3ª Lista de Exercícios de Cálculo I

Professor: Maria Aparecida Soares Ruas — *20 de Março de 2006*

Exercício 3.1
Calcule, se existir, os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+4}$ *b)* $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ *c)* $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\text{sen}(\pi x)}$

d) $\lim_{x\to \pi} \frac{1-\text{sen}(x/2)}{\pi - x}$ *e)* $\lim_{x\to 0} \frac{x-\text{sen}(x)}{x+\text{sen}(x)}$ *f)* $\lim_{x\to 0^+} (x+\frac{x}{|x|})$

g) $\lim_{x\to 0} x\text{cossec}(x)$ *h)* $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(x)}{2x}$ *i)* $\lim_{x\to n^+} x-[x]$

j) $\lim_{x\to n^-} x-[x]$ *k)* $\lim_{x\to 0} x^2\cos(\frac{1}{x})$ *l)* $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen}(x)-\cos(x)}{1-\text{tg}(x)}$

m) $\lim_{x\to 0} \frac{x^5+2x^3}{\text{tg}(x)-\text{sen}(x)}$ *n)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\text{sen}(x)}-\sqrt{1-\text{sen}(x)}}{x}$ *o)* $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{3x-8}-2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

p) $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ *q)* $\lim_{x\to 1} a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ *r)* $\lim_{y\to x} \text{sen}(xy)+\cos(y^2-x)$

Exercício 3.2
Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$ *b)* $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x^3+10)^{1/3}}$ *c)* $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$ *e)* $\lim_{x\to 2} \frac{4}{x^2-4}$ *f)* $\lim_{x\to\infty} (3x^4-7x^3+5)$

g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x-1}$ *h)* $\lim_{x\to -\infty} (-2x^3+x^2+3x)$ *i)* $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$

j) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$ *k)* $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x}$ *l)* $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$

m) $\lim_{x\to 0} \frac{x\ \cos\ x - \text{sen}\ x}{x^3}$ *n)* $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{\text{tg}\, 5x}$ *o)* $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tgh} x}{x}$

p) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{1-\text{sen}\ x}{\cos\ x}$ *q)* $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\text{sen}\ x}{x+\text{sen}\ x}$ *r)* $\lim_{x\to 0} \frac{1-x}{1-\text{sen}(\frac{\pi}{2}x)}$

Exercício 3.3
Considere $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x^3+6x^2}}{x} & \text{, se } x\neq 0 \\ 6 & \text{, se } x=0 \end{cases}$.
a) Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.
b) Verifique se $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Exercício 3.4
Considere $f(x)=(-1)^n$ para $\frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}$ com $n\in N$.
a) Esboce o gráfico de f.
b) Existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)$?

Exercício 3.5
Em cada item abaixo, determine o maior conjunto onde a função f em questão é contnua.

a) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x^2-x-3}$ *b)* $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ *c)* $f(x) = \sqrt{2x-3} + x^2$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ *e)* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ *f)* $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-6}}$

Exercício 3.6
Se $\begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & \text{, se } x \neq 3 \\ 1 & \text{, se } x = 3 \end{cases}$ então f é contnua em $x = 3$? Explique sua resposta.

Exercício 3.7
Analise a continuidade das funções abaixo nos seus domnios.

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}} & \text{, se } x \neq \pm 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{, se } x = 1 \\ 0 & \text{, se } x = -1 \end{cases}$ *c)* $f(x) = \dfrac{x-[x]}{2x}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{2-|x|} & \text{, se } x \neq 2 \\ 1 & \text{, se } x = 2 \end{cases}$ *d)* $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2x)}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 2 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$

Exercício 3.8
Determine as constantes A, B de modo que a função $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{, se } x \leq 2 \\ Ax + B & \text{, se } 2 < x < 5 \\ -6x & \text{, se } x \geq 5 \end{cases}$ seja contnua em R.

Exercício 3.9
Encontre exemplos de funções tais que:
a) $f + g$ é contnua em x_0 mas f e g não são.
b) fog é contnua em x_0 mas g é descontnua em x_0 e f é descontnua em $g(x_0)$.
c) f é contnua em $g(x_0)$, g não é contnua em x_0 mas fog é contnua em x_0.

Exercício 3.10
Sejam f, $g : R \to R$ funções contnuas em R tais que $f(3) = g(3)$. Pergunta-se: a função $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, se } x \leq \\ g(x) & \text{, se } x > \end{cases}$ é contnua em R? Justifique sua resposta.

Exercício 3.11
Calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{x}{\text{sen}(x) - 2x}\right)$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 3x)}{x}\right)$

Exercício 3.12
a) Suponha que $|f(x) - f(1)| \leq (x-1)^2$ para todo $x \in R$. Mostre que f é contnua no ponto $x_0 = 1$.
b) Considere f, $g : R \to R$ funções que satisfazem $|f(x) - f(x_0)| \leq k|g(x) - g(x_0)|$, para todo $x \in R$, onde $k > 0$ está fixo. Assumindo que g é contnua em x_0, mostre que f também será contnua em x_0.

Exercício 3.13
a) Dê um exemplo de uma função definida em R que seja contnua em todos os pontos de R, exceto nos ponto -1, 0, 1.
b) Dê um exemplo de uma função definida em R que seja contnua em todos os pontos de R, exceto nos inteiros.
c) Dê um exemplo de uma função definida em R que não seja contnua em $x = 2$ mas que
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x).$$

Exercício 3.14
a) Mostre que existe um número real x_0 tal que $x_0^5 - 4x_0 + 1 = 7,21$.
b) Considere $f,\, g : [a, b] \to R$ funções contnuas tais que $f(a) < g(a)$ e $g(b) < f(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Exercício 3.15
Considere $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ e $h(y) = \begin{cases} 1) & \text{, se } y \geq 6 \\ g(x) & \text{, se } x < 6 \end{cases}$.
Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou não.

a) $\lim\limits_{x \to 2} h(f(x)) = h(\lim\limits_{x \to 2} f(x))$ *b)* $\lim\limits_{y \to 2} f(h(y)) = f(\lim\limits_{y \to 2} h(y))$

Exercício 3.16
a) Se $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$, mostre que existe $x_0 \in R$ tal que $f(x_0) = 100$.
b) Mostre que a equação $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tem, pelo menos, uma raiz no intervalo $[0, 1]$.

Exercício 3.17
Dada a função $f : [-2, 7] \to R$, definida por $f(x) = \begin{cases} 4 - \frac{x^2}{2} & \text{, se } -2 \leq x < 4 \\ 2 & \text{, se } 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$, pergunta-se: f tem máximo e mnimo no intervalo $[-2, 7]$? Justifique sua resposta. No caso da resposta a questão acima ser negativa, pergunta-se: isto contradiz o Teorema do Valor Extremo? Justifique sua resposta.

Exercício 3.18
Um corredor parte do repouso e corre numa pista circular em uma único sentido. Ele para quando chega ao ponto de partida. Mostre que, pelo menos, uma vez durante esta volta, ele deve ter desenvolvido a mesma velocidade em pontos diametralmente opostos.

Exercício 3.19
Um alpinista começa a escalar uma montanha às 8:00 horas do sábado e chega ao topo às 16:00 horas do mesmo dia. Acampa no topo e desce às 8:00 horas do domingo, chegando no ponto original de sada às 16:00 horas. Mostre que em algum horário no domingo ele estava à mesma altura em que esteve no mesmo horário no sábado.