Gabarito Lista 5

1. a) 0
b) 5
c) 2
d) 1/3
e) 0
f) 0
g) 1
h) 0
i) 1/2

2. Por definição, se $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, então para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$x > N \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \epsilon.$$

Assuma, sem perda de generalidade, que $g(x) > 0$ para $x > N$ (o caso $g(x) < 0$ é análogo). Algumas manipulações nos dão

$$-\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon$$
$$-\epsilon g(x) < f(x) < \epsilon g(x).$$

Por outro lado, como $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, sabemos que para todo $\tilde{\epsilon} > 0$ existe $\tilde{N} > 0$ tal que

$$x > \tilde{N} \implies |g(x)| < \tilde{\epsilon}.$$

Manipulando a última desigualdade, obtemos $-\tilde{\epsilon} < g(x) < \tilde{\epsilon}$. Assim, $x > \max\{N, \tilde{N}\}$ implica

$$-\epsilon g(x) < f(x) < \epsilon g(x)$$
$$-\epsilon\tilde{\epsilon} < f(x) < \epsilon\tilde{\epsilon}$$
$$|f(x)| < \epsilon\tilde{\epsilon}.$$

E como ϵ e $\tilde{\epsilon}$ são quaisquer, segue que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3. Por definição, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ se para todo $M > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$x > N \implies f(x) > M.$$

Seja $M > 1$ qualquer. Escolhendo $N = M^n$, temos que

$$x > M^n \implies \sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{M^n} = M.$$

Logo, $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = \infty$.

4. Queremos mostrar que para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$p < x < p + \delta \implies \frac{1}{f(x)} > M. \tag{1}$$

Como $\lim_{x\to p^+} f(x) = 0$, temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$p < x < p + \delta_1 \implies |f(x)| < \epsilon,$$

isto é, $-\epsilon < f(x) < \epsilon$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, r\}$ obtemos que

$$p < x < p + \delta \implies 0 < f(x) < \epsilon.$$

Dividindo tudo por $f(x)$, temos que

$$p < x < p + \delta \implies \infty > \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\epsilon}.$$

Assim, escolhendo $\epsilon = \frac{1}{M}$ obtemos a desigualdade da equação (1) e concluímos que

$$\lim_{x \to p^+} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

a) ∞
b) $-\infty$

5. a) 0
b) 1/2
c) ∞

6. a) $-\infty$
b) ∞
c) ∞
d) $-\infty$

7.

8.

9. a) $V(t) = 50 + 5t$
b) $A(t) = 250t$
c) $\lim_{t\to\infty} c(t) = 50\,g/L$