USP/ICMC/SMA - Lista de Exercícios de Geometria Diferencial

Maria Aparecida Soares Ruas **April 21, 2009**

Ex. 1.1. Sejam $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ curvas regulares que têm contato de ordem n em $t_0 \in I \cap J$. Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um difeomorfismo, prove que $F \circ \alpha$ e $F \circ \beta$ têm ordem de contato n em t_0.

Ex. 1.2. Se $\alpha(s)$ é uma hélice circular, prove que a curva $c(s)$, determinada pelos centros de curvatura de α, também é uma hélice circular. Determine uma hélice circular α de tal modo que os traços de α e c estejam contidos no mesmo cilindro.

Ex. 1.3. Determine as condições para que uma curva $\alpha(s)$ deve satisfazer para que o centro da esfera osculatriz seja o mesmo para todo s.

Ex. 1.4. Seja $\alpha(s),\ s \in I$, uma curva regular cuja curvatura $k(s)$ e torção $\tau(s)$ não se anulam. Seja $c(s)$ a curva descrita pelos centros de curvatura de α. Prove que a curvatura de c é dada por

$$[(\frac{\rho^2}{R^3\tau}\frac{d}{ds}(\frac{\rho'}{\tau\rho}) - \frac{1}{R})^2 + (\frac{\rho'}{\rho\tau^2R^2})^2]^{\frac{1}{2}},$$

onde ρ é o raio de curvatura de α e R o raio de curvatura esférica de α.

Ex. 1.5. Obtenha a ordem de contato da curva $\alpha(s) = (s, r, 0)$ e a esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ onde r é uma constante positiva.

Ex. 1.6. (I) Curva Pedal: Mostre que o pé da perpendicular da origem até a reta tangente à curva plana γ em $\gamma(t)$ é dado por $(<\gamma(t), n(t)>)n(t)$. Quando t varia, este ponto se move numa curva chamada *curva pedal* de γ com relação à origem, que pode ser parametrizada por $\delta(t) = (<\gamma(t), n(t)>)n(t)$.

Suponha que γ está parametrizada pelo comprimento de arco e determine δ'. Determine os pontos singulares de δ. Determine uma parametrização da curva pedal com relação a um ponto $P = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

(II) Paralelas: Seja γ uma curva p.p.c.a e seja d um número real fixado. A curva δ definida por $\delta(t) = \gamma(t) + dn(t)$ é chamada *paralela* à γ à distância d. Mostre que δ é uma curva regular exceto nos pontos t nos quais $k(t) \neq 0$ e $d = 1/k(t)$.