Lista 1
Geometria Diferencial – SMA0175
Prof. Fernando Manfio

Assunto: Superfícies regulares

1. Considere o elipsoide $\mathcal{E}$ dado pela equação

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

(a) Prove que $\mathcal{E}$ é superfície regular como pré-imagem de valor regular.
(b) Encontre uma parametrização para $\mathcal{E}$ provando que é superfície regular.

2. Considere o hiperboloide $\mathcal{H}$ dado pela equação

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

(a) Prove que $\mathcal{H}$ é superfície regular como pré-imagem de valor regular.
(b) Encontre uma parametrização para $\mathcal{H}$ provando que é superfície regular.

3. Dados dois números $a, r \in \mathbb{R}$, com $0 < r < a$, considere o círculo contido no plano-yz, de raio r e centro no ponto $(0, a, 0)$. Girando-se tal círculo em torno do eixo-z, obtemos o toro de rotação $T \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Verifique que o toro satisfaz a equação

$$z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 = r^2,$$

e prove que T é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.
(b) Encontre uma parametrização para T, satisfazendo a definição de superfície.

4. Prove que o cilindro

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

5. Considere o paraboloide hiperbólico dado pela equação

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}.$$

Encontre uma parametrização para M, provando que é superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

6. Considere uma curva diferenciável $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\alpha(u) = (f(u), 0, g(u)),$$

com $u \in (a, b)$ e $f(u) > 0$. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto obtido pela rotação de ângulo 2π da curva α em torno do eixo-z. Obtemos assim uma aplicação $\varphi\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : a < u < b,\ 0 < v < 2\pi\}$. Prove que φ é uma parametrização para o conjunto M. Como M pode ser globalmente coberto por parametrizações semelhantes, segue que M é uma superfície regular chamada de *superfície rotacional* de *perfil* α.