Lista 2
Geometria Diferencial – SMA0175
Prof. Fernando Manfio

Assunto: Aplicações diferenciáveis, plano tangente, diferencial

1. Prove que a aplicação antípoda $A\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, ao longo da esfera unitária $\mathbb{S}^2$, é um difeomorfismo.

2. Prove que o paraboloide $z = x^2 + y^2$ é difeomorfo ao plano $\mathbb{R}^2$.

3. Dados uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}^3$ e um ponto $p_0 \notin M$, prove que a função distância $f\colon M \to \mathbb{R}$, dada por $f(p) = \|p - p_0\|$, é diferenciável.

4. Dados uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}^3$ e um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^3$, prove que a função $f\colon M \to \mathbb{R}$, dada por $f(p) = \|p - p_0\|^2$, é diferenciável e $df(p) \cdot v = 2\langle v, p - p_0\rangle$, para quaisquer $p \in M$ e $v \in T_pM$.

5. Prove que se $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear e $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular invariante por L, i.e., $L(M) \subset M$, então a restrição $L|_M$ é diferenciável e $dL(p) \cdot v = L(v)$, para quaisquer $p \in M$ e $v \in T_pM$.

6. Seja $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, definida numa superfície regular conexa M, com a propriedade que $df(p) = 0$, para todo $p \in M$. Prove que f é constante.

7. Enuncie e prove a regra da cadeia para aplicações diferenciáveis entre superfícies regulares.

8. Considere um subconjunto $A \subset M$ de uma superfície regular M. Prove que A também é superfície se, e somente se, A é aberto em M. Neste caso, prove que $T_pA = T_pM$, para todo $p \in A$.

9. Prove que se uma superfície regular M intercepta um plano $\mathcal{P}$ num único ponto p, então $\mathcal{P} = T_pM$.

10. Sejam $f\colon V \to \mathbb{R}^3$ um difeomorfismo, definido no aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, e M uma superfície regular, com $M \subset V$. Prove que $f(M)$ é superfície regular e, para todo $p \in M$, tem-se $T_{f(p)}f(M) = df(p)(T_pM)$.

11. Mostre que as retas normais à uma superfície rotacional, parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),$$

com $f(u) > 0$ e $g'(u) \neq 0$, para todo $u \in (a, b)$, interceptam o eixo-z.

12. Um *ponto crítico* de uma função diferenciável $f\colon M \to \mathbb{R}$, definida numa superfície regular $M \subset \mathbb{R}^3$, é um ponto $p \in M$ tal que $df(p) = 0$.

(a) Dado um ponto $p_0 \notin M$, considere $f\colon M \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \|p - p_0\|$. Prove que $p \in M$ é ponto crítico de f se, e somente se, a reta determinada por p e p_0 é ortogonal a M em p.

(b) Fixado um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^3$, considere $f\colon M \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \langle p, v \rangle$. Prove que $p \in M$ é ponto crítico de f se, e somente se, v é ortogonal a M em p.

13. Prove que se todas as retas normais a uma superfície regular conexa M interceptam uma reta fixada, então M é uma superfície rotacional.

14. Prove que se todas as retas normais a uma superfície regular conexa M interceptam-se num ponto fixado, então M está contida numa esfera.

15. Seja $f\colon M \to N$ um difeomorfismo local entre superfícies regulares. Prove que se N é orientável, então M também o é. Disso decorre, em particular, que orientabilidade é preservada por difeomorfismos.