

Exercício 1.1

Em cada um dos itens abaixo responda se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). No caso de ser verdadeira esboce as idéias de uma demonstração e se for falsa dê um contra-exemplo:

- () Cada ponto da reta real \mathbb{R} pode ser representado por uma decimal periódica.
- () $\pi = \frac{22}{7}$.
- () Se $z \in \mathbb{N}$ e $x < y$ então $xz < yz$.
- () Se $z \in \mathbb{R}$ e $x \leq y$ então $xz \leq yz$.
- () Se $x > y$ então $|x - y| = x - y$.
- () Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ temos $|x + y| = |x| + |y|$.
- () Se a e b são irracionais então $a + b$ também será.
- () Se a e b são irracionais então $a.b$ também será.
- () Se a e b são racionais então $a + b$ também será.
- () Se a e b são racionais então $a.b$ também será.
- () Se a é racional e b é irracional então $a.b$ é racional .
- () O gráfico da função $y = x^2 + 1$ é simétrico em relação ao eixo dos x 's.
- () O maior diâmetro da elipse $2x^2 + y^2 = 2$ ocorre na horizontal.
- () O vértice da parábola $y = 2 - x^2$ é ponto $(0, 2)$.
- () O domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ é o intervalo $[0, 2)$.
- () A imagem da função $f(x) = 4 - x^2$ é o intervalo $(-\infty, 4]$.
- () Se $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ então $f(2) = 4$.
- () O gráfico da equação $y^2 = x$ é gráfico de uma função de x .
- () A subconjunto do plano $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ é gráfico de uma função de x .
- () A função $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ é uma função racional.
- () A imagem da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$ é toda a reta \mathbb{R} .
- () A equação $\text{sen}(2x) = 2$ é satisfeita infinitos valores de x .
- () $(\text{sen}(x) + \text{cos}(x))^2 - 1 = \text{sen}(2x)$ para todo x .

Exercício 1.2

Encontre o conjunto solução das seguintes desigualdades:

- | | | |
|--------------------------------------|--|--------------------------|
| 1) $ 1 - 3x < 5$ | 2) $ x^2 + 3 > 3$ | 3) $x^2 < 9$ |
| 4) $x^2 > -1$ | 5) $x^2 < 6x - 5$ | 6) $x^3 > 27$ |
| 7) $\frac{x-6}{x+2} \geq 0$ | 8) $\frac{(x+2)(x-3)}{x(x^2+1)} < 0$ | 9) $\frac{8}{x} < x - 2$ |
| 10) $\frac{3}{x-2} < \frac{1}{2x+1}$ | 11) $\frac{x^2}{x-2} - 1 \geq \frac{x^2+3}{x^2-4}$ | 12) $x^2 + 2x + 2 > 0$ |

Exercício 1.3

Um canhão é colocado na origem de um sistema de coordenadas. Suponha que as coordenadas de um projétil atirado pelo canhão tem coordenadas $x = 50t$ metros e $y = 50t - t^2$ metros depois de t segundos do lançamento. Mostre que a trajetória do projétil é uma parábola. A que distância do canhão o projétil vai atingir o chão? Qual a altura máxima que o projétil vai atingir?

Exercício 1.4

(***) Se a e b são números reais com $a < b$ mostre que existe um número racional c tal que $a < c < b$. Portanto para cada intervalo (a, b) existem infinitos racionais distintos neste intervalo.

Exercício 1.5

Uma função f é linear se $f(u + v) = f(u) + f(v)$ e $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ para todo u, v e α . Quais das seguintes funções é linear?

1. $f(x) = 2x$,
2. $f(x) = 2x + 3$,
3. $f(x) = |x|$,
4. $f(x) = x^2$.

Mostre que se f é linear então $f(0) = 0$.

Exercício 1.6

Um ponto fixo de uma função f é um número a tal que $f(a) = a$. Encontre os pontos fixos, se existirem, das seguintes funções

1. $f(x) = 2x - 5$,
2. $f(x) = x^2$,
3. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Exercício 1.7

Usando a função tg determine uma função bijetora do intervalo $(-1, 1)$ sobre a reta real.