USP/ICMC/SMA - Lista de Exercícios de Geometria Diferencial

Maria Aparecida Soares Ruas **March 1, 2009**

Ex. 1.1. Mostre que as retas tangentes à curva parametrizada regular $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ fazem um ângulo constante com a reta $y = 0$, $z = x$

Ex. 1.2. Um disco circular de raio 1 no plano xy gira sem escorregar ao longo do eixo Ox. A figura descrita por um ponto da circunferência do disco é chamada uma *ciclóide*.

a) Obtenha uma curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cujo traço seja uma ciclóide e determine seus pontos singulares.

b) Calcule o comprimento de arco da ciclóide correspondente a uma rotação completa do disco.

Ex. 1.3. Seja $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (sent, cost + logtg\frac{t}{2}),$$

onde t é o ângulo que o vetor $\alpha'(t)$ faz com o eixo Oy. O traço de α é chamado de *tractriz*.

Mostre que:

a) α é uma curva diferenciável, parametrizada, regular exceto em $t = \frac{\pi}{2}$.

b) O comprimento do segmento da tangente da tractriz entre o ponto de tangência e o eixo Oy é constante e igual 1.

Ex. 1.4. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável e seja $[a, b] \subset I$ um intervalo fechado. Para toda partição

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

de $[a, b]$, considere a soma $\sum_{1,n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = l(\alpha, P)$, onde P designa a partição dada. A norma $|P|$ da partição é definida por

$$|P| = \max(t_i - t_{i-1}),\ i = 1, \ldots, n.$$

Geometricamente, $l(\alpha, P)$ é o comprimento de um polígono inscrito em $\alpha([a, b])$ com vértices em $\alpha(t_i)$. O objetivo deste exercício é mostrar que o comprimento de arco de $\alpha([a, b])$ é, em certo sentido, um limite de comprimentos de polígonos inscritos.

Prove que dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $|P| < \delta$ então

$$|\int_{a,b} |\alpha'(t)|dt - l(\alpha, P)| < \epsilon.$$