$2.^a$ Lista de Exercício de SMA-304 Álgebra Linear

Exercício 1. Em $\mathbb{R}^2$, mantenhamos a definição do produto αv de um número por um vetor mas modifiquemos, de 3 maneiras diferentes, a definição da soma $u+v$ dos vetores $u=(x,y)$ e $v=(x',y')$. Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam valendo e quais são violados:

(1) $u+v=(x+y',x'+y)$;

(2) $u+v=(xx',yy')$;

(3) $u+v=(3x+3x',5x+5x')$.

Exercício 2. Consideremos uma mola (que supomos sem massa) suspensa verticalmente tendo sua extremidade superior presa num suporte rígido. Fixamos um corpo de massa m na outra extremidade da mola. Suponha que este corpo seja deslocado verticalmente a partir da sua posição de equilíbrio e, em seguida, liberado. O movimento y deste corpo, a partir da posição de equilíbrio, é dado por uma função da forma:

$$y(t)=\lambda_1\cos\omega t+\lambda_2\operatorname{sen}\omega t; \tag{1}$$

onde $\omega\in\mathbb{R}$ é uma constante que depende da mola e da massa do corpo. Mostre que para um $\omega\in\mathbb{R}$ fixo, o conjunto de todas as funções descritas em (1) é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 3. Seja $I=[0,1]$ e $C(I)$ o espaço das funções reais contínuas, definidas em I. Verificar se são sub-espaços vetoriais de $C(I)$:

(a) $\{f\in C(I)\mid f(0)=0\}$

(b) $\{f\in C(I)\mid \int_0^1 f(t)dt=0\}$

(c) $\{f\in C(I)\mid f(0)=f(1)\}$

(d) $\{f\in C(I)\mid f(t)=0$ em todos os pontos de I menos um número finito deles $\}$.

Exercício 4. Seja V um espaço vetorial. Se $(U_j)_{j\in J}$ é uma família de sub-espaços vetoriais de V, mostrar que $\cap_{j\in J}U_j$ também é um sub-espaço vetorial de V.

Exercício 5. Seja V um espaço vetorial. Dado um subconjunto $S\neq\emptyset$ de V, provar que a interseção de todos os sub-espaços vetoriais de V que contém S também é um sub-espaço vetorial de V, sendo o menor sub-espaço de V que contém S.

Exercício 6. Seja U, V e W os seguintes sub-espaços do $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}U&=\{(x,y,z)\mid x=z\},\\ V&=\{(x,y,z)\mid x=y=0\}\text{ e}\\ W&=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0\}.\end{aligned}$$

Verifique que $U+V=\mathbb{R}^3$, $U+W=\mathbb{R}^3$ e $V+W=\mathbb{R}^3$. Em algum dos casos a soma é direta?

Exercício 7. Sejam u e v dois vetores não nulos do $\mathbb{R}^2$. Se não existe nenhum $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$, mostrar que $\mathbb{R}^2$ é soma direta dos sub-espaços $[u]$ e $[v]$.

Exercício 8. Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $(-1, 0, 1)$ e $(3, 4, -2)$. Determinar um sistema de equações homogêneas para o qual o espaço solução seja exatamente o sub-espaço gerado por esses vetores.

Exercício 9. Mostrar que os dois conjuntos abaixo formados de funções contínuas reais definidas em $\mathbb{R}$ geram o mesmo sub-espaço vetorial de $C(\mathbb{R})$:

$$\{\operatorname{sen}^2 t,\ \cos^2 t,\ \operatorname{sen} t . \cos t\} \text{ e } \{1, \operatorname{sen} 2t,\ \cos 2t\}.$$

Exercício 10. Prove que a reunião de dois sub-espaços vetoriais de E é um sub-espaço vetorial se, e somente se, um deles estiver contido no outro.

Exercício 11. Mostrar com um exemplo que a união de dois sub-espaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial não precisa ser um sub-espaço vetorial desse espaço.

Exercício 12. Uma matriz quadrada $a = [a_{ij}]$ chama-se *simétrica* (respect. *anti-simétrica*) quando $a_{ij} = a_{ji}$ (respect. $a_{ij} = -a_{ji}$) para todo i e todo j. Prove que o conjunto $\mathcal{S}$ das matrizes simétricas e o conjunto $\mathcal{A}$ das matrizes anti-simétricas $n \times n$ são sub-espaços vetoriais de $\mathcal{M}(n \times n)$ e que se tem $\mathcal{M}(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Exercício 13. Sejam E, F espaços vetoriais. Uma função $f : E \to F$ chama-se *par* (respect. *ímpar*) quando $f(-v) = f(v)$ (respect. $f(-v) = -f(v)$) para todo $v \in E$. Prove que o conjunto A das funções pares e o conjunto B das funções ímpares são sub-espaços vetoriais de $\mathcal{F}(E; F)$ (espaço das funções definidas de E para F), e vale que $\mathcal{F}(E; F) = A \oplus B$.

Exercício 14. Quais os subconjuntos abaixo do $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes:

(a) $\{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1),\ (2, 3, 5)\}$

(b) $\{(1, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 0, -2)\}$

(c) $\{(0, 0, 0),\ (1, 2, 3),\ (4, 1, -2)\}$

(d) $\{(1, 1, 1),\ (1, 2, 1),\ (3, 2, -1)\}$

Exercício 15. Demonstrar que o conjunto $\{1,\ e^x,\ e^{2x}\}$ de vetores de $C([0, 1])$ é L.I.

Exercício 16. Determinar m e n para que os conjuntos de vetores do $\mathbb{R}^3$ dados abaixo sejam L.I.

(a) $\{(3, 5m, 1),\ (2, 0, 4),\ (1, m, 3)\}$

(b) $\{(1, 3, 5),\ (2, m + 1, 10)\}$

(c) $\{(6, 2, n),\ (3, m + n, m - 1)\}$

Exercício 17. Se $\{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n\}$ é L.I., mostrar que

$$\{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j + \alpha u_i, \ldots, u_n\}$$

também é L.I. para todo escalar α.

Exercício 18. Seja $E = F_1 \oplus F_2$. Se $\mathcal{B}_1$ é base de F_1 e $\mathcal{B}_2$ é base de F_2, prove que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de E.

Exercício 19. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Dado um sub-espaço $F \subset E$, prove que se pode obter um sub-espaço $G \subset E$ tal que $E = F \oplus G$.