6ª Lista de Exercícios de Cálculo I

Professor: Maria Aparecida Soares Ruas *3 de maio de 2006*

Exercício 6.1
Deseja-se construir um oleoduto ligando dois pontos A e B distantes $4km$ um do outro e situados nas margens opostas de um rio que tem $1km$ largura. Do ponto A até um ponto C na margem oposta, a construção será feita sob a água e de C até B, a construção será feita à superfície. Sabendo-se que o custo da construção sob a água é 4 vezes o custo à superfície, qual é a localização do ponto C para que o custo total da obra seja o menor possível?

Exercício 6.2
Inscreva numa esfera dada:
a) um cilindro de área lateral máxima.
b) um cone de volume máximo.
c) um cone de área lateral máxima.

Exercício 6.3
Um fazendeiro quer construir um galinheiro retangular de modo que um dos lados seja uma parte de um muro. Sabendo-se que o fazendeiro possui l metros de tela, dimensionar o galinheiro de modo que este possua espaço máximo.

Exercício 6.4
Um vitral tem o formato de um retângulo encimado por um semi-círculo. O vidro utilizado na parte semi-circular é menos translúcido, de sorte que a quantidade de luz que passa por unidade de área é $2/3$ do permitido pelo vidro da parte retangular. Sendo o perímetro do vitral fixado em $6m$, calcule as medidas do vitral que permita maior passagem de luz.

Exercício 6.5
Encontrar um ponto do gráfico de $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$, de modo que a reta tangente ao gráfico de f, nesse ponto, tenha coeficiente angular máximo.

Exercício 6.6
Deve-se construir uma caixa, sem tampa, de base retangular a partir de um pedaço de cartolina de $32cm$ por $42cm$, retirando-se 4 quadrados, de mesmas dimensões, de cada um dos vértices e dobrando-se os lados. Determine as dimensões dos quadrados extraídos, que produz a caixa de volume máximo.

Exercício 6.7
a) Mostre que para todo $a, b > 0$ temos que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. Sugestão: use o fato que se $f'(x) = 0$, x num intervalo então f é constante nesse intervalo.
b) Pode existir uma função diferenciável, não constante, tal que $f'(x) = 0$ para todo x no seu domínio?
c) Mostre que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in R$ são constantes fixadas, não tem máximo ou mínimo se, e somente se, $a^2 \leq 3b$.
d) Determine as constantes $a, b \in R$ de tal modo que a função do item c) acima tenha como pontos críticos $x = -2$ e $x = 3$. Neste caso, em qual deles f terá um máximo?
e) Determine condições sobre a, b, c, de modo que a equação $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tenha tres raízes reais distintas.

Exercício 6.8
Entre todos os triângulos que têm uma mesma base e a mesma área, encontre o que tem peímetro máximo.

Exercício 6.9
Lei da Reflexão: Considere dois pontos A, B fixados fora de uma reta r. Encontre o ponto da reta r, cuja soma das distâncias aos pontos A e B seja mínima.

Exercício 6.10
Lei da Refração: Considere dois pontos A, B situados em lados opostos em relação ao eixo-x. Supondo que a velocidade de um ponto, partindo de A e do mesmo lado de A é v_1 e ao passar para o lado de B a velocidade passa a ser v_2. Que trajetória deve percorrer esse ponto, de modo que o tempo para ir de A até B, se ja mínimo?

Exercício 6.11
Determine os pontos da curva $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ mais próximos da origem.

Exercício 6.12
Determine a área máxima de um retângulo, com base no eixo-x e vértices superiores sobre a curva $y = 12 - x^2$.

Exercício 6.13
Sabe-se que uma raiz de um polinômio, P, é dupla se ela for raiz do polinômio e da sua derivada primeira, mas não for raiz da derivada segunda. Dada a equação $x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda = 0$, determine $\lambda \in R$ de tal modo que:
a) a equação acima tenha uma raiz dupla.
b) a equação tenha três raízes reais distintas.

Exercício 6.14
Mostre que a função $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ tem, exatamente, três pontos críticos, um deles no intervalo $(1, 2)$ outro em $(2, 3)$ e o terceiro no intervalo $(3, 4)$.

Exercício 6.15
Sejam $f, g : R \to R$ funções diferenciáveis em R tais que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$, $x \in R$.
a) Mostre que $(f(x) - \text{sen}(x))^2 + (g(x) - \cos(x))^2 = 0$, $x \in R$.
b) Conclua que $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$, $x \in R$.

Exercício 6.16

a)Mostre que os zeros das funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são seus únicos pontos de inflexão.
b) Prove que o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ não tem ponto de inflexão.
c) Dê uma condição sobre os coeficientes a, b e c, para que o gráfico de f, do item b) tenha:
    i) concavidade para cima.
    ii) concavidade para baixo.
d) Mostre que a cúbica $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem um único ponto de inflexão.
e) Dê condições sobre a, b, c e d para que o gráfico de $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$:
    i) não tenha ponto de inflexão.
    ii) tenha um único ponto de inflexão.
    iii) tenha, extamente, dois pontos de inflexão.

Exercício 6.17

Para cada uma das funções, f, abaixo, determine os pontos de máximo e de mínimos locais, os pontos de inflexão e os intervalos onde ela é crescente ou decrescente:

$a)\ f(x) = x^2(x-12)^2$ $\quad b)\ f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ $\quad c)\ f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$

$d)\ f(x) = \dfrac{x}{(x^2-4)^{1/3}}$ $\quad e)\ f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad f)\ f(x) = \operatorname{senh}(2x)$

$g)\ f(x) = \cosh(3x)$ $\quad h)\ f(x) = \ln(x^2+2)$ $\quad i)\ f(x) = e^{2x} - e^{4x}$

$j)\ f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 6x$ $\quad k)\ f(x) = 4 + 3x - x^3$ $\quad l)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$

$m)\ f(x) = (x+1)^4$ $\quad n)\ f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ $\quad o)\ f(x) = x^2(x-12)^2$

$p)\ f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad q)\ f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\quad r)\ f(x) = e^{-x^2}$

Exercício 6.18

Utilizando as técnicas do Cálculo Diferencial, faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

$a)\ f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ $\quad b)\ f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ $\quad c)\ f(x) = xe^x$

$d)\ f(x) = \dfrac{4x}{x^2-9}$ $\quad e)\ f(x) = \operatorname{senh}(x)$ $\quad f)\ f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$

$g)\ f(x) = e^{-x}\operatorname{sen}(x)$ $\quad h)\ f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ $\quad i)\ f(x) = \cosh(x)$

$j)\ f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{2x-1}$ $\quad k)\ f(x) = x^6 - 5x^4 + 4x^4$ $\quad l)\ f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$