Gabarito Lista 3

1. • $\lim_{x\to p} f(x) = 0 \implies \lim_{x\to p} |f(x)| = 0$

Pela definição de limite, se $\lim_{x\to p} f(x) = L$, então $\forall\epsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$ tal que

$$|x-p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Aplicando a definição com $L = 0$, obtemos que para qualquer $\epsilon > 0$, o mesmo δ da definição de limite acima faz com que $|x-p| < \delta$ implique

$$||f(x)|| = |f(x)| < \epsilon.$$

Logo, $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0$.

• $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0 \implies \lim_{x\to p} f(x) = 0$

Pela definição de limite, se $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0$, então $\forall\epsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$ tal que

$$|x-p| < \delta \implies ||f(x)| - 0| < \epsilon.$$

Note que, $||f(x)| - 0| = |f(x)| = |f(x) - 0|$, portanto, $\forall\epsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$ tal que

$$|x-p| < \delta \implies |f(x) - 0| < \epsilon.$$

2. Pela definição de limite, se $\lim_{x\to p} f(x) = L$, então $\forall\epsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$ tal que

$$|x-p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Abrindo a última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &< \epsilon \\ -\epsilon < f(x) - L &< \epsilon \\ L - \epsilon < f(x) &< L + \epsilon. \end{aligned}$$

Sabemos que $L > 0$. Assim, aplicando a definição de limite para epsilon pequeno o suficiente, (por exemplo, $\epsilon < \frac{L}{2}$) obtemos que existe $\delta > 0$ tal que $|x-p| < \delta$ implica

$$0 < L - \epsilon < f(x).$$

3.
a) $-\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
c) $3x^2$
d) 0
e) np^{n-1} (dica: $x^n - p^n = (x-p)(x^{n-1} + x^{n-2}p + \cdots + p^{n-1})$)
f) $\dfrac{1}{n}p^{\frac{1-n}{n}}$ (dica: a expressão acima com $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ e $p \mapsto \sqrt[n]{p}$)
g) $2x - 3$
h) $-\frac{1}{p^2}$

4. Trabalhando essas duas desigualdades, obtemos

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \iff -\delta < x - 1 < \delta \iff |x-1| < \delta,$$

$$2 - \frac{1}{3} < x^2 + x < 2 + \frac{1}{3} \iff -\frac{1}{3} < x^2 + x - 2 < \frac{1}{3} \iff |x^2 + x - 2| < \frac{1}{3}.$$

Ou seja, o exercício equivale a mostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-1| < \delta \implies |x^2+x-2| < \frac{1}{3}.$$

Podemos fazer isso pela definição de limite. Para isso, perceba que

$$\lim_{x \to 1} x^2 + x - 2 = 0.$$

Assim, a definição de limite com $L = 0$, $p = 1$ e $f(x) = x^2 + x - 2$ nos diz que $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$|x-1| < \delta \implies \left|x^2+x-2\right| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = \frac{1}{3}$ obtemos que $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$|x-1| < \delta \implies \left|x^2+x-2\right| < \frac{1}{3}.$$

5. Pela definição de limite, se $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}$, então $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$|x-p| < \delta \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \epsilon.$$

Como é válido para qualquer ϵ pequeno, em particular é válido para $\epsilon = 1$. Assim a definição nos dá que para $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-p| < \delta \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < 1.$$

Multiplicando os dois lados da segunda desigualdade por $|g(x)|$, temos

$$|f(x)| < |g(x)|.$$

6. Suponha que $L < 0$. Pela definição de limite, $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$|x-p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Em particular, escolhendo $\epsilon = -\frac{L}{2} > 0$ a definição nos dá a existência de um $\delta > 0$ tal que $|x-p| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &< -\frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} < f(x) - L &< -\frac{L}{2} \\ \frac{3L}{2} < f(x) &< \frac{L}{2} < 0, \end{aligned}$$

contradizendo que $f(x) \geq 0$ numa vizinhança de p. Logo, $L \geq 0$.

7. O limite é 2.

8. Falsa. A questão seguinte nos dá um contraexemplo.

9. Defina

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = 1 \\ \cos(x) & x \neq 1 \end{cases}$$

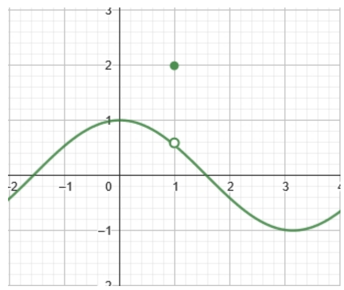

FIGURA 1. Gráfico de $f(x)$, questão 9.

10. a) $\sqrt[3]{3}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{12}$
d) $\frac{1}{8}$