou uma* **relação em** A*.*

Se $\mathcal{R}(A, B)$ *é uma relação em* $A \times B$*, dizemos que* $\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a);\ a\mathcal{R}b\}$ *é a* **relação inversa** *de* $\mathcal{R}$*.*

Como conjuntos, há duas maneiras de representar uma relação, uma é listando os seus elementos e a outra é definindo uma regra, na qual escolhemos os pares ordenados que satisfazem esta regra.

Exemplo 3.2. **(1)** *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Definimos, a seguir 3 relações:*

$\mathcal{R}_1 = \{(1, a), (1, b), (3, c)\}$

$\mathcal{R}_2 = \{(2, a), (2, b), (1, a), (1, b), (3, a), (3, b)\}$

$\mathcal{R}_3 = \emptyset.$

(2) *Seja $A = \{a, b, c\}$. Definimos, sobre A as relações:*

$\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

$\mathcal{R}_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

$\mathcal{R}_3 = A \times A.$

(3) *Sejam $A = \mathbb{Z}$. Definimos, sobre A as relações:*

$\mathcal{R}_1 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ a < b\}$

$\mathcal{R}_2 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ a \mid b\}.$

(4) *Sejam $A = \mathbb{Z}$. Para as relações definidas no exemplo anterior, temos:*

$\mathcal{R}_1^{-1} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ a > b\}$

$\mathcal{R}_2^{-1} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ b \mid a\}.$

Podemos visualizar algumas propriedades de uma relação através de sua representação gráfica. para vermos isso, necessitamos definir algumas noções.

Definição 3.3. *Seja $\mathcal{R}$ uma relação em $A \times B$. O* **domínio** *de $\mathcal{R}$, denotado por $Dom(\mathcal{R})$, é o subconjunto de A dado por*

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A; a\mathcal{R}b \text{ para algum } b \in B\}.$$

A **imagem** *de $\mathcal{R}$, denotado por $Im(\mathcal{R})$, é o subconjunto de B dado por*

$$Im(\mathcal{R}) = \{b \in B; a\mathcal{R}b \text{ para algum } a \in A\}.$$

Podemos colocar os pares ordenados da relação $\mathcal{R}$ num diagrama coordenado de $A \times B$ e, o conjuntos destes pontos é dito ser o **gráfico ou diagrama cartesiano** *de $\mathcal{R}$*

Outro tipo de representação geométrica de uma relação, muito usado quando o conjunto A é finito, é o **diagrama de setas**, onde representamos os elementos de A por pontos e a relação $\mathcal{R}$ por setas ligando estes pontos, ou seja, se $(a, b) \in \mathcal{R}$, então desenhamos uma seta com início no ponto a e término no ponto b. Por exemplo, se $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c)\}$, então o diagrama de setas de $\mathcal{R}$ é

Daremos a seguir as propriedades mais importantes que uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto A pode satisfazer.

Definição 3.4. *Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto A. Então dizemos que:*

- *$\mathcal{R}$ é* **reflexiva** *se a condição $(\forall x \in A)(x\mathcal{R}x)$ for verdadeira, ou seja, se para todo $x \in A$, $(x, x) \in \mathcal{R}$.*
- *$\mathcal{R}$ é* **simétrica** *se a condição $(\forall x, y \in A)(x\mathcal{R}y \longrightarrow y\mathcal{R}x)$ for verdadeira, ou seja, se para todo $x, y \in A$, se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$.*
- *$\mathcal{R}$ é* **transitiva** *se a condição $(\forall x, y, z \in A)(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \longrightarrow x\mathcal{R}z)$ for verdadeira, ou seja, se para todo $x, y, z \in A$, se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$.*
- *$\mathcal{R}$ é* **anti-simétrica** *se a condição $(\forall x, y \in A)(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \longrightarrow x = y)$ for verdadeira, ou seja, se para todo $x, y \in A$, se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, x) \in \mathcal{R}$, então $x = y$.*

Exemplo 3.5. **(1)** Seja A um conjunto qualquer. A relação $\Delta = \{(x, x); x \in A\}$ é uma relação sobre A que é reflexiva, simétrica e transitiva. Esta é chamada a relação identidade ou a diagonal.

(2) Seja A um conjunto qualquer. A relação $A \times A$ é uma relação sobre A que é reflexiva, simétrica e transitiva. Não é anti-simétrica.

(3) Para $A = \{a, b, c\}$, temos:
$\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$ é uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Não é simétrica.
$\mathcal{R}_2 = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$ é uma relação simétrica e transitiva. Não é reflexiva e nem anti-simétrica.
$\mathcal{R}_3 = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a), (b, c)\}$ é uma relação que não é simétrica, nem transitiva, nem reflexiva e nem anti-simétrica.

(4) Para $A = \mathbb{N}$, temos:
$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x \text{ é um divisor de } y\}$ é uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Não é simétrica.

(5) Para $A = \mathbb{Z}$, temos:
$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x - y \text{ é múltiplo de } 3\}$ é uma relação reflexiva, simétrica e

transitiva. Não é anti-simétrica.

(6) Seja A uma família de conjuntos. Para X, $Y \in A$, a relação "X está contido em Y" é uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Não é simétrica.

(7) Seja A o conjunto das proposições. Para p, $q \in A$, a relação "Se p então q" é uma relação reflexiva e transitiva. Não é simétrica e nem anti-simétrica.

3.2 Relações de Equivalências e Partições

Um tipo de relações muito importante na matemática moderna, que aparece em todas as áreas de estudo são as relações de equivalências.

Definição 3.6. *Uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto A é dita ser uma* **relação de equivalência sobre** A *se $\mathcal{R}$ é reflexiva, simétrica e transitiva.*

Exemplo 3.7. A relação diagonal definida no exemplo **(1)** é uma relação de equivalência sobre A. Está é a "menor" relação de equivalência sobre A e, a relação definida no exemplo **(2)** é a "maior" relação de equivalência sobre A. Também como visto acima, a relação $\mathcal{R}$ definidas no exemplo **(5)** é uma relação de equivalência sobre o conjunto dos números inteiros.

Definição 3.8. *Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A. Para cada $a \in A$, o subconjunto de A definido por $\overline{a} = \{x \in A; x\mathcal{R}a\}$, é dito ser a* **classe de equivalência determinada pelo elemento** a **módulo** $\mathcal{R}$.

O conjunto das classes de equivalência módulo $\mathcal{R}$, será indicado por $A/\mathcal{R}$ e chamado de **conjunto quociente de** A **por** $\mathcal{R}$.

Note que se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A, então para todo $a \in A$, temos $a \in \overline{a}$, ou seja, cada classe de equivalência é um subconjunto não vazio de A.

Exemplo 3.9. Considere a relação de equivalência $\mathcal{R}$ definidas no exemplo **(5)**, ou seja, $A = \mathbb{Z}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; x - y \text{ é múltiplo de } 3\}$.

Para $0 \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned}\overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z};\ x \text{ é múltiplo de } 3\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ x = 3k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}\\ &= 3\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Para $1 \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned}\overline{1} &= \{x \in \mathbb{Z};\ x - 1 \text{ é múltiplo de } 3\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ x = 3k + 1, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}\\ &= 3\mathbb{Z} + 1.\end{aligned}$$

Para $2 \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned}\overline{2} &= \{x \in \mathbb{Z};\ x - 2 \text{ é múltiplo de } 3\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ x = 3k + 2, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}\\ &= 3\mathbb{Z} + 2.\end{aligned}$$

Para $3 \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned}\overline{3} &= \{x \in \mathbb{Z};\ x - 3 \text{ é múltiplo de } 3\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z};\ x = 3k + 3 = 3(k+1), \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\}\\ &= 3\mathbb{Z} = \overline{0}.\end{aligned}$$

Veremos no próximo teorema que de fato $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

Com relação as classes de equivalência temos:

Teorema 3.10. *Sejam $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A e a, $b \in A$. As seguintes proposições são equivalentes:*

(a) $a\mathcal{R}b$ *(b)* $a \in \overline{b}$ *(c)* $b \in \overline{a}$ *(d)* $\overline{a} = \overline{b}$.

Dem.: (a) $\Longleftrightarrow$ (b) Decorre imediatamente da definição de classe de equivalência.

(b) $\Longrightarrow$ (c)

$$\begin{aligned}a \in \overline{b} &\Longrightarrow a\mathcal{R}b, \text{ pela definição de classe,}\\ &\Longrightarrow b\mathcal{R}a, \text{ pois } \mathcal{R} \text{ é simétrica,}\\ &\Longrightarrow b \in \overline{a}, \text{ pela definição de classe.}\end{aligned}$$

(c) $\Longrightarrow$ (d) Note que $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são dois conjuntos, assim, mostrar que $\overline{a} = \overline{b}$ é equivalente a mostrar que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ e $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. Mostremos que $\overline{a} \subseteq \overline{b}$, a outra inclusão é análoga.

Para $x \in \overline{a}$, temos que $x\mathcal{R}a$ e, como por hipótese, $b \in \overline{a}$, temos também que $b\mathcal{R}a$. Como $\mathcal{R}$ é simétrica, obtemos $x\mathcal{R}a$ e $a\mathcal{R}b$, o que implica pela transitividade de $\mathcal{R}$ que $x\mathcal{R}b$, ou seja, $x \in \overline{b}$.

(d) $\Longrightarrow$ (a) Seja $x \in \overline{a} = \overline{b}$. Então, pela definição de classe, temos que $x\mathcal{R}a$ e $x\mathcal{R}b$. Agora, da propriedade simétrica e transitiva de $\mathcal{R}$, obtemos $a\mathcal{R}b$. $\square$

Mostremos agora a afirmação feita no final do exemplo anterior, ou seja, para $A = \mathbb{Z}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; x - y$ é múltiplo de $3\}$, temos $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

É obvio que $\mathbb{Z}/\mathcal{R} \supseteq \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. Agora, se $\overline{a} \in \mathbb{Z}/\mathcal{R}$, então dividindo a por 3, obtemos que $a = 3q + r$, com $r = 0, 1$ ou 2. Neste caso, temos claramente que $r \in \overline{a}$ e, pelo teorema anterior, temos $\overline{a} = \overline{r}$, ou seja $\mathbb{Z}/\mathcal{R} \subseteq \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

Relações de equivalências estão diretamente relacionadas com a noção de partição de um conjunto.

Definição 3.11. *Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos não vazios de A é uma* **partição** *de A se as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) dois elementos quaisquer de $\mathcal{F}$ ou são iguais ou são disjuntos;

(b) a união dos elementos de $\mathcal{F}$ é igual a A.

Exemplo 3.12. **(1)** A família $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$ é uma partição do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(2) Seja $A = \mathbb{Z}$. A família $\mathcal{F} = \{3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z} + 1, 3\mathbb{Z} + 2\}$ é uma partição de A.

(3) A família $\mathcal{F} = \{(-\infty, -1), [-1, 1], (1, +\infty)\}$ é uma partição de $\mathbb{R}$.

O próximo teorema nos mostra como uma relação de equivalência determina uma partição de um conjunto.

Teorema 3.13. *Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio A, então $A/\mathcal{R}$ é uma partição de A.*

Dem.: Pela definição de partição, temos que mostrar que cada elemento de $A/\mathcal{R}$ é não vazio e que valem as propriedades (a) e (b) da definição **3.11**.

Para cada $\overline{a} \in A/\mathcal{R}$, como $\mathcal{R}$ é reflexiva, temos que $a \in \overline{a}$, o que mostra que $\overline{a} \neq \emptyset$.

Mostremos agora que vale a propriedade (a), ou seja, para cada $\overline{a}$ e $\overline{b}$ em $A/\mathcal{R}$, temos $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$ ou $\overline{a} = \overline{b}$.

Suponhamos que $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ e seja $x \in \overline{a} \cap \overline{b}$. Então $x \in \overline{a}$ e $x \in \overline{b}$. Da definição de classes de equivalência, temos que $x\mathcal{R}a$ e $x\mathcal{R}b$. Agora, do fato de $\mathcal{R}$ ser simétrica e transitiva, obtemos que $a\mathcal{R}b$. Das equivalências do teorema anterior temos $\overline{a} = \overline{b}$, o que mostra (a).

Para mostrar que vale a propriedade (b), temos que mostrar que $\bigcup_{a\in A} \overline{a} = A$, ou seja que $\bigcup_{a\in A} \overline{a} \subseteq A$ e $\bigcup_{a\in A} \overline{a} \supseteq A$.

A inclusão $\bigcup_{a\in A} \overline{a} \subseteq A$ é imediata, pois $\overline{a} \subseteq A$ para cada $a \in A$.

Agora, seja $x \in A$. Como $x\mathcal{R}x$, temos que $x \in \overline{x}$, o que implica que $x \in \bigcup_{a\in A} \overline{a}$. Portanto $\bigcup_{a\in A} \overline{a} \supseteq A$. □

Agora, vejamos como uma partição determina uma relação de equivalência sobre um conjunto.

Teorema 3.14. *Seja A um conjunto não vazio. Se $\mathcal{F}$ é uma partição de A, então existe uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ sobre A tal que $A/\mathcal{R} = \mathcal{F}$.*

Dem.: Para todo $a, b \in A$, definimos $\mathcal{R}$ por:

$$a\mathcal{R}b \iff \text{existe } X \in \mathcal{F} \text{ tal que } a, b \in X.$$

Mostremos que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

(i) Para cada $a \in A$, desde que $\bigcap \mathcal{F} = A$, existe um $X \in \mathcal{F}$ tal que $a \in X$. Assim, $a\mathcal{R}a$, ou seja, $\mathcal{R}$ é reflexiva.

(ii) Para $a, b \in A$, se $a\mathcal{R}b$, então pela definição de $\mathcal{R}$, existe um elemento $X \in \mathcal{F}$, tal que $a, b \in X$, o que claramente implica que $b\mathcal{R}a$. Logo, $\mathcal{R}$ é simétrica.

(iii) Se $a, b, c \in A$ são tais que $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$, então existem $X, Y \in \mathcal{F}$ tais que $a, b \in X$ e $b, c \in Y$. Assim, $b \in X \cap Y$, ou seja, $X \cap Y \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F}$ é uma partição, temos que $X = Y$ e, então $a, c \in X = Y$, o que mostra que $a\mathcal{R}c$.

Mostremos agora que $A/\mathcal{R} = \mathcal{F}$.

Dado $a \in A$, temos que existe um um único $X \in \mathcal{F}$, tal que $a \in X$, onde a unicidade segue da propriedade (a) valer para $\mathcal{F}$. Da definição de $\mathcal{R}$ é claro que $\overline{a} = X$, o que implica que $A/\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}$.

Por outro lado, para cada $X \in \mathcal{F}$, desde que $X \neq \emptyset$, temos que existe $a \in X$. Claramente $X = \overline{a}$, o que mostra que $A/\mathcal{R} \supseteq \mathcal{F}$. □

Exemplo 3.15. Dada a partição $\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}\}$ de $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, temos a relação de equivalência associada

$\mathcal{R} = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(d,e),(d,f),(e,d),(f,d),(e,e),(e,f),$ $(f,e),(f,f)\}$.

3.3 Relações de Ordem

Definição 3.16. *Uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto não vazio A é dita ser uma* **relação de ordem** *sobre A se $\mathcal{R}$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.*

Se existe uma relação de ordem sobre o conjunto A, dizemos que A é um conjunto **parcialmente ordenado** *ou simplesmente* **ordenado**.

Dada uma relação de ordem sobre um conjunto A, dizemos que os elementos $A, b \in A$ são **comparáveis** *mediante $\mathcal{R}$ se $a\mathcal{R}b$ ou $b\mathcal{R}a$.*

Se quaisquer dois elementos de A são comparáveis mediante $\mathcal{R}$, então dizemos que $\mathcal{R}$ é uma **ordem total** *sobre A e, neste caso, dizemos que A é um conjunto* **totalmente ordenado**.

Em uma relação de ordem, se $a\mathcal{R}b$, também usaremos a notação $a \prec b$ que lemos "a precede b na relação $\mathcal{R}$".

Exemplo 3.17. (1) A relação $\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)\}$ é uma relação de ordem total sobre $A = \{a,b,c\}$. Faça o diagrama de setas desta relação e observe que não há dois pontos que não estejam ligados por uma flecha, isso deve ocorrer sempre que a ordem for total.

(2) A relação $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{R}$ por

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \leq y$$

é uma ordem total sobre $\mathbb{R}$ chamada a ordem usual.

(3) A relação $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{N}$ por

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \text{ divide } y$$

é uma relação de ordem sobre $\mathbb{N}$, que não é total.

(4) A relação de inclusão sobre uma família de subconjuntos de um dado conjunto é uma relação de ordem, que em geral não é total.

Definição 3.18. *Sejam A um conjunto ordenado pela relação de ordem $\prec$ e $S \subseteq A$, um subconjunto não vazio. Dizemos que:*

(a) Um elemento $L \in A$ é um **limite superior** *de S se a seguinte proposição for verdadeira*

$$(\forall x)(x \in S \longrightarrow x \prec L),$$

isto é, quando qualquer elemento de S precede L.

(b) Um elemento $l \in A$ é um **limite inferior** *de S se a seguinte proposição for verdadeira*

$$(\forall x)(x \in S \longrightarrow l \prec x),$$

isto é, quando l precede qualquer elemento de S.

(c) Um elemento $M \in S$ é um **máximo** *de S se a seguinte proposição for verdadeira*

$$(\forall x)(x \in S \longrightarrow x \prec M),$$

isto é, quando M é um limite superior de S e $M \in S$.

(d) Um elemento $m \in S$ é um **mínimo** *de S se a seguinte proposição for verdadeira*

$$(\forall x)(x \in S \longrightarrow m \prec x),$$

isto é, quando m é um limite inferior de S e $m \in S$.

(e) O **supremo** *de S é o mínimo, caso exista, do conjunto dos limites superiores de S.*

(f) O **ínfimo** *de S é o máximo, caso exista, do conjunto dos limites inferiores de S.*

Exemplo 3.19. Para $A = \mathbb{R}$ e $S = (0, 1]$, com a ordem usual, temos:

(a) O conjunto dos limites superiores de S é $[1, +\infty)$.

(b) O conjunto dos limites inferiores de S é $(-\infty, 1]$.

(c) O máximo de S é 1.

(d) S não tem mínimo.

(e) O supremo de S é 1.

(f) O ínfimo de S é 0.

Exemplo 3.20. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 36\}$, $S = \{2, 4, 6\}$ e a relação de ordem sendo a divisibilidade, temos:

(a) O conjunto dos limites superiores de S é $\{12, 24, 36\}$.

(b) O conjunto dos limites inferiores de S é $\{1, 2\}$.

(c) S não tem máximo.

(d) O mínimo de S é 2.

(e) O supremo de S é 12.

(f) O ínfimo de S é 2.

Teorema 3.21. *Seja S um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado A. Se existe um máximo (resp. mínimo) de S, então ele é único.*

Dem.: Vamos fazer a demonstração para a unicidade do máximo, o caso de mínimo é análogo.

Suponhamos que M_1 e M_2 são máximos de S. Temos então:

M_1 é máximo e $M_2 \in S$, o que implica que $M_2 \prec M_1$.

M_2 é máximo e $M_1 \in S$, o que implica que $M_1 \prec M_2$.

Como $\prec$ é anti-simétrica, temos que $M_1 = M_2$. □

3.4 Funções

Aqui somente apresentaremos a definição de função usando a noção de relação. As propriedades e as noções de injetividade, sobrejetividade, bijetividade, função composta e função inversa serão assumidas conhecidas para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

Normalmente o que vemos como definição de função é: *Função é uma regra de correspondência, que associa a cada elemento x de um certo conjunto, (chamado de domínio da função) um único elemento y em um outro conjunto (Chamado de contra-domínio da função).*

A definição formal de função usando conjuntos e a noção de relação é:

Definição 3.22. *Sejam A e B conjuntos. Uma* **função** *de A em B é uma relação f de A em B satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) / $Dom(f) = A$.

(b) Se x, y e $z \in A$ são tais que $x\ f\ y$ e $x\ f\ z$, então $y = z$.

Escreveremos $f : A \to B$, para denotar que f é uma função de A em B.

3.5 Exercícios

1. Determine quais das propriedades: reflexiva, simétrica, transitiva, anti-simétrica são satisfeitas por cada uma das seguintes relações sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos

números reais:

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y);\ y = 1/x\}$.

(b) $\mathcal{R} = \{(x, y);\ \ |x - y| \leq 1\}$.

(c) $\mathcal{R} = \{(x, y);\ y^2 = x^2\}$.

(d) $\mathcal{R} = \{(x, y);\ \ x \neq y\}$.

(e) $\mathcal{R} = \{(x, y);\ xy \geq 0\}$.

2. Dê um exemplo de uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto A que seja simétrica e transitiva e não seja reflexiva.

3. Dê dois exemplos, um listando os pares ordenados e o outro, descrevendo-os através de uma regra, de relações que tenham as propriedades reflexiva e simétrica e não tenham a transitiva.

4. Sejam $\mathcal{R}$ uma relação sobre A e Δ a relação identidade sobre um conjunto não vazio A, isto é, $\Delta = \{(x, x);\ x \in A\}$. Mostre que:

   (a) $\mathcal{R}$ é reflexiva se, e somente se $\Delta \subseteq \mathcal{R}$.

   (b) Se $\mathcal{R}$ tiver ambas as propriedades simétrica e anti-simétrica, então $\mathcal{R} = \Delta$.

   (c) $\mathcal{R}$ é simétrica se, e somente se $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.

   (d) Se $\mathcal{R} \neq \emptyset$ é anti-simétrica, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \Delta$.

5. Sejam A um conjunto e $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ relações sobre A. Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

   (a) Se $\mathcal{R}$ é simétrica, então $\mathcal{R}^{-1}$ é simétrica.

   (b) Se $\mathcal{R}$ é anti-simétrica, então $\mathcal{R}^{-1}$ é anti-simétrica.

   (c) Se $\mathcal{R}$ é transitiva, então $\mathcal{R}^{-1}$ é transitiva.

   (d) Se $\mathcal{R}$ é reflexiva, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \neq \emptyset$.

   (e) Se $\mathcal{R}$ é simétrica, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \neq \emptyset$.

   (f) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são simétricas, então $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ é simétrica.

   (g) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são simétricas, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ é simétrica.

   (h) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são transitivas, então $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ é transitiva.

   (i) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são transitivas, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ é transitiva.

   (j) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são anti-simétricas, então $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ é anti-simétrica.

   (l) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são anti-simétricas, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ é anti-simétrica.

(m) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são reflexivas, então $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ é reflexiva.

(n) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são reflexivas, então $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ é reflexiva.

6. Existe algum conjunto A tal que toda relação sobre A é:

   (a) Reflexiva?

   (b) Simétrica?

   (c) Transitiva?

   (d) Anti-simétrica?

   Existe mais de um conjunto?

7. Quais das relações dadas no primeiro exercício são de equivalência? Justifique.

8. (a) Verifique que a relação

   $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,5),(5,2),(3,5),(5,3),(2,30,(3,2)\}$

   é uma relação de equivalência em $A = \{1,2,3,4,5\}$.

   (b) Determine $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ e $\bar{5}$.

   (c) Determine $A/\mathcal{R}$.

9. Seja $\sim$ a relação sobre $\mathbb{R}$ definida por $x \sim y$ se, e somente se $x - y \in \mathbb{Z}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{R}$.

10. Defina a relação $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{R}$ por $x\mathcal{R}y$ se, e somente se $cos(x) = cos(y)$ e $sen(x) = sen(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

    (a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

    (b) Se $a \in \mathbb{R}$, determine $\bar{a}$.

11. Seja $\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3);\ x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3\}$. Defina em $A = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ a seguinte relação:

    $$x \sim y \text{ se existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \alpha y, \text{ para todo } x, y \in A.$$

    (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

    (b) Descreva geometricamente $\bar{x}$, para algum $x \in A$.

12. Seja f uma função real com domínio real. Defina a relação $\mathcal{R}_f$ pela regra

    $$x\mathcal{R}_f y \text{ se, e somente se } f(x) = f(y).$$

    Mostre que $\mathcal{R}_f$ é uma relação de equivalência.

13. Em $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, defina a seguinte relação:

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c, \text{ para todo } a, b, c, d \in \mathbb{N}.$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

(b) Encontre as seguintes classe de equivalências $\overline{(1, 0)}$, $\overline{(0, 1)}$, $\overline{(1, 1)}$ e $\overline{(0, 0)}$.

14. Defina em $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ a seguinte relação:

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc, \text{ para todo } a, c \in \mathbb{Z} \text{ e } b, d \in \mathbb{N}.$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

(b) Pense um pouco sobre o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}/\sim$. Compare-o com $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais.

Capítulo 4

Noções de Cardinalidade

4.1 Conjuntos equipotentes, enumeráveis e contáveis

Como podemos determinar quando dois conjuntos tem o mesmo tamanho?

Se tais conjuntos forem finitos podemos fazer isso contando os seus elementos. Mas esta técnica não funciona para conjuntos infinitos.

Iremos determinar quando dois conjuntos tem o mesmo tamanho, ou o mesmo número de elementos, não contando contando quantos elementos cada um deles tem, mas sim, tentando corresponder cada elemento de um conjunto com um único elemento do outro e vice-versa, mais especificamente temos:

Definição 4.1. *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A e B tem a* **mesma cardinalidade***, ou que eles são* **equipotentes***, e escrevemos $A \sim B$, se existir uma função bijetora $f : A \to B$.*

Vale observar que com esta definição, estamos dizendo quando dois conjuntos tem o mesmo número de elementos sem necessariamente dizer qual é esse número.

Uma importante propriedade da noção de conjuntos equipotentes, é que podemos separar os conjuntos em classes de conjuntos que tem a mesma cardinalidade, ou seja a relação $\sim$ é de fato uma relação de equivalência.

Teorema 4.2. *Para um conjunto universo U, a relação de equipotência é uma relação de equivalência em $\wp(U)$.*

Dem.: Temos que mostrar que $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

(i) Para todo $A \in \wp(U)$, temos que $I : A \to A$, dada por $I(a) = a$, para todo $a \in A$, isto é, a função identidade, é uma bijeção. Logo $A \sim A$.

(ii) Se $A, B \in \wp(U)$ são tais que $A\mathrm{Im}\ B$, então existe $f : A \to B$ bijetora. Logo $f^{-1} : B \to A$ também é bijetora, o que mostra que $B \sim A$.

(iii) Se $A, B, C \in \wp(U)$ são tais que $A\mathrm{Im}\ B$ e $B \sim C$, então existem $f : A \to B$ e $g : B \to C$ bijetoras. Logo $g \circ f : A \to C$ também é bijetora, o que mostra que $A \sim C$.

De (i), (ii) e (iii) temos que $\sim$ é uma relação de equivalência, como queríamos demonstrar. □

Exemplo 4.3. (1) Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Então $\mathbb{N}$ e $2\mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade, ou seja, o conjunto dos naturais e o conjunto dos naturais pares têm a mesma cardinalidade.

De fato, basta observar que $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, definida por $f(n) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ é uma função bijetora.

De maneira análoga mostra-se que $\mathbb{N}$ e o conjunto dos naturais ímpares $2\mathbb{N}+1$ são equipotentes.

(2) O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$.

De fato, basta observar que $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definida por

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se} \quad n \geq 0 \\ -(2n+1), & \text{se} \quad n < 0 \end{cases},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, é uma bijeção.

(3) Sejam $[a, b]$ e $[c, d]$ intervalos fechados de $\mathbb{R}$, onde $a < b$ e $c < d$. Então $[a, b] \sim [c, d]$.

De fato a função $g : [a, b] \to [c, d]$, definida por $g(x) = \dfrac{d-c}{b-a}(x-a) + c$, para todo $x \in [a, b]$ é uma bijeção.

Usando restrições da função g definida acima, pode-se mostrar que se $a < b$ e $c < d$ são números reais, então $(a, b] \sim (c, d]$, $(a, b) \sim (c, d)$ e $[a, b) \sim [c, d)$.

(4) O intervalo $(-1, 1)$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$.

Basta ver que a função $h : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \dfrac{x}{1-\mid x \mid}$, para todo $x \in (-1, 1)$ é uma bijeção.

Para uma melhor análise da cardinalidade de conjuntos, necessitamos definir conjunto finito, infinito, enumerável, não enumerável, contável, etc... É obvio que um conjunto infinito é um conjunto que não é finito e vice-versa. Assim, precisamos definir uma destas noções e teremos a outra. Escolhemos definir conjunto infinito.

Definição 4.4. *Seja A um conjunto. Dizemos que:*

(a) A é um **conjunto infinito** *se A é equipotente a um subconjunto próprio de A.*

(b) A é um **conjunto finito** *se A não for infinito.*

(c) A é um **conjunto enumerável** *se $A \sim \mathbb{N}$.*

(d) A é um **conjunto contável** *se A é finito ou enumerável.*

(e) A é um **conjunto não enumerável** *se A não é contável.*

Exemplo 4.5. (1) Do exemplo anterior, temos que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ e qualquer intervalo aberto, fechado ou semi aberto de $\mathbb{R}$ são exemplos de conjuntos infinitos.

(2) O conjunto vazio é finito, pois não contém subconjunto próprio.

(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, o conjunto $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ é finito. Veremos por indução sobre n. Para Para $n = 1$, o resultado é imediato, desde que o único subconjunto próprio de $\mathbb{N}_n$ é o vazio e não existe uma bijeção $f : \emptyset \to \mathbb{N}_1$. Se $n > 1$, suponhamos que o resultado vale para n e provaremos que ele vale para $n + 1$. Mais adiante provaremos que isso implica que o resultado vale para toco $n \in \mathbb{N}$.

Se $\mathbb{N}_{n+1}$ não for finito, então existe um subconjunto próprio A de $\mathbb{N}_{n+1}$ tal que AIm $\mathbb{N}_{n+1}$. Seja $f : \mathbb{N}_{n+1} \to A$ uma bijeção. Então a restrição $f : \mathbb{N}_n \to A - \{f(n+1)\}$ é claramente uma bijeção, o que contradiz o fato de $\mathbb{N}_n$ ser finito.

(4) Segue diretamente do teorema **4.2** que $\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável. Do exemplo **4.3, (2)**, temos que $\mathbb{Z}$ também é um conjunto enumerável.

Vejamos alguns resultados sobre conjuntos enumeráveis.

Teorema 4.6. *Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável. Todo subconjunto de um conjunto contável é contável.*

Dem.: Vamos demonstrar a primeira afirmação. A demonstração da segunda afirmação fica como exercício.

Sejam A um conjunto enumerável e B um subconjunto infinito de A.

Desde que $A \sim \mathbb{N}$, podemos escrever $A\{a_1, a_2, \ldots\}$, onde $a_i = f(i-1)$ para alguma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$.

Seja n_1 o menor índice para o qual $a_{n_1} \in B$. Desde que B é infinito, temos que $B - \{a_{n_1}\}$ é também infinito (mostre esta afirmação). Assim, seja n_2 o menor índice para o qual $a_{n_2} \in B - \{a_{n_1}\}$. Tendo definido $a_{n_{k-1}} \in B$, seja n_k o menor índice para o qual $a_k \in B - \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_{k-1}}\}$. Usando que B é infinito, temos que $B - \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_{k-1}}\} \neq \emptyset$, para cada $k \in \mathbb{N}$ é infinito. Assim, temos uma função bijetora $g : \mathbb{N} \to B$, dada por $g(k) = a_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, o que mostra que B é enumerável. $\square$.

Teorema 4.7. *O conjunto* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *é enumerável.*

Dem.: Seja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(n, m) = 2^n 3^m$. Usando o Teorema Fundamental da Aritmética temos que f é injetora. Assim, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um conjunto infinito (prove isso), temos que $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ é infinito e, pelo teorema anterior, temos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. $\square$.

Teorema 4.8. *A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Dem.: Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Vamos mostrar que $A \cup B$ é enumerável. Consideremos dois casos:

(1) $A \cap B = \emptyset$. Como $A \sim \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$, pela transitividade de $\sim$, temos que $A \sim 2\mathbb{N}$. De maneira análoga, temos $B \sim 2\mathbb{N} + 1$. Sejam $f : A \to 2\mathbb{N}$ e $g : B \to 2\mathbb{N} + 1$ as correspondentes bijeções. A função $h : A \cup B \to (2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N} + 1)$, onde $h = f \cup g$ é uma bijeção, pois $A \cap B = \emptyset$, o que implica que $A \cup B \sim (2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N} + 1) \sim \mathbb{N}$.

(2) $A \cap B \neq \emptyset$. Neste caso, para $C = B - A$, temos $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap C = \emptyset$. Como $C \subseteq B$, temos que C é enumerável ou finito. Se C for enumerável, recaímos no caso anterior. Se C for finito, é fácil ver que $A \cup C$ é enumerável. $\square$

Teorema 4.9. *O conjunto dos números racionais é enumerável.*

Dem.: Vamos usar que cada número racional pode ser representado de maneira única como $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ com $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. Sejam $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{p}{q}; \frac{p}{q} > 0\}$ e $\mathbb{Q}_- = \{\frac{p}{q}; \frac{p}{q} < 0\}$. Temos então $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ e, evidentemente $\mathbb{Q}_+ \sim \mathbb{Q}_-$. Do teorema anterior temos que para mostrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável, é suficiente mostrar que $\mathbb{Q}_+$ é enumerável.

Para isso, considere a função $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definida por $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$. É fácil ver que f é injetora. Logo, $\mathbb{Q}_+ \sim f(\mathbb{Q}_+) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Como claramente $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, temos que $f(\mathbb{Q}_+)$ é um subconjunto infinito de um conjunto enumerável. Do teorema **4.6** temos que $f(\mathbb{Q}_+)$ é enumerável. Portanto $\mathbb{Q}_+ \sim f(\mathbb{Q}_+) \sim \mathbb{N}$, ou seja, $\mathbb{Q}_+$ é enumerável, como queríamos. □

Vejamos agora alguns conjuntos não enumeráveis.

Teorema 4.10. *O intervalo aberto* $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ *é um conjunto não enumerável.*

Dem.: Dado qualquer numero real $x \in (0, 1)$, podemos expressá-lo na forma decimal

$$x = 0, x_1x_2x_3 \cdots ,$$

onde cada $x_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Para obtermos a unicidade nesta representação, os decimais finitos terão seu último dígito decrescido de uma unidade e adicionado 9's infinitamente. Assim, dois números no intervalo $(0, 1)$ serão iguais se, e somente se os dígitos correspondentes em sua representação decimal são iguais.

Agora, suponhamos por absurdo que $(0, 1)$ é um conjunto enumerável. Então existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$ e, consequentemente, podemos listar do elementos de $(0, 1)$, como segue

$$\begin{aligned} f(0) &= a_{01}a_{02}a_{03} \cdots \\ f(1) &= a_{11}a_{12}a_{13} \cdots \\ f(2) &= a_{21}a_{22}a_{23} \cdots \\ &\vdots \\ f(k) &= a_{k1}a_{k2}a_{k3} \cdots \end{aligned}$$

onde cada $a_{kj} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Vamos construir um elemento de $(0, 1)$ que não está na listagem acima, ou seja, vamos contradizer o fato de f ser sobrejetora.

Seja $y = y_1y_2y_3 \cdots$, onde $y_k = 3$ se $a_{kk} \neq 3$ e $y_k = 1$ se $a_{kk} = 3$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Claramente $z \in (0, 1)$, mas $z \neq f(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, pois $y_k \neq a_{kk}$. Portanto, $(0, 1)$ é não enumerável. □

Corolário 4.11. *O conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *é não enumerável.*

Dem.: Imediata pois $\mathbb{R} \sim (0, 1)$. □

Corolário 4.12. *O conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$ é não enumerável.*

Dem.: De fato, se $\mathbb{I}$ for enumerável, como $\mathbb{Q}$ é enumerável e $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, teríamos que $\mathbb{R}$ seria enumerável. □

4.2 Números cardinais e a hipótese do contínuo

Aqui não definiremos o que é um *número cardinal*, somente introduziremos eles como uma noção primitiva relacionada com o tamanho de conjuntos. Assumiremos que esta nova noção é guiada pelas seguintes leis:

C-1 . A cada conjunto A é associado um número cardinal, denotado por $card(A)$, e a cada número cardinal a existe um conjunto A com $card(A) = a$.

C-2 . $card(A) = 0$ se, e somente se $A = \emptyset$.

C-3 . Se $A \neq \emptyset$ e A é finito, isto é, $A\ sim\{1, 2, \ldots, k\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $card(A) = k$.

C-4 . Para quaisquer dois conjuntos A e B, temos $card(A) = card(B)$ se, e somente se $A \sim B$.

As leis C-2 e C-3 definem os números cardinais de conjuntos finitos, ou seja, *o número cardinal de um conjunto finito é o número de elementos deste conjunto.* Em termos de teoria dos conjuntos, C-1 e C-4 formam um axioma, o *axioma da cardinalidade*. Note que C-2 e C-3 são mais fáceis de serem aceitos, já C-1 e C-4 são mais difíceis pois estas leis não falam nada sobre $card(A)$ quando A é um conjunto infinito.

Dizemos que o número cardinal de um conjunto finito é um *número cardinal finito* e o de um conjunto infinito é *número cardinal transfinito*. Das propriedades C-2 e C-3, temos que os números cardinais finitos são precisamente os números naturais. Assim, temos uma relação de ordem natural: $0 < 1 < 2 < \cdots < k < k+1 < \cdots$. Já para dois números cardinais transfinitos a propriedade C-4 nos diz quando se eles são iguais ou não, agora queremos saber decidir quando um é *menor* que o outro.

Definição 4.13. *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que $A \preceq B$, ou que $card(A) \leq card(B)$ se existir uma função injetora $f : A \to B$. Dizemos que $A \prec B$, ou que $card(A) < card(B)$ se existir uma função injetora $f : A \to B$ e $A \nsim B$.*

Exemplo 4.14. $card(\mathbb{N}) < card(\mathbb{R})$.

De fato, existe $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{R}$ a inclusão, que é injetora e $\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$ pois $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Vejamos se $\leq$ define uma relação de ordem no conjunto dos números cardinais.

(i) $card(A) \leq card(A)$, pois a identidade $I_A : A \to A$ é injetora.

(ii) Se $card(A) \leq card(B)$ e $card(B) \leq card(C)$, então $card(A) \leq card(C)$, pois a composta de injetora é injetora.

(iii) Se $card(A) \leq card(B)$ e $card(B) \leq card(A)$, então $card(A) = card(B)$. A demonstração que esta propriedade é verdadeira é mais complicada e foge do objetivo deste curso. Ela segue do seguinte resultado que enunciaremos sem demonstração.

Teorema 4.15. Schröder-Bernstein - *Se A e B são conjuntos tais que A é equipotente a um subconjunto de B e B é equipotente a um subconjunto de A, então $A \sim B$.*

Corolário 4.16. *Se A e B são conjuntos tais que $card(A) \leq card(B)$ e $card(B) \leq card(A)$, então $card(A) = card(B)$.*

Com isso temos que o conjunto dos números cardinais é um conjunto ordenado pela ordem $\leq$.

Do exemplo **4.14** temos dois números cardinais transfinitos distintos, $card(\mathbb{N}) < card(\mathbb{R})$.

Sejam $\aleph_0 = card(\mathbb{N})$ e $\aleph_1 = card(\mathbb{R})$. Note que $\aleph_0$ e $\aleph_1$ não são números reais. A pergunta que surge é: *Existe algum conjunto cuja cardinalidade está entre $\aleph_0$ e $\aleph_1$?* A conjectura de que a resposta a esta pergunta é negativa é conhecida como a Hipótese do Contínuo.

Hipótese do Continuo - Não existe conjunto algum A com a propriedade $\aleph_0 < card(A) < \aleph_1$.

4.3 O número cardinal de um conjunto potência - o Teorema de Cantor

Seja X um conjunto. Já sabemos que se X é finito com n elementos, então $\wp(X)$ também é finito e tem 2^n elementos. Cantor provou que $card(X) < card(\wp(X))$, para qualquer conjunto X, o que nos permite construir uma infinidade de números cardinais transfinitos, por exemplo

$\aleph_0 = card(\mathbb{N}) < card(\wp(\mathbb{N})) < card(\wp(\wp((\mathbb{N})))) < \cdots$

Teorema 4.17. **Cantor -** *Se X é um conjunto, então $card(X) < card(\wp(X))$.*

Dem.: Se $X = \emptyset$, então $card(X) = 0$ e $\wp(X) = \{\emptyset\}$ com $card(\wp(X)) = 1 > 0$.

Se $X \neq \emptyset$, seja $g : X \to \wp(X)$ a função definida por $g(x) = \{x\}$, para todo $x \in X$. É claro que g é injetora, o que mostra que $card(X) \leq card(\wp(X))$.

Para mostrarmos que $card(X) < card(\wp(X))$, temos que mostrar que $X \nsim \wp(X)$. Suponhamos, por absurdo que $X \sim \wp(X)$. Seja $f : X \to \wp(X)$ uma bijeção. Considere $S = \{x \in X;\ x \notin f(x)\} \subseteq X$. Desde que f é sobrejetora e $S \in \wp(X)$, temos que existe $a \in X$ tal que $S = f(a)$. Se $a \in S$, então pela definição de S, temos que $a \notin f(a) = S$, o que é uma contradição. Se $a \notin S$, então novamente pela definição de S, temos que $a \in f(a) = S$, o que leva a uma contradição. Portanto $X \nsim \wp(X)$, como queríamos. $\square$

Para alguns autores a hipótese do contínuo é que não existe um número cardinal x tal que $\aleph_0 < x < card(\wp(\mathbb{N}))$.

4.4 Aritmética cardinal

1 - Adição de números cardinais.

Queremos uma definição de adição de números cardinais que generalize a noção de adição de números naturais, ou seja, dos números cardinais finitos.

Definição 4.18. *Sejam a e b números cardinais. A* **soma cardinal** *de a e b, denotada por $a + b$, é o números cardinal $card(A \cup B)$, onde A e B são conjuntos tais que $card(A) = a$, $card(B) = b$ e $A \cap B = \emptyset$.*

Para mostrar que esta operação está bem definida, devemos mostrar que sempre existe conjuntos A e B satisfazendo a definição e, que não depende da escolha de tais conjuntos.

Dados a e b cardinais, da propriedade C-1, existem conjuntos X e Y tais que $a = card(X)$ e $b = card(Y)$. Se $X \cap Y \neq \emptyset$, temos que $A = X \times \{0\}$ e $B = Y \times \{1\}$ são conjuntos tais que $card(A) = a$, $card(B) = b$ e $A \cap B = \emptyset$, o que mostra que existem conjuntos A e B como descritos na definição.

Se A' e B' são conjuntos com $A \sim A'$, $B \sim B'$ e $A' \cap B' = \emptyset$, então existem $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ bijetoras e, podemos ver facilmente que $f \cup g : A \cup B \to A' \cup B'$ é também bijetora, o que mostra que $A \cup B \sim A' \cup B'$, ou seja $card(A \cup B) = card(A' \cup B')$.

Desde que a união de conjuntos é comutativa e associativa, obtemos as propriedades correspondentes para soma cardinal.

Teorema 4.19. *Sejam a, b e c números cardinais. Então:*

(1) $a + b = b + a$.

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Exemplo 4.20. Encontre as seguintes somas cardinais.

(1) $4 + 3$.

Desde que $4 = card(\{1, 2, 3, 4\} = \mathbb{N}_4)$, $\mathbb{N}_7 = \mathbb{N}_4 \cup \{5, 6, 7\}$, $card\{5, 6, 7\} = 3$ e $\mathbb{N}_4 \cap \{5, 6, 7\} = \emptyset$, temos que $4 + 3 = card(\mathbb{N}_7) = 7$, o que coincide com a soma dos números naturais.

(2) $\aleph_0 + \aleph_0$.

Desde que $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \cap (2\mathbb{N} + 1)$, esta união é disjunta, $card(2\mathbb{N}) = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$ e $card(2\mathbb{N} + 1) = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$, temos $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

(3) $\aleph_1 + \aleph_0$.

Desde que $(0, 1) \sim \mathbb{R}$, temos que $\aleph_1 = card((0, 1))$. Seja $S = (0, 1) \cup \mathbb{N}$. Como $(0, 1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, temos que $card(S) = \aleph_1 + \aleph_0$.

Agora, $\mathbb{R} \sim (0, 1) \subseteq S$ e $S \subseteq \mathbb{R}$, então pelo teorema de Schröder-Bernstein, temos $card(\mathbb{R}) = card(S)$, ou seja, $\aleph_1 + \aleph_0 = \aleph_1$.

2 - Multiplicação de números cardinais.

Novamente queremos uma definição de multiplicação de cardinais que generalize a multiplicação dos naturais.

Definição 4.21. *Sejam a e b cardinais. O* **produto cardinal** *ab é definido como sendo o número cardinal do produto cartesiano $A \times B$, onde A e B são conjuntos com $card(A) = a$ e $card(B) = b$.*

Exercício 4.22. Mostre que se A, B, A' e B' são conjuntos com $A \sim A'$ e $B \sim B'$, então $A \times B \sim A' \times B'$, ou seja, que o produto cardinal está bem definido.

Como no caso da adição, usando propriedades do produto cartesiano de conjuntos, mostra-se as seguintes propriedades do produto de cardinais.

Teorema 4.23. *Se a, b e c são cardinais, então:*

(1) $ab = ba$.

(2) $a(bc) = (ab)c$.

(3) $a(b + c) = ab + ac$.

Dem.: Exercício. $\square$

Exemplo 4.24. Calcule os seguintes produtos cardinais:

(1) $1 \cdot a$, onde a é um número cardinal arbitrário.

Seja A um conjunto com $card(A) = a$. Como $\{1\} \times A \sim A$, temos que $1 \cdot a = a$.

(2) $0 \cdot a$, onde a é um número cardinal arbitrário.

Seja A um conjunto com $card(A) = a$. Como $\emptyset \times A = \emptyset$, temos que $0 \cdot a = 0$.

(3) $\aleph_0 \cdot \aleph_0$.

Desde que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, temos que $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

(4) $\aleph_1 \cdot \aleph_1$.

Vamos mostrar que $\aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$.

Note que $\aleph_1 = card((0, 1))$. Considere $f : (0, 1) \times (0, 1) \to (0, 1)$, definida por $f(0, x_1x_2x_3 \cdots, 0, y_1y_2y_3 \cdots) = 0, x_1y_1x_2y_2 \cdots$. É fácil ver que f é injetora e, consequentemente $\aleph_1 \cdot \aleph_1 \leq \aleph_1$. Por outro lado, a aplicação $g : (0, 1) \to (0, 1) \times (0, 1)$, definida por $g(x) = (x, x)$, para todo $x \in (0, 1)$, é claramente injetora, o que mostra que $\aleph_1 \cdot \aleph_1 \geq \aleph_1$. Agora, o resultado segue do teorema S-B.

3 - Potências de números cardinais.

Sejam A e B conjuntos. Denotaremos por B^A o conjunto de todas as funções de A em B, ou seja $B^A = \{f : A \to B; \quad f \quad \text{é função}\}$.

Definição 4.25. *Sejam a e b números cardinais com $a \neq 0$. Definimos a* **potência cardinal** *b^a como sendo o cardinal do conjunto B^A, onde A e B são conjuntos com $card(A) = a$ e $card(B) = b$.*

O próximo teorema nos garante que esta operação esta bem definida.

Teorema 4.26. *Sejam A, B, X e Y conjuntos tais que $A \sim X$ e $B \sim Y$. Então $B^A \sim Y^X$.*

Dem.: Desde que $A \sim X$ e $B \sim Y$, temos que existem funções bijetoras $g : A \to X$ e $h : B \to Y$. Queremos definir uma bijeção entre B^A e Y^X.

Para cada $f \in B^A$, temos

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g\downarrow & & \downarrow h \\ X & \overset{\psi(f)}{\dashrightarrow} & Y \end{array}$$

onde definimos $\psi(f) \in Y^X$ por $\psi(f) = h \circ f \circ g^{-1}$. Agora é fácil mostrar que $\psi : B^A \to Y^X$ é uma bijeção. □

Como propriedades da potenciação de cardinais temos:

Teorema 4.27. *Sejam a, b, x e y números cardinais. Então:*

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

(2) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(3) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Dem.: Exercício. □

Com a noção de potenciação, podemos calcular a cardinalidade do conjunto das partes de um conjunto A, que generaliza o resultado que diz que se A tem n elementos, então $\wp(A)$ tem 2^n elementos.

Teorema 4.28. *Seja A um conjunto. Então $card(\wp(A)) = 2^{card(A)}$.*

Dem.: Seja $B = \{0, 1\}$. Agora, é suficiente mostrarmos que $\wp(A) \sim B^A$. Assim, queremos encontrar uma função bijetora $\psi : \wp(A) \to B^A$.

Para cada $X \in \wp(A)$, considere $f_X \in B^A$ definida por

$$f_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a \notin X \\ 1 & \text{se} \quad a \in X \end{cases}$$

que é a função característica de X.

Assim, definimos $\psi(X) = f_X$, para cada $X \in \wp(A)$. É fácil ver que para $X, Y \in \wp(A)$, temos $X = Y$ se, e somente se $f_X = f_Y$, ou seja, ψ é injetora. Agora, para cada $f \in B^A$, seja $X = \{a \in A;\ f(a) = 1\}$. Claramente temos $f = f_X$, ou seja, ψ é sobrejetora. Portanto $card(\wp(A)) = card(B^A) = 2^{card(A)}$. $\square$

Como conseqüência deste teorema temos que $card(\wp(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$.

Vamos finalizar o estudo sobre cardinalidades mostrando que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ou seja, que $\mathbb{R}$ e $\wp(\mathbb{N})$ têm a mesma cardinalidade.

Teorema 4.29. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Dem.: Usando o teorema de S-B, é suficiente mostrarmos que $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$ e $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$.

Note que $\aleph_0 = card(\mathbb{Q})$, o que implica que $2^{\aleph_0} = card(\wp(\mathbb{Q}))$.

Considere $f : \mathbb{R} \to \wp(\mathbb{Q})$, definida por $f(a) = \{x \in \mathbb{Q};\ x < a\} \in \wp(\mathbb{Q})$, para cada $a \in \mathbb{R}$. Se a e b são números reais distintos, então, sem perda de generalidade, podemos supor que $a < b$. Logo, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$, o que implica que $r \in f(b)$ e $r \notin f(a)$, o que mostra que $f(a) \neq f(b)$. Consequentemente, f é uma função injetora. Portanto $\aleph_1 = card(\mathbb{R}) \leq card(\wp(\mathbb{Q})) = 2^{\aleph_0}$.

Por outro lado, é fácil ver que a função $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, definida por $\psi(g) = 0, g(0)g(1)g(2)\cdots \in \mathbb{R}$, para cada $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, é injetora, o que mostra que $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$, como queríamos. $\square$

Corolário 4.30. $\aleph_0 < \aleph_1$.

Dem.: Segue do teorema acima e do teorema de Cantor. $\square$

4.5 Exercícios

1. Seja A um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Mostre que $card(\mathbb{N}) = card(A)$.

2. Sejam A e B conjuntos tais que $A \sim \mathbb{N}$ e $B \sim \mathbb{N}$. Mostre que:
   (a) $A \bigcup B \sim \mathbb{N}$.
   (b) $A \times B \sim \mathbb{N}$.

3. Sejam $A_1, ..., A_n$ conjuntos tais que $A_i \sim \mathbb{N}$, para todo $i \in \{1, .., n\}$. Mostre que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \sim \mathbb{N}$.

4. Mostre que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definida por:
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par,} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$
é bijetora. Conclua que $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

5. Seja X um conjunto infinito e $x_0 \in X$. Mostre que $X - \{x_0\}$ é infinito.

6. Seja X um conjunto infinito e $Y \subseteq X$ finito. Mostre que $X - Y$ é infinito.

7. Sejam A, B, A' e B' conjuntos tais que $card(A) = card(A')$ e $card(B) = card(B')$,
$A \cap B = \emptyset$ e $A' \cap B' = \emptyset$. Mostre que $card(A' \cup B') = card(A \cup B)$.

8. Sejam X, Y, Z e W conjuntos tais que $X \sim Y$ e $Z \sim W$. Mostre que $X \times Z \sim Y \times W$.

9. Seja n um número cardinal finito. Mostre que $n < card(\mathbb{N})$.

10. Seja a o cardinal de um conjunto infinito. Mostre que $card(\mathbb{N}) \leq a$. Conclua que $card(\mathbb{N})$ é o menor cardinal transfinito.

11. Mostre que se A, B e C são conjuntos tais que $A \subseteq B \subseteq C$ e $A \sim C$ então $A \sim B$. (*Sug.:Use o Teorema de Schröder-Berstein*)

12. Sejam A e B conjuntos. Mostre que se $A \sim B$ então $\wp(A) \sim \wp(B)$

13. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que:
   (a) Se $card(A) \leq card(B)$ e $card(B) \leq card(C)$, então $card(A) \leq card(C)$.
   (b) Se $card(A) < card(B)$ e $card(B) < card(C)$ então $card(A) < card(C)$.