Lista 9
Cálculo I – SMA0353
Prof. Fernando Manfio

Assunto: Intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade e pontos de inflexão, máximos e mínimos

1. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, e esboce o gráfico das seguintes funções.

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

2. Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.

3. Prove que a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ admite três raízes reais distintas. Localize tais raízes

4. Sejam f e g duas funções deriváveis em (a, b) tais que $f'(x) < g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$. Suponha que exista $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$. Prove que $f(x) < g(x)$ para $x > c$ e $f(x) > g(x)$ para $x < c$.

5. Estude a função dada em relação à concavidade e pontos de inflexão e esboce seu gráfico.

(a) $f(x) = x^3 = 3x^2 - 9x$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

6. Considere a função $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$. Que condições b e c devem satisfazer para que 1 seja ponto de inflexão de f? Justifique.

7. Estude a função dada com relação à máximos e mínimos locais e globais. Esboce o gráfico da função.

(a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

(b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$

(c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$

(d) $f(x) = \sin x + \cos x,\ x \in [0, \pi]$

Assunto: Problemas de otimização

1. Determine dois números positivos cuja soma seja 4 e tal que a soma do cubo do menor com o quadrado do maior seja mínima.

2. Determine o volume máximo de um cilindro circular reto que pode ser inscrito em um cone de $12cm$ de altura e $4cm$ de raio da base, se os eixos do cilindro e do cone coincidem.

3. Uma rodovia Norte – Sul intercepta outra rodovia Leste – Oeste em um ponto P. Um automóvel passa por P às $10h$, dirigindo-se para o Leste a $20km/h$. No mesmo instante, outro automóvel está a $2km$ ao Norte de P e se dirige para o Sul a $50km/h$. Determine o instante em que os automóveis estão mais próximos um do outro, e aproxime a distância mínima entre eles.

4. Um muro tem $3m$ de altura, é paralelo à parede de um edifício e está a $0,30m$ desta. Determine o comprimento da menor escada que vá do chão à parede do edifício, tocando o muro.

5. Deve-se construir um tanque para armazenamento de gás propano em forma de cilindro circular reto com dois hemisférios nas extremidades. O custo do metro quadrado dos hemisférios é o dobro do custo da parte cilíndrica. Se a capacidade do tanque deve ser de $10\pi m^3$, que dimensões minimizarão o custo da construção?

6. Uma pessoa se localiza em um bote a $2km$ de distância do ponto mais próximo em uma praia retilínea, e deseja atingir uma casa a $6km$ praia abaixo. Se a pessoa pode remar à razão de $3km/h$ e andar à razão de $5km/h$, determine o tempo mínimo que levará para atingir a casa.

Respostas:

1. $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$

2. $\frac{256\pi}{9}cm^3$

3. $\approx 0,74km$

4. $4,48m$

5. raio $= \frac{1}{2}\sqrt[3]{15}$, comprimento do cilindro $= 2\sqrt[3]{15}$

6. $1h$ e $44min$