6.^{a} Lista de Exercício de SMA-304 Álgebra Linear

Exercício 1. Verifique em cada um dos itens abaixo se a função $<,>$ é um produto interno no espaço vetorial V.

1. $V = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, y_1)$, $w = (x_2, y_2)$ e $< u, w >= 2x_1x_2 + 4y_1y_2$.
2. $V = P_3(R)$, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$, $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3$ e $< p, q >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
3. $V = M_2(R)$, $A, B \in M_2(R)$ e $< A, B >= tr(A^tB)$, onde $tr(A)$ é o traço de A.
4. $V = \mathbb{R}^3$, $u = (x_1, y_1, z_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2)$ e $< u, w >= x_1x_2 + y_1y_2$.
5. $V = \mathbb{R}^4$, $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ e $< u, w >= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$.

Exercício 2. No espaço $V = P_3(\mathbb{R})$ consideremos o produto interno $< f(t), g(t) >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Calcular $< f(t), g(t) >$, $\|f(t)\|$, $\|g(t)\|$ e $\|f(t) + g(t)\|$ quando $f(t) = t^3 - t - 1$, e $g(t) = t^2 + 1$. Repita o exercício com $f(t) = 2$ e $g(t) = t^3 + t + 1$.

Exercício 3. Seja u e v vetores de um espaço euclidiano. Determinar o co-seno do ângulo entre u e v, dado $\|u\| = 5$, $\|v\| = 8$ e $\|u + v\| = \sqrt{129}$.

Exercício 4. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ (produto interno usual) para mostrar que, dados os números reais estritamente positivos a_1, a_2, a_3, vale a desigualdade:

$$(a_1 + a_2 + a_3).\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

Exercício 5. Mostrar que a soma de dois produtos internos sobre um espaço V também é um produto interno sobre V (antes, pense bem no significado da palavra "soma").

Exercício 6. Seja $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$. Ache uma base ortonormal β' de $\mathbb{R}^3$, em relação ao produto interno usual.

Exercício 7. Determinar uma base ortonormal do sub-espaço W do $\mathbb{R}^3$ dado por $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y = 0\}$.

Exercício 8. Provar que os vetores 1, t e $t^2 - 1/3$ de $P_2(\mathbb{R})$ são dois a dois ortogonais em relação ao produto interno dado por:

$$< f(t), g(t) >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Exercício 9. Seja $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ uma base ortonormal. Prove que, para $v, w \in E$ arbitrários, tem-se

$$< v, w >= \sum_{i=1}^{n} < v, u_i >< w, u_i > .$$

Exercício 10. Seja $\|\|$ a norma definida por um produto interno num espaço vetorial real V.

a) Prove o Teorema de Pitágoras: u e v são ortogonais $\leftrightarrow \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2$.

b) Quais as condições sobre os vetores u e v para que $| < u, v > | = \|u\|\|v\|$?

c) Demonstre a segunda desigualdade triangular, $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.

Exercício 11. Em cada um dos itens abaixo determinar $d(u, v)$.

1. $V = \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, $u = (1, 1, 1, 1), v = (0, 0, 1, 1)$.
2. $V = P_2(\mathbb{R})$, com produto interno $< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)dt$, $u = 1 + t, v = \frac{3}{4}t + 3t^2$, $t \in \mathbb{R}$.
3. $V = M_3(\mathbb{R})$, com produto interno $< A, B >= tr(A^t B)$,

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 12. Mostrar que a matriz mudança de base entre duas bases ortonormais de um espaço euclidiano de dimensão finita é uma matriz ortogonal. Onde uma matriz A é ortogonal se $A^t = A^{-1}$