

**Exercício 1.1**

Em cada um dos itens abaixo responda se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). No caso de ser verdadeira esboce as idéias de uma demonstração e se for falsa dê um contra-exemplo:

- ( ) Cada ponto da reta real  $\mathbb{R}$  pode ser representado por uma decimal periódica.
- ( )  $\pi = \frac{22}{7}$ .
- ( ) Se  $z \in \mathbb{N}$  e  $x < y$  então  $xz < yz$ .
- ( ) Se  $z \in \mathbb{R}$  e  $x \leq y$  então  $xz \leq yz$ .
- ( ) Se  $x > y$  então  $|x - y| = x - y$ .
- ( ) Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  temos  $|x + y| = |x| + |y|$ .
- ( ) Se  $a$  e  $b$  são irracionais então  $a + b$  também será.
- ( ) Se  $a$  e  $b$  são irracionais então  $a.b$  também será.
- ( ) Se  $a$  e  $b$  são racionais então  $a + b$  também será.
- ( ) Se  $a$  e  $b$  são racionais então  $a.b$  também será.
- ( ) Se  $a$  é racional e  $b$  é irracional então  $a.b$  é racional .
- ( ) O gráfico da função  $y = x^2 + 1$  é simétrico em relação ao eixo dos  $x$ 's.
- ( ) O maior diâmetro da elipse  $2x^2 + y^2 = 2$  ocorre na horizontal.
- ( ) O vértice da parábola  $y = 2 - x^2$  é ponto  $(0, 2)$ .
- ( ) O domínio da função  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$  é o intervalo  $[0, 2)$ .
- ( ) A imagem da função  $f(x) = 4 - x^2$  é o intervalo  $(-\infty, 4]$ .
- ( ) Se  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$  então  $f(2) = 4$ .
- ( ) O gráfico da equação  $y^2 = x$  é gráfico de uma função de  $x$ .
- ( ) A subconjunto do plano  $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$  é gráfico de uma função de  $x$ .
- ( ) A função  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$  é uma função racional.
- ( ) A imagem da função  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$  é toda a reta  $\mathbb{R}$ .
- ( ) A equação  $\text{sen}(2x) = 2$  é satisfeita infinitos valores de  $x$ .
- ( )  $(\text{sen}(x) + \text{cos}(x))^2 - 1 = \text{sen}(2x)$  para todo  $x$ .

**Exercício 1.2**

Encontre o conjunto solução das seguintes desigualdades:

- |                                      |  |                          |
|--------------------------------------|--|--------------------------|
| 1) $ 1 - 3x  < 5$                    | 2) $ x^2 + 3  > 3$                                 | 3) $x^2 < 9$             |
| 4) $x^2 > -1$                        | 5) $x^2 < 6x - 5$                                  | 6) $x^3 > 27$            |
| 7) $\frac{x-6}{x+2} \geq 0$          | 8) $\frac{(x+2)(x-3)}{x(x^2+1)} < 0$               | 9) $\frac{8}{x} < x - 2$ |
| 10) $\frac{3}{x-2} < \frac{1}{2x+1}$ | 11) $\frac{x^2}{x-2} - 1 \geq \frac{x^2+3}{x^2-4}$ | 12) $x^2 + 2x + 2 > 0$   |

**Exercício 1.3**

Um canhão é colocado na origem de um sistema de coordenadas. Suponha que as coordenadas de um projétil atirado pelo canhão tem coordenadas  $x = 50t$  metros e  $y = 50t - t^2$  metros depois de  $t$  segundos do lançamento. Mostre que a trajetória do projétil é uma parábola. A que distância do canhão o projétil vai atingir o chão? Qual a altura máxima que o projétil vai atingir?

**Exercício 1.4**

(\*\*\*) Se  $a$  e  $b$  são números reais com  $a < b$  mostre que existe um número racional  $c$  tal que  $a < c < b$ . Portanto para cada intervalo  $(a, b)$  existem infinitos racionais distintos neste intervalo.

**Exercício 1.5**

Uma função  $f$  é linear se  $f(u + v) = f(u) + f(v)$  e  $f(\alpha u) = \alpha f(u)$  para todo  $u, v$  e  $\alpha$ . Quais das seguintes funções é linear?

1.  $f(x) = 2x$ ,
2.  $f(x) = 2x + 3$ ,
3.  $f(x) = |x|$ ,
4.  $f(x) = x^2$ .

Mostre que se  $f$  é linear então  $f(0) = 0$ .

**Exercício 1.6**

Um ponto fixo de uma função  $f$  é um número  $a$  tal que  $f(a) = a$ . Encontre os pontos fixos, se existirem, das seguintes funções

1.  $f(x) = 2x - 5$ ,
2.  $f(x) = x^2$ ,
3.  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ .

**Exercício 1.7**

Usando a função tg determine uma função bijetora do intervalo  $(-1, 1)$  sobre a reta real.