Gabarito Lista 8

1. a) $x(2\,\text{sen}x + x\cos x)$
b) $2x\cos(1+x^2) - 2x^3\,\text{sen}(1+x^2)$
c) $3(\cos x - \,\text{sen}x)(\,\text{sen}x + \cos x)^2$
d) $-9x^2\,\text{sen}(x^3)\cos^2(x^3)$
e) $\text{sen}x(-\cos(\cos x))$
f) $-\dfrac{2(2x^2+5x+2)}{(x^2-1)^2}$

2. Derivando toda a expressão e isolando $f'(x)$ temos

$$f'(x) = \frac{-f(x)}{x + \cos(f(x))}.$$

3. A derivada de $g(x)$ é da forma $g'(x) = 2e^{2x}f'(e^{2x})$. Assim, $g'(0) = 2f'(1) = 4$.

4. $f'(x) = g(x^2) + 2x^2 g'(x^2)$.

5. a) Por hipótese, f é diferenciável no intervalo I, isto é, para todo $p \in I$, o limite $\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ existe e é igual a $f'(p)$. Para mostrar que $f''(x)$ existe no intervalo I, precisamos mostrar que $\lim_{x\to p}\frac{f'(x)-f'(p)}{x-p}$ existe. De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p}\frac{f'(x)-f'(p)}{x-p} &= \lim_{x\to p}\frac{x+[f(x)]^3-(p+[f(p)]^3)}{x-p}\\
&= \lim_{x\to p}\frac{x-p}{x-p} + \frac{[f(x)]^3-[f(p)]^3}{x-p}\\
&= 1 + \lim_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p))(f(x)^2+f(p)f(x)+f(p)^2)}{x-p}\\
&= 1 + \lim_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p))}{x-p}[f(x)^2+f(p)f(x)+f(p)^2].
\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to p}[f(x)^2+f(p)f(x)+f(p)^2] = 3f(p)^2$ e, por hipótese, $\lim_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p))}{x-p}$ existe e é igual a $f'(p)$, segue que para todo $p \in I$

$$f''(p) = 1 + 3f(p)^2 f'(p).$$

b) $f''(1) = 1 + 3f(1)^2 f'(1) = 7$.
c) $y = 2x - 1$.

6. Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y &= \frac{d}{dt}(x(t)^2+1)^{-1}\\ &= -(x(t)^2+1)^{-2}\frac{d}{dt}(x(t)^2+1)\\ &= -(x(t)^2+1)^{-2}2x(t)\frac{d}{dt}(x(t))\\ &= -y^2 2x(t)\frac{d}{dt}(x(t)) = -2xy^2\frac{dx}{dt}.\end{aligned}$$

7. Derivando os dois lados da equação, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[3x^2+x\ \mathrm{sen}(f(x))] &= 0\\ 6x+\ \mathrm{sen}(f(x))+xf'(x)\cos(f(x)) &= 0\\ f'(x) &= -\frac{\mathrm{sen}(f(x))+6x}{x\cos(f(x))}\end{aligned}$$

8. Derivando a equação, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[xf(x)^3+2xf(x)^2+x] &= 0\\ f(x)^3+3xf(x)^2f'(x)+2f(x)^2+4xf(x)f'(x)+1 &= 0\\ f(1)^3+3f(1)^2f'(1)+2f(1)^2+4f(1)f'(1)+1 &= 0\\ f'(1) = -\frac{4}{7}.\end{aligned}$$

9.
a) $\frac{\pi}{2}$
b) $\frac{\pi}{6}$
c) $\frac{\pi}{3}$
d) $-\frac{\pi}{6}$

10.
a) $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$.
b) $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$.
c) $f^{-1}(x)=arcsinh(x)$.

11.
a) $\frac{1}{1+x^2}$
b) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
c) $\frac{x}{x^2+1}+arctan(x)$
d) $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$
e) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

12. Derivando a função $f(x)$, temos

$$f'(x) = e^x + 1.$$

Ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. Logo, $f(x)$ é crescente, portanto monótona, portanto injetiva. Como é injetiva, segue que $f(x)$ possui inversa para todo $x \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema da Função Inversa, temos ainda que

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}.$$

Assim, segue que

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)} + 1} \implies [f^{-1}(x)]'[e^{f^{-1}(x)} + 1] = 1.$$

Logo, a inversa será a função $f^{-1}(x) = g(x)$ tal que g resolve a seguinte equação diferencial

$$g'(x)[e^{g(x)} + 1] = 1.$$

Não existe uma solução explícita para essa equação em termos de funções elementares. Contudo, um resultado conhecido na literatura matemática diz que a solução da equação diferencial acima é dada por $g(x) = x - W(e^x)$ onde W é a *Função W de Lambert*.