## Gabarito Lista 4

**1.** O Teorema do Confronto nos diz que se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ e

$$\lim_{x\to p} g(x) = L = \lim_{x\to p} h(x),$$

então $\lim_{x\to p} f(x) = L$. Vamos aplicar esse resultado com

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x - x^2, \\ h(x) &= \frac{x^2-1}{x-1}, \\ p &= 1. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1} 3x - x^2 = 2, \qquad \text{e} \\ &\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2, \end{aligned}$$

segue que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

**2.** Abrindo essa desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| \leq 2|x-1| &\implies \\ -2|x-1| \leq f(x) - 3 \leq 2|x-1| &\implies \\ -2|x-1| + 3 \leq f(x) \leq 2|x-1| + 3. \end{aligned}$$

Vamos aplicar o Teorema do confronto com $g(x) = -2|x-1|+3$ e $h(x) = 2|x-1|+3$. As funções $g(x)$ e $h(x)$ possuem como fórmulas explícitas

$$g(x) = \begin{cases} -2(x-1)+3 = -2x+5, & x \geq 1 \\ -2(-x+1)+3 = 2x+1 & x < 1. \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} -2(-x+1)+3 = 2x+1, & x \geq 1 \\ -2(x-1)+3 = -2x+5 & x < 1. \end{cases}$$

Avaliando os limites laterais,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} g(x) &= \lim_{x\to 1^+} -2x+5 = 3, \\ \lim_{x\to 1^-} g(x) &= \lim_{x\to 1^-} 2x+1 = 3, \\ \text{portanto, } \lim_{x\to 1^+} g(x) &= \lim_{x\to 1^-} g(x), \end{aligned}$$

e segue que $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$. O cálculo análogo para $h(x)$ nos dá que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} h(x) &= \lim_{x\to 1^+} 2x+1 = 3, \\ \lim_{x\to 1^-} h(x) &= \lim_{x\to 1^-} -2x+5 = 3, \\ \text{portanto, } \lim_{x\to 1^+} h(x) &= \lim_{x\to 1^-} h(x), \end{aligned}$$

e segue que $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$. Aplicando o Teorema do Confronto, obtemos então que $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

**3.** Perceba que

$$|g(x)| \leq x^4 \iff -x^4 \leq g(x) \leq x^4 \iff -x^3 \leq \frac{g(x)}{x} \leq x^3.$$

Ademais,

$$\lim_{x\to 0} -x^3 = 0, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} x^3 = 0,$$

segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0.$$

**4.** O gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ é dado por

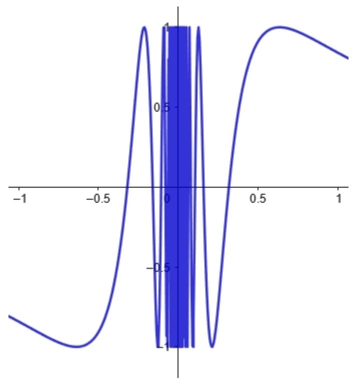



FIGURA 1. Gráfico de $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Perceba que ao se aproximar de 0 a função não se aproxima de nenhum valor em específico, mas apenas oscila rapidamente. Assim, o gráfico nos permite observar visualmente que o limite não existe.

**5.** Para isso, vamos usar o Teorema do Confronto. Sabemos, por propriedades do seno, que

$$-1 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1.$$

Multiplicando essa expressão por $x$, temos

$$-x \leq x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq x, \quad x > 0,$$
$$x \leq x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq -x, \quad x < 0.$$

Tomando os limites laterias, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} -x = 0 = \lim_{x\to 0^+} x,$$
$$\lim_{x\to 0^-} x = 0 = \lim_{x\to 0^-} -x.$$

Da primeira expressão sai que $\lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$, e da segunda expressão temos $\lim_{x\to 0^-} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$. Logo,

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$$

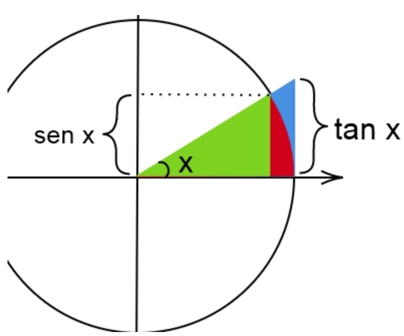
**6.** a) Pela definição, $f(x)$ é contínua em $p$ se $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|x-p| < \delta$ implica
$$|f(x) - f(p)| < \epsilon.$$
Perceba que, para essa função em específico, se $|x-p| < \delta$ então
$$|f(x) - f(p)| \le M|x-p|^2 < M\delta^2.$$
Assim, para qualquer $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \sqrt{\epsilon/M}$ obtemos
$$|f(x) - f(p)| < M\delta^2 = M\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{M}}\right)^2 = \epsilon.$$
Logo, $f(x)$ é contínua.

b) Pela desigualdade, temos
$$0 \le |f(x) - f(p)| \le M|x-p|^2 \implies 0 \le \frac{|f(x) - f(p)|}{|x-p|} \le M|x-p|.$$
Vamos aplicar o Teorema do Confronto com $g(x) = 0$ e $h(x) = M|x-p|$. Calculando os limites,
$$\lim_{x\to p} g(x) = 0 = \lim_{x\to p} M|x-p| = \lim_{x\to p} h(x).$$
Logo, segue que $\lim_{x\to p} |\frac{f(x)-f(p)}{x-p}| = 0$. Mas temos, pelo exercício 1 da Lista 3, que
$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = 0.$$
Portanto, $\lim_{x\to p} |\frac{f(x)-f(p)}{x-p}| = 0$ implica que
$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} = 0.$$

**7.** Considere
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \le p \\ -1 & x > p \end{cases}.$$

**8.** a) 1
b) $-1$
c) 0
d) 3
e) $-2$
f) 0
g) 0

**9.** Considere o círculo unitário como na Figura abaixo.



A área do triângulo verde é dada por $\frac{1}{2}|\operatorname{sen} x|$. A área do triângulo verde mais a parte em vermelho é $\frac{1}{2}|x|$. Por fim, a área do triângulo maior (área verde, mais vermelha, mais azul) é $\frac{1}{2}|\tan x|$. Assim, a imagem nos permite deduzir que

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{sen} x| < |x| < |\tan x| \\
&|\operatorname{sen} x| < |x| < \frac{|\operatorname{sen} x|}{|\cos x|} \\
&1 < \frac{|x|}{|\operatorname{sen} x|} < \frac{1}{|\cos x|} \\
&1 > \frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|} > |\cos x|.
\end{aligned}$$

Para obter a desigualde desejada, precisamos remover os módulos. Como $\cos x > 0$ se $|x| < \frac{\pi}{2}$, segue que escolhendo $r < \frac{\pi}{2}$ teremos $|\cos x| = \cos x$. Portanto, a desigualdade se torna

$$\cos x < \frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|} < 1.$$

Ademais, como $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, a questão 2 da Lista 3 nos garante que $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |x| < \delta$ implica $\frac{\operatorname{sen} x}{x} > 0$. Logo, para $0 < |x| < \delta$ temos que $\frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Assim, escolhendo $r < \min\{\frac{\pi}{2}, \delta\}$ temos que se $0 < |x| < r$ então

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

**10.** a) $\cos p$

b) - $\operatorname{sen} p$

c) $\sec^2 p$