Notas das aulas da disciplina

Geometria I

Fernando Manfio
ICMC – USP

2^{o} Semestre de 2023

Sumário

Capítulo 1

Subvariedades Euclidianas

As técnicas do cálculo, que tem suas origens no final do século XVII com Newton e Leibniz, transformaram a Geometria. Os objetos, que até então eram tratados com uma abordagem mais axiomática, ganharam nova perspectiva com o advento do cálculo diferencial e integral.

A geometria diferencial de superfícies no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, por exemplo, tem dois grandes aspectos. Um deles, que está ligado diretamente às origens do cálculo, diz respeito as propriedades locais das superfícies, ou seja, aquelas propriedades que dependem somente do comportamento da superfície na vizinhança de um ponto. O segundo aspecto diz respeito em como as propriedades locais de uma superfície influenciam no seu comportamento como um todo.

Neste capítulo iremos apenas introduzir e destacar algumas das propriedades locais das subvariedades Euclidianas em $\mathbb{R}^n$, que são generalizações direta das superfícies em $\mathbb{R}^3$ estudadas nos cursos clássicos de geometria diferencial. Esses objetos serão revisitados no capítulo seguinte, no sentido de que são os exemplos naturais de uma classe mais ampla, as variedades diferenciáveis. O objetivo aqui é apenas destacar que, com o auxílio dos teoremas clássicos do cálculo, como os teoremas da aplicação inversa e implícita, as subvariedades Euclidianas admitem descrições e caracterizações simples. Maiores detalhes podem ser encontrados em E. Lima [11], para os resultados do cálculo, e as referências clássicas de geometria diferencial M. do Carmo [3], M. Berger - B. Gostiaux [2] ou J. Lee [10].

1.1 Subvariedades Euclidianas

Nesta seção estudaremos o conceito de subvariedade em $\mathbb{R}^n$. De forma intuitiva, subvariedades em $\mathbb{R}^n$ são subconjuntos localmente homeomorfos a algum espaço Euclidiano que, em cada ponto, está bem definida uma estrutura de espaço tangente.

Definição 1.1.1. Uma *subvariedade Euclidiana* de *dimensão* m em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto M tal que, para todo ponto $p \in M$, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um homeomorfismo $\varphi : U \to M \cap V$, definido num aberto U de $\mathbb{R}^m$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) φ é uma aplicação diferenciável,

(b) a diferencial $\mathrm{d}\varphi(x)$ é injetora em todo ponto $x \in U$.

A aplicação φ é chamada uma *parametrização* para a subvariedade Euclidiana M, o subconjunto $M \cap V$ é uma *vizinhança coordenada* de M em torno do ponto p e o número $n - m$ é a *codimensão* da subvariedade M em $\mathbb{R}^n$. No caso particular em que $n - m = 1$, M é usualmente chamada uma *hipersuperfície* de $\mathbb{R}^n$. Além disso, no caso em que $m = 1$, M é simplesmente uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^n$.

Na Definição 1.1.1 estamos considerando M com a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$. Assim, toda subvariedade Euclidiana é, em particular, uma variedade topológica. Além disso, a condição de $\mathrm{d}\varphi(x)$ ser injetora equivale ao conjunto $\{\mathrm{d}\varphi(x) \cdot e_i : 1 \leq i \leq m\}$ ser linearmente independente ou, de forma equivalente, a matriz Jacobiana $\mathrm{d}\varphi(x)$ ter posto m.

A fim de reduzir a notação e simplificar os enunciados, uma subvariedade Euclidiana M de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ será denotada simplesmente por M^m, ficando subentendido que M é sempre subconjunto de algum espaço Euclidiano. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.1.2. Qualquer subespaço vetorial E de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. De fato, considere um isomorfismo linear $T : E \to \mathbb{R}^m$. Munimos E da única topologia, induzida de $\mathbb{R}^n$, que torna T um homeomorfismo. Como toda aplicação linear em $\mathbb{R}^n$ é diferenciável, concluímos que T é um difeomorfismo e, portanto, uma parametrização global para E.

Exemplo 1.1.3. Consideremos a esfera unitária $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Se $N = (0, \ldots, 0, 1)$ é o polo norte de $\mathbb{S}^n$, seja $\pi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ a projeção estereográfica. Geometricamente, $\pi_N(x)$ é o ponto em que a semirreta de

$\mathbb{R}^{n+1}$, com origem em N e passando pelo ponto $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, intercepta o hiperplano $x_{n+1} = 0$. Os pontos dessa semirreta são da forma $N + t(x - N)$, com $t \geq 0$. Este ponto está no hiperplano $x_{n+1} = 0$ se, e somente se, $1 + t(x_{n+1} - 1) = 0$, onde $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Assim, $t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$ e, portanto,

$$\pi_N(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n, 0). \tag{1.1}$$

A expressão em (1.1) mostra que π_N é contínua. Por outro lado, considere a aplicação $\varphi_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ definida por

$$\varphi_N(x) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \ldots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right),$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Tem-se φ_N contínua,

$$\varphi_N \circ \pi_N = id \quad \text{e} \quad \pi_N \circ \varphi_n = id,$$

ou seja, φ_N é um homeomorfismo. Além disso, φ_N é diferenciável, e o leitor pode verificar que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a diferencial $\mathrm{d}\varphi_N(x)$ é injetora. Concluímos, assim, que a inversa da projeção estereográfica é uma parametrização para a vizinhança coordenada $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$. De forma análoga, podemos considerar a inversa da projeção estereográfica π_S relativa ao polo sul $S = (0, 0, \ldots, -1)$ de $\mathbb{S}^n$ mostrando que $\mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nos dois exemplos a seguir discutiremos as subvariedades Euclidianas de dimensão máxima e mínima.

Exemplo 1.1.4. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão 0 se, e somente se, para todo $p \in M$, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e uma parametrização $\varphi : U \to M \cap V$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Assim, devemos ter $U = \{0\}$ e $M \cap V = \{p\}$. Portanto, $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade de dimensão 0 se, e somente se, M é um conjunto discreto.

Exemplo 1.1.5. Todo subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão n em $\mathbb{R}^n$, imagem da única parametrização $id : U \to U$. Reciprocamente, seja M uma subvariedade Euclidiana de dimensão n em $\mathbb{R}^n$. Assim, para todo $p \in M$, existem um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um homeomorfismo $\varphi : U \to M \cap V$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Pelo teorema da invariância do domínio (cf. Apêndice 1), segue que a vizinhança coordenada $M \cap V$ é aberta em $\mathbb{R}^n$. Portanto, o conjunto M, reunião das vizinhanças coordendas $M \cap V$, é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1.6. O gráfico de uma aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$, definida num aberto U de $\mathbb{R}^m$, é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. De fato, denotando por $\mathrm{Gr}(f)$ o gráfico de f, mostremos que a aplicação $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, dada por $\varphi(x) = (x, f(x))$, é uma parametrização global para $\mathrm{Gr}(f)$. Como f é diferenciável, o mesmo ocorre com φ. Cada ponto $(x, f(x)) \in \mathrm{Gr}(f)$ é imagem através de φ do único ponto $x \in U$, logo φ é injetora. Além disso, a restrição ao gráfico de f da projeção de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ é uma inversa para φ, mostrando que φ^{-1} também é contínua. Disso decorre que φ é um homeomorfismo. Finalmente, como $\mathrm{d}\varphi(x)$ tem posto m em todos os pontos $x \in U$, segue que φ é uma imersão.

O resultado seguinte é uma recíproca local para o Exemplo 1.1.6.

Teorema 1.1.7. *Toda subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ é, localmente, o gráfico de uma aplicação diferenciável. Mais precisamente, dado um ponto p da subvariedade M, existem abertos $Z \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e uma aplicação diferenciável $f : Z \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $M \cap V = \mathrm{Gr}(f)$.*

Demonstração. Fixado um ponto $p \in M$, considere uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$. Como $E = \mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m)$ é um subespaço vetorial de dimensão m de $\mathbb{R}^n$, existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ tal que a projeção $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ transforma E isomorficamente sobre $\mathbb{R}^m$. Considere a aplicação $\eta = \pi \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^m$. Como $\mathrm{d}\eta(x) = \pi \circ \mathrm{d}\varphi(x)$ é um isomorfismo linear, segue do teorema da aplicação inversa que existe um aberto W de $\mathbb{R}^m$, com $x \in W \subset U$, tal que $\eta|_W : W \to \eta(W) = Z$ é um difeomorfismo. Defina

$$\xi = (\eta|_W)^{-1} : Z \to W \quad \text{e} \quad \psi = \varphi \circ \xi.$$

Temos que ψ é uma parametrização de M e $\pi \circ \psi = id$. Disso decorre que a primeira coordenada de $\psi(x)$, em relação à decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$, é x. Denote por $f(x)$ a segunda coordenada. Assim,

$$\psi(Z) = \varphi(W) = \{(x, f(x)) : x \in Z\}$$

para alguma aplicação diferenciável $f : Z \to \mathbb{R}^{n-m}$. Como φ é aberta, tem-se $\mathrm{Gr}(f) = \varphi(W) = M \cap V$, para algum aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$. $\square$

Como aplicação do Teorema 1.1.7, vejamos um exemplo simples de conjunto que não é subvariedade Euclidiana.

Exemplo 1.1.8. Denotemos por M o cone de uma folha em $\mathbb{R}^3$, i.e.,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}.$$

Observe inicialmente que a projeção $\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$, define um homeomorfismo entre M e $\mathbb{R}^2$. No entanto, M não é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. De fato, caso fosse existiriam, em virtude do Teorema 1.1.7, abertos $U \subset \mathbb{R}^2$ e $V \subset \mathbb{R}^3$, com $0 \in V$, e uma função diferenciável $g : U \to \mathbb{R}$ tal que $M \cap V = \mathrm{Gr}(g)$. Observe que $M \cap V$ não pode ser um gráfico em relação a uma decomposição da forma $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$, no qual o segundo fator seja o eixo-x ou o eixo-y. Resta então para o segundo fator da decomposição acima ser o eixo-z e, assim, $g = f|_U$, onde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. No entanto, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

1.2 Valores regulares

De modo geral, provar que um determinado conjunto M é uma subvariedade Euclidiana de $\mathbb{R}^n$ não é uma tarefa simples. De acordo com a Definição 1.1.1, devemos exibir parametrizações de vizinhanças de todos os pontos de M. Veremos nesta seção que, com a noção de valor regular para aplicações diferenciáveis, podemos obter outras maneiras de gerar subvariedades Euclidianas.

Seja $f : V \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, definida no aberto V de $\mathbb{R}^m$. Um ponto $p \in V$ é chamado *ponto regular* para f se a diferencial $\mathrm{d}f(p)$ é uma aplicação linear sobrejetora. Um ponto $q \in \mathbb{R}^n$ é chamado *valor regular* para f se a pré-imagem $f^{-1}(q)$ contém apenas pontos regulares para f. Finalmente, um ponto $p \in V$ para o qual a diferencial $\mathrm{d}f(p)$ não é sobrejetora será chamado *ponto crítico* para f.

A proposição seguinte fornece condições suficientes para que uma subvariedade Euclidiana seja dada de forma implícita.

Proposição 1.2.1. Seja $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ uma aplicação diferenciável, onde V é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $q \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular para f, com $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, então $M = f^{-1}(q)$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Em virtude do Exemplo 1.1.6, é suficiente mostrar que, localmente, M é gráfico de uma aplicação diferenciável. Dado um ponto $p \in M$, com $p = (x_0, y_0)$, podemos assumir que $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, visto que $\mathrm{d}f(p)$ é sobrejetora. Assim, pelo teorema da aplicação implícita, existem um aberto $Z = U \times W$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^m$ contendo x_0 e W é um aberto de $\mathbb{R}^{n-m}$ contendo y_0, e uma aplicação diferenciável $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $f(x, g(x)) = q$, para todo $x \in U$. Isso mostra que $M \cap Z = \mathrm{Gr}(g)$. $\square$

No caso em que $f^{-1}(q) = \emptyset$, então q é trivialmente um valor regular para f. Além disso, quando o contra-domínio de f é $\mathbb{R}$, então o funcional linear $\mathrm{d}f(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou é nulo ou é sobrejetora. Neste caso, um número real c é valor regular para f se, e somente se, $\mathrm{d}f(p) \neq 0$, para todo $p \in f^{-1}(c)$.

Vejamos algumas aplicações da Proposição 1.2.1.

Exemplo 1.2.2. Considere a função diferenciável $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle x, x\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Observe que a esfera unitária $\mathbb{S}^n$ pode ser dada como $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$. A fim de verificar novamente que $\mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$, basta mostrar que 1 é valor regular para f. De fato, para todo ponto $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ e todo vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, tem-se $\mathrm{d}f(x) \cdot v = 2\langle x, v\rangle$. Isso implica que $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o único ponto crítico de f. Como $f(0) = 0 \neq 1$, segue a conclusão.

Lembremos que uma matriz quadrada $X \in M(n)$ é chamada *simétrica* se $X^t = X$ e *anti-simétrica* se $X^t = -X$, onde X^t denota a transposta de X. As matrizes simétricas e anti-simétricas formam subespaços vetoriais de $M(n)$, denotados por $\mathcal{S}(n)$ e $\mathcal{A}(n)$, respectivamente, tal que $M(n) = \mathcal{S}(n) \oplus \mathcal{A}(n)$.

Exemplo 1.2.3. O *grupo ortogonal* $O(n)$, definido por

$$O(n) = \{X \in M(n) : XX^t = I\},$$

é uma subvariedade Euclidiana de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ em $\mathbb{R}^{n^2}$. De fato, considerando a aplicação $f : M(n) \to \mathcal{S}(n)$ dada por $f(X) = XX^t$, temos que $O(n) = f^{-1}(I)$, onde I denota a matriz identidade. Assim, devemos provar que $I \in \mathcal{S}(n)$ é valor regular para f. A aplicação f é diferenciável e sua diferencial é dada por

$$\mathrm{d}f(X) \cdot H = XH^t + HX^t.$$

Finalmente, dados $X \in O(n)$ e $S \in \mathcal{S}(n)$, tome $V = \frac{1}{2}SX$. Um cálculo simples mostra que $\mathrm{d}f(X) \cdot V = S$, ou seja, $\mathrm{d}f(X)$ é sobrejetora, logo $O(n)$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ em $M(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

Exemplo 1.2.4. O toro T^2 em $\mathbb{R}^3$ é o subconjunto gerado pela rotação de um círculo de raio r em torno de uma reta contida no plano do círculo e a uma distância $a > r$ do centro do círculo. Por simplicidade, denotemos por $\mathbb{S}^1$ o círculo contido no plano-yz com centro no ponto $(0, a, 0)$. Assim, $\mathbb{S}^1$ é dado pela equação $(y - a)^2 + z^2 = r^2$, e os pontos do toro T^2, obtidos pela rotação de $\mathbb{S}^1$ em torno do eixo-z satisfazem a equação

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2.$$

Dessa forma, T^2 pode ser dado como $T^2 = f^{-1}(r^2)$, onde

$$f(x, y, z) = z^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2.$$

Note que, para $(x, y) \neq (0, 0)$, f é diferenciável e tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(\sqrt{x^2+y^2} - a)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(\sqrt{x^2+y^2} - a)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

Além disso,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = a \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Disso decorre, em particular, que r^2 é valor regular para f, pois nenhum dos pontos acima pertence a T^2, mostrando que T^2 é uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

Observação 1.2.5. A imagem inversa $f^{-1}(q)$ pode ser uma subvariedade Euclidiana sem que q seja valor regular para f. Por exemplo, considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z^2$. Note que f é diferenciável e $f^{-1}(0)$ coincide com o plano-xy, que é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. No entanto, o ponto $0 \in \mathbb{R}$ não é valor regular para f, pois $\mathrm{d}f(x, y, 0) = 0$, para todo $(x, y, 0) \in f^{-1}(0)$.

O resultado seguinte é uma recíproca local para a Proposição 1.2.1.

Teorema 1.2.6. *Toda subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ é, localmente, imagem inversa de valor regular. Ou seja, dado um ponto p da subvariedade M, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e uma aplicação diferenciável $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $M \cap V = f^{-1}(0)$, onde $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular para f.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.7, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, tal que $M \cap V = \mathrm{Gr}(g)$, onde $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ é uma aplicação diferenciável definida num aberto U de $\mathbb{R}^m$. Defina a aplicação $f : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ pondo $f(x, y) = y - g(x)$. Por construção, temos $M \cap V = \mathrm{Gr}(g) = f^{-1}(0)$. Resta provar que $\mathrm{d}f(x, y)$ é sobrejetora em todo ponto $(x, y) \in f^{-1}(0)$. De fato, dados $(x, y) \in f^{-1}(0)$ e $(u, v) \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x,y) \cdot (u,v) &= \mathrm{d}f(x,y) \cdot (u,0) + \mathrm{d}f(x,y) \cdot (0,v) \\ &= \mathrm{Id}(0) - \mathrm{d}g(x) \cdot u + \mathrm{Id}(v) - \mathrm{d}g(x) \cdot 0 \\ &= v - \mathrm{d}g(x) \cdot u. \end{aligned}$$

Portanto, dado $v \in \mathbb{R}^{n-m}$, tem-se $\mathrm{d}f(x, y) \cdot (0, v) = v$, e isso prova que 0 é valor regular para f. □

Os Teoremas 1.1.7 e 1.2.6 fornecem descrições locais para uma dada subvariedade Euclidiana, como gráfico e pré-imagem de valor regular de aplicação diferenciável, respectivamente. O teorema seguinte fornece uma forma equivalente para a Definição 1.1.1, e que será útil nas seções seguintes.

Teorema 1.2.7. *Um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, para todo $p \in M$, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tal que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$.*

Demonstração. Suponha que M seja uma subvariedade Euclidiana de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. Dado um ponto $p \in M$, segue do Teorema 1.2.6 que existe uma aplicação diferenciável $f : Z \to \mathbb{R}^{n-m}$, definida num aberto $Z \subset \mathbb{R}^n$ contendo p, tal que $M \cap V = f^{-1}(0)$, onde $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular para f. Como a diferencial $\mathrm{d}f(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ é sobrejetora, o conjunto $\{\mathrm{d}f(p)\cdot e_1, \ldots, \mathrm{d}f(p)\cdot e_n\}$ gera $\mathbb{R}^{n-m}$. Assim, podemos escolher vetores $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-m}}$ tais que o conjunto $\{\mathrm{d}f(p)\cdot e_{i_1}, \ldots, \mathrm{d}f(p)\cdot e_{i_{n-m}}\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^{n-m}$. Considere a decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $\mathbb{R}^{n-m} = \mathrm{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-m}}\}$ e $\mathbb{R}^m$ gerado pelos demais vetores canônicos. Assim, $\mathrm{d}f(p)|_{\mathbb{R}^{n-m}}$ é um isomorfismo linear. Defina uma aplicação $\xi : Z \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ pondo $\xi(x, y) = (x, f(x, y))$, para todo $(x, y) \in Z$. Temos que ξ é uma aplicação diferenciável e $\mathrm{d}\xi(p)$ é um isomorfismo. Assim, pelo teorema da aplicação inversa, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V \subset Z$, tal que $\xi|_V : V \to \xi(V)$ é um difeomorfismo. Podemos supor que $\xi(V) = U \times W \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$, onde W é um aberto contendo $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Assim,

$$\begin{aligned} (x, y) \in M \cap V \quad &\Leftrightarrow \quad \xi(x, y) = (x, f(x, y)) \\ &\Leftrightarrow \quad \xi(x, y) = (x, 0), \end{aligned}$$

ou seja, $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Reciprocamente, dado um ponto $p \in M$, considere o difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tal que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Como $\xi(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, o subconjunto $U = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$ é aberto em $\mathbb{R}^m$. Defina, então, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ pondo $\varphi = \xi|_U^{-1}$. Assim, φ é uma parametrização de M, com $\varphi(U) = M \cap V$. □

1.3 O espaço tangente

Nesta seção discutiremos a noção de espaço tangente a uma subvariedade Euclidiana. Veremos que este conjunto admite uma estrutura natural de espaço vetorial, induzida do espaço Euclidiano através das parametrizações.

Seja M^m uma subvariedade Euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Fixado um ponto $p \in M$, dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é *tangente* a M no ponto p se existe uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. O conjunto de todos os vetores tangentes a M no ponto p será chamado o *espaço tangente* a M em p e será denotado por T_pM.

Exemplo 1.3.1. Se U é um subconjunto aberto de uma subvariedade Euclidiana M, então $T_pU = T_pM$, para todo $p \in U$. De fato, claramente tem-se $T_pU \subset T_pM$. Se $v \in T_pM$, existe uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. Podemos restringir o intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ de modo que $\lambda(-\epsilon, \epsilon) \subset U$, logo $v \in T_pU$. Em particular, se V é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, então $T_pV = T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

O objetivo agora é mostrar que T_pM é um espaço vetorial. Vejamos, inicialmente, como se comportam os espaços tangentes de duas subvariedades Euclidianas relacionadas por uma aplicação diferenciável.

Proposição 1.3.2. Seja $f : U \to V$ uma aplicação diferenciável entre os abertos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, e suponha que existam subvariedades Euclidianas M e N tais que $M \subset U$, $N \subset V$ e $f(M) \subset N$. Então, $\mathrm{d}f(p)(T_pM) \subset T_{f(p)}N$, para todo $p \in M$. Em particular, se f é um difeomorfismo, com $f(M) = N$, então $\mathrm{d}f(p)(T_pM) = T_{f(p)}N$, para todo $p \in M$.

Demonstração. Dados um ponto $p \in M$ e um vetor $v \in T_pM$, considere uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. A curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to N$, dada por $\alpha(t) = f(\lambda(t))$, é diferenciável em $t = 0$. Além disso, temos $\alpha(0) = f(p)$ e $\alpha'(0) = \mathrm{d}f(p) \cdot v$, ou seja, $\mathrm{d}f(p) \cdot v \in T_{f(p)}N$. Logo, $\mathrm{d}f(p)(T_pM) \subset T_{f(p)}N$. A última afirmação segue-se aplicando f^{-1} à parte já provada. $\square$

Corolário 1.3.3. O espaço tangente T_pM é um subespaço vetorial de dimensão m em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Em virtude do Teorema 1.2.7, existem um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tais que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Então, pela Proposição 1.3.2, temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi(p)(T_pM) &= \mathrm{d}\xi(p)(T_p(M \cap V)) = T_{\xi(p)}(\xi(V) \cap \mathbb{R}^m) \\ &= T_{\xi(p)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

ou seja, $T_pM = \mathrm{d}\xi(p)^{-1}(\mathbb{R}^m)$ é um subespaço vetorial de dimensão m. $\square$

Corolário 1.3.4. Dado um ponto $p \in M$, considere uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$. Então, $T_pM = \mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m)$. Em particular, uma base para T_pM é dada por $\{\mathrm{d}\varphi(x) \cdot e_i : 1 \leq i \leq m\}$, onde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^m$.

Demonstração. Pela Proposição 1.3.2, temos:

$$\mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m) = \mathrm{d}\varphi(x)(T_xU) \subset T_p\varphi(U) = T_pM.$$

Assim, em virtude do Corolário 1.3.3, segue que $T_pM = \mathrm{d}\varphi(x)(\mathbb{R}^m)$, uma vez que ambos são subespaços vetoriais de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. □

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.3.5. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ uma aplicação diferenciável, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, e $q \in \mathbb{R}^{n-m}$ um valor regular para f. Então, o espaço tangente a $M = f^{-1}(q)$ num ponto p é dado por $T_pM = \ker \mathrm{d}f(p)$. De fato, dado um vetor $v \in T_pM$, considere uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. A curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^{n-m}$, dada por $\alpha(t) = f(\lambda(t))$, é constante e igual a q, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Assim,

$$\mathrm{d}f(p) \cdot v = \mathrm{d}f(\lambda(0)) \cdot \lambda'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \lambda)(0) = \alpha'(0) = 0,$$

ou seja, $v \in \ker \mathrm{d}f(p)$. Isso mostra que $T_pM \subset \ker \mathrm{d}f(p)$. Como ambos são subespaços vetoriais de dimensão m em $\mathbb{R}^n$, obtemos a igualdade desejada.

Exemplo 1.3.6. Uma situação particular do Exemplo 1.3.5 pode ser vista no grupo ortogonal $O(n)$. Lembre que $O(n)$ pode ser considerado como a imagem inversa $O(n) = f^{-1}(I)$ da aplicação diferenciável $f : M(n) \to \mathcal{S}(n)$ dada por $f(X) = XX^t$ (cf. Exemplo 1.2.3). Como a diferencial de f é dada por $\mathrm{d}f(X) \cdot H = XH^t + HX^t$, segue do Exemplo 1.3.5 que

$$T_IO(n) = \ker \mathrm{d}f(I) = \{H \in M(n) : H^t + H = 0\},$$

ou seja, o espaço tangente ao grupo ortogonal $O(n)$ na matriz identidade é o subespaço das matrizes anti-simétricas.

O exemplo seguinte generaliza o fato de que a reta tangente ao círculo é sempre ortogonal à direção radial.

Exemplo 1.3.7. O espaço tangente à esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ num ponto p é dado por

$$T_p\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p \rangle = 0\}.$$

De fato, observe inicialmente que $\{p\}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p\rangle = 0\}$ é um subespaço vetorial de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, considere um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, com $v = \lambda'(0)$, onde $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^n$ é uma curva diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$. Derivando a igualdade $\|\lambda(t)\| = 1$ e aplicando em $t = 0$, obtemos $\langle v, p\rangle = 0$, ou seja, $v \in \{p\}^\perp$. Isso mostra que $T_p\mathbb{S}^n \subset \{p\}^\perp$. Como $T_p\mathbb{S}^n$ também tem dimensão n, segue que $T_p\mathbb{S}^n = \{p\}^\perp$, e a afirmação está provada.

1.4 Mudança de coordenadas

Dado uma subvariedade Euclidiana M^m em $\mathbb{R}^n$, considere uma parametrização $\varphi : U \to M \cap V$ de M, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se W é um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $\xi : W \to U$ é um difeomorfismo, então a aplicação

$$\varphi \circ \xi : W \to M \cap V$$

também é uma parametrização de M, denominada usualmente uma *mudança de coordenadas*. O resultado seguinte garante que esta é a única maneira de obter novas parametrizações do aberto $M \cap V$.

Dados duas parametrizações $\varphi_1 : U_1 \to M \cap V_1$ e $\varphi_2 : U_2 \to M \cap V_2$ em M, com $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, a aplicação

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(M \cap V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(M \cap V_1 \cap V_2) \tag{1.2}$$

é chamada a *mudança de coordenadas* entre φ_1 e φ_2. Claramente a aplicação em (1.2) é um homeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^m$. No entanto, não é imediato que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ é diferenciável, visto que φ_2^{-1} não está definida num aberto de $\mathbb{R}^n$.

O resultado seguinte fornece a diferenciabilidade da aplicação em (1.2).

Teorema 1.4.1. *Sejam $\varphi_1 : U_1 \to M \cap V_1$ e $\varphi_2 : U_2 \to M \cap V_2$ parametrizações de uma subvariedade Euclidiana M, com $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Então, a mudança de coordenadas $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, dada em* (1.2)*, é um difeomorfismo.*

Demonstração. Fixemos um ponto $p \in M \cap V_1 \cap V_2$. Decorre do Teorema 1.2.7 que existe um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tal que $\xi(M \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^m$. Como V é aberto em $\mathbb{R}^n$ e φ_1 é um homeomorfismo, existe um aberto $\widetilde{U}_1$ de $\mathbb{R}^m$, com $\varphi_1^{-1}(p) \in \widetilde{U}_1 \subset U_1$, tal que $\varphi_1(\widetilde{U}_1) \subset M \cap V$, logo $(\xi \circ \varphi_1)(\widetilde{U}_1) \subset \mathbb{R}^m$. Analogamente, existe um aberto $\widetilde{U}_2$ de $\mathbb{R}^m$, com $\varphi_2^{-1}(p) \in \widetilde{U}_2 \subset U_2$, tal que

$(\xi \circ \varphi_2)(\widetilde{U}_2) \subset \mathbb{R}^m$. Seja $W = \varphi_1(\widetilde{U}_1) \cap \varphi_2(\widetilde{U}_2)$. Assim, no aberto $\varphi_1^{-1}(W)$, tem-se:

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \xi^{-1} \circ \xi \circ \varphi_1 = (\xi \circ \varphi_2)^{-1} \circ (\xi \circ \varphi_1).$$

A composta $\xi \circ \varphi_1$ é diferenciável. Além disso, como $\mathrm{d}(\xi \circ \varphi_2)(x)$ é um isomorfismo linear, segue do teorema da aplicação inversa que $\xi \circ \varphi_2$ é, possivelmente num aberto menor, um difeomorfismo. Disso decorre que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ é diferenciável. Analogamente se prova que $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$, inversa de $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, também é diferenciável. □

O Teorema 1.4.1 permite estender o conceito de diferenciabilidade, que até então só faz sentido quando o domínio da aplicação é um subconjunto aberto de algum espaço Euclidiano. O que faremos então é abranger aplicações entre duas subvariedades Euclidianas M^m e N^n.

Definição 1.4.2. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita *diferenciável* no ponto $p \in M$ se existem parametrizações $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M e $\psi : V \to \psi(V)$ de N, com $p = \varphi(x)$ e $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$, de modo que a aplicação

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \to V \tag{1.3}$$

seja diferenciável no ponto $x \in U \subset \mathbb{R}^m$.

Em virtude do Teorema 1.4.1, a aplicação (1.3) está bem definida e será chamada a *representação* de f em relação às parametrizações φ e ψ.

Observação 1.4.3. No caso particular em que f é da forma $f : M^m \to \mathbb{R}^k$, segue que f é diferenciável no ponto $p \in M$ se existe uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$, tal que a aplicação

$$f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^k$$

é diferenciável no ponto $x = \varphi^{-1}(p)$.

Exemplo 1.4.4. Sejam M^m uma subvariedade Euclidiana em $\mathbb{R}^n$, V um aberto de $\mathbb{R}^n$, com $M \subset V$, e $f : V \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A restrição de f a M é uma função diferenciável em M. De fato, dados um ponto $p \in M$ e uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to \varphi(U)$, com $p \in \varphi(U)$, a função $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável, pois é a composta de aplicações diferenciáveis em espaços Euclidianos. Como caso particular, considere a função *distância* $d : M \to \mathbb{R}$ da subvariedade M a um ponto fixado $p_0 \notin M$, ou seja, $d(p) = \|p - p_0\|$, para todo $p \in M$. Neste caso, d é uma função diferenciável pois é a restrição a M da função diferenciável $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $d(p) = \|p - p_0\|$.

Proposição 1.4.5. Toda parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de uma subvariedade Euclidiana M^m é um difeomorfismo.

Demonstração. Da Definição 1.1.1, a aplicação $\varphi : U \to \varphi(U)$ é um homeomorfismo diferenciável. Resta mostrar que a inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ é diferenciável. Escrevamos $f = \varphi^{-1}$. Note que a aplicação $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}^m$ está definida num aberto da subvariedade M. Assim, segundo a Observação 1.4.3, devemos mostrar que, para todo $p \in \varphi(U)$, existe uma parametrização $\psi : W \to \psi(W)$ de $\varphi(U)$, com $\psi(x) = p$, tal que $f \circ \psi : W \to \mathbb{R}^m$ seja diferenciável. Basta considerar a própria parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$, pois $f \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi = id$ é a aplicação identidade em $\mathbb{R}^m$, que é diferenciável. □

Dado uma aplicação $f : M^m \to N^n$, diferenciável no ponto $p \in M$, a *diferencial* de f no ponto p é a transformação linear $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ definida do seguinte modo. Considere uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, com $p = \varphi(x)$. Dado um vetor $v \in T_pM$, temos $v = \mathrm{d}\varphi(x) \cdot w$, para algum vetor $w \in \mathbb{R}^m$. Definimos, então,

$$\mathrm{d}f(p) \cdot v = \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot w.$$

Devemos mostrar que $\mathrm{d}f(p)$ independe da escolha da parametrização φ. De fato, seja $\psi : V \to \psi(V)$ outra parametrização de M, com $p = \psi(y)$ e $v = \mathrm{d}\psi(y) \cdot u$. Sabemos, pelo Teorema 1.4.1, que $\psi = \varphi \circ \xi$, onde

$$\xi : \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V)) \to \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$$

é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^m$, com $\xi(y) = x$. Temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi(x) \cdot w &= v = \mathrm{d}\psi(y) \cdot u = \mathrm{d}(\varphi \circ \xi)(y) \cdot u \\ &= \mathrm{d}\varphi(x) \cdot \mathrm{d}\xi(y) \cdot u. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{d}\varphi(x)$ é injetora, segue que $\mathrm{d}\xi(y) \cdot u = w$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f \circ \psi)(y) \cdot u &= \mathrm{d}(f \circ \varphi \circ \xi)(y) \cdot u = \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot \mathrm{d}\xi(y) \cdot u \\ &= \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot w. \end{aligned}$$

Observação 1.4.6. O vetor $v \in T_pM$ é o vetor velocidade $\lambda'(0)$ de uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, diferenciável em $t = 0$, com $\lambda(0) = p$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(p) \cdot v &= \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot w = \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \cdot (\varphi^{-1} \circ \lambda)'(0) \\ &= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \lambda)'(0) = (f \circ \lambda)'(0), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathrm{d}f(p) \cdot v$ é o vetor velocidade da curva $f \circ \lambda$ no instante $t = 0$.

Proposição 1.4.7 (Regra da cadeia)**.** Considere subvariedades Euclidianas M, N, P e aplicações $f : M \to N$ e $g : N \to P$ tais que f é diferenciável no ponto $p \in M$ e g é diferenciável no ponto $f(p)$. Então a aplicação composta $g \circ f : M \to P$ é diferenciável no ponto p e vale a regra:

$$\mathrm{d}(g \circ f)(p) = \mathrm{d}g(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p).$$

Demonstração. Considere parametrizações $\varphi : U \to \varphi(U)$, $\psi : V \to \psi(V)$ e $\xi : W \to \xi(W)$ de de M, N e P, respectivamente, tais que $p = \varphi(x)$ e $f(p) = \psi(y)$. Como f é diferenciável em $p \in M$, segue que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é diferenciável em x, e como g é diferenciável em $f(p)$, $\xi^{-1} \circ g \circ \psi$ é diferenciável em y. Assim,

$$\xi^{-1} \circ (g \circ f) \circ \varphi = (\xi^{-1} \circ g \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)$$

é diferenciável no ponto x, como composta de aplicações diferenciáveis entre abertos Euclidianos logo, por definição, $g \circ f$ é diferenciável em p. Para a segunda parte, temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}g(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p) &= \mathrm{d}(g \circ \psi)(y) \circ \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \\
&= \mathrm{d}(g \circ \psi)(\psi^{-1}(f(p))) \circ \mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) \\
&= \mathrm{d}(g \circ f \circ \varphi)(x) \\
&= \mathrm{d}(g \circ f)(p),
\end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

1.5 Exercícios

1.1

1. Considere duas subvariedades Euclidianas $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ e $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ de dimensões m_1 e m_2, respectivamente. Prove que o produto cartesiano $M_1 \times M_2$ também é uma subvariedade Euclidiana de dimensão $m_1 + m_2$ de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Conclua, em particular, que o *toro* $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é uma superfície de $\mathbb{R}^4$.

2. Prove que o cilindro circular reto

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

é uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

3. Prove que o helicoide

$$\mathcal{H} = \{(x \cos y, x \sin y, y) : x, y, \in \mathbb{R}\}$$

é uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

1.2

1. Considere o *grupo linear especial*

$$\mathrm{SL}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n) : \det X = 1\},$$

onde $\mathrm{GL}(n)$ denota o *grupo linear*, i.e., o subconjunto aberto de $M(n)$ formado por todas as matrizes inversíveis. Usando a função determinante, prove que $\mathrm{SL}(n)$ é uma hipersuperfície de $M(n)$.

1.3

1. Mostre que o espaço tangente a $\mathrm{SL}(n)$, na matriz identidade, é o subespaço das matrizes de traço nulo.

2. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que o espaço tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é o gráfico da diferencial $\mathrm{d}f(p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

1.4

1. Prove que toda aplicação diferenciável $f : M \to N$, entre as subvariedades Euclidianas M e N, é contínua.

2. Se U é um aberto de uma subvariedade Euclidiana M^m, prove que a aplicação inclusão $i : U \to M$ é diferenciável.

3. Se $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, prove que a restrição de f a qualquer aberto U de M também é diferenciável.

4. Considere o produto cartesiano $M = M_1 \times M_2$ das subvariedades Euclidianas M_1 e M_2.

(a) Prove que as projeções $\pi_i : M \to M_i$ são aplicações diferenciáveis.

(b) Se N é outra subvariedade Euclidiana, prove que uma aplicação $f : N \to M$ é diferenciável se, e somente se, as aplicações coordenadas $\pi_i \circ f$ são diferenciáveis, $i = 1, 2$.

5. Prove que o gráfico de uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ é difeomorfo à subvariedade M.

6. Prove que o espaço tangente ao gráfico de uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ em um ponto $(p, f(p))$ coincide com o gráfico da diferencial $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$.

7. Sejam M, N subvariedades Euclidianas em $\mathbb{R}^n$, V um aberto de $\mathbb{R}^n$, com $M \subset V$, e $f : V \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que $f(M) \subset N$. Prove que a restrição $f|_M : M \to N$ é uma aplicação diferenciável. Conclua, em particular, que a aplicação *antipodal* $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, dada por

$$A(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, \ldots, -x_{n+1}),$$

é um difeomorfismo, onde $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ denota a esfera unitária.

1.6 Apêndice 1: O teorema da invariância do domínio

Um problema básico da topologia dos espaços Euclidianos é determinar se dois subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são ou não homeomorfos. Não existe uma resposta geral para este problema. A fim de garantir que X e Y são homeomorfos é necessário exibir um homeomorfismo entre eles. Quando se suspeita que X e Y não são homeomorfos, a ideia é estudar invariantes topológicos, como a compacidade, a conexidade e o grupo fundamental.

Exemplo 1.6.1. Considere o intervalo fechado $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e a bola fechada $Y = B[p; r] \subset \mathbb{R}^2$. Ambos são compactos e conexos. No entanto, seja qual for o ponto $q \in Y$, o conjunto $Y \setminus \{q\}$ ainda é conexo enquanto que, para qualquer ponto $a < x < b$, o conjunto $X \setminus \{x\}$ é desconexo. Assim, se existisse um homeomorfismo $f : X \to Y$, escolheríamos um ponto $x \in (a, b)$, escreveríamos $q = f(x)$ e teríamos, por restrição, um homeomorfismo $g : X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{q\}$, $g = f|_{X\setminus\{x\}}$, entre um conjunto conexo e um conjunto desconexo, o que é uma contradição.

Se tentarmos repetir esse raciocínio para provar que uma bola fechada $X = B[p; \delta] \subset \mathbb{R}^2$ não é homeomorfa a uma bola fechada $Y = B[q; \epsilon] \subset \mathbb{R}^3$ não chegaremos a lugar nenhum, pois X e Y permanecem conexos depois da retirada de qualquer um de seus pontos. É intuitivo que uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$ só é homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ quando $m = n$. Isso é verdade, e a demonstração desse fato faz uso de um importante teorema de Topologia, cuja demonstração o leitor pode encontrar em [15, Theorem 36.5].

Teorema 1.6.2 (Invariância do domínio)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação injetora e contínua, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e f é um mergulho.*

Corolário 1.6.3. Se uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$ é homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, então $m = n$.

Demonstração. Como uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, podemos supor que as bolas abertas sejam os espaços $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Suponha, por absurdo, que $m > n$, e considere o homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ entre os espaços Euclidianos. Denotando por $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o mergulho canônico

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m,$$

obtemos um mergulho $\xi = i \circ \varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^m$ associa o ponto $\xi(x) = (\varphi(x), 0) \in \mathbb{R}^m$. No entanto, a imagem de $\mathbb{R}^m$ pelo mergulho ξ não é um aberto em $\mathbb{R}^m$, contradizendo o Teorema 1.6.2. $\square$

Capítulo 2

Variedades diferenciáveis

A Geometria Diferencial é a área que estuda as chamadas variedades diferenciáveis, objetos que localmente se parecem com o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e que é possível desenvolver o cálculo. Os exemplos mais simples, além do próprio espaço Euclidiano, são as curvas parametrizadas, as superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ e, mais geralmente, as subvariedades Euclidianas.

As subvariedades Euclidianas, estudadas no Capítulo 1, ainda que possuem diversas propriedades interessantes e constituem uma classe ampla de exemplos, possuem uma certa limitação. Existem objetos importantes, de natureza semelhante a estas, mas que não se apresentam como subconjuntos de algum espaço euclidiano. Exemplos de tais conjuntos são os espaço projetivos e, mais geralmente, as variedades Grassmanianas.

Neste capítulo apresentaremos, em detalhes, a noção de variedade diferenciável e estudaremos os conceitos, vistos anteriormente para as subvariedades Euclidianas, de aplicações diferenciáveis entre estes objetos.

2.1 Variedades diferenciáveis

Nesta seção introduziremos a noção de variedade diferenciável. Assumiremos, como já vínhamos fazendo no capítulo anterior, que a classe de diferenciabilidade dos objetos, bem como para as aplicações envolvidas, será sempre de classe C^∞.

Fixemos um conjunto M. Uma *carta local* em M é simplesmente uma bijeção $\varphi : U \to \varphi(U)$, onde U é um subconjunto de M e $\varphi(U)$ é um aberto de algum espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, a qual será denotada por (U, φ).

Definição 2.1.1. Duas cartas locais (U, φ) e (V, ψ) num conjunto M são ditas *compatíveis* se $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e a *aplicação de transição* $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo.

Note que a condição de $\psi \circ \varphi^{-1}$ ser um difeomorfismo implica que $\varphi \circ \psi^{-1}$ também é um difeomorfismo. Se $U \cap V = \emptyset$, a aplicação de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é a aplicação vazia. Convencionaremos que a aplicação vazia é um difeomorfismo, logo φ e ψ também são compatíveis neste caso.

Observação 2.1.2. A noção de compatibilidade para cartas locais (U, φ) e (V, ψ) faria sentido também na situação mais geral em que $\varphi(U)$ é um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $\psi(V)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ onde, a princípio, m não precisa ser igual a n. Mas se $U \cap V \neq \emptyset$, tal compatibilidade implicaria na existência de um difeomorfismo de um aberto não-vazio de $\mathbb{R}^m$ sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$, o que implicaria $m = n$.

Definição 2.1.3. Um *atlas* $\mathcal{A}$ de dimensão n num conjunto M é uma coleção $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ de cartas locais em M, duas a duas compatíveis, onde cada $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, e tal que $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Exemplo 2.1.4. Um exemplo simples de atlas em $\mathbb{R}^n$ é dado pelo conjunto $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})\}$. Na esfera unitária $\mathbb{S}^n$, um atlas é dado pelo conjunto

$$\mathcal{A} = \{(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \varphi_N), (\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \varphi_S)\},$$

onde φ_N e φ_S denotam as projeções estereográficas relativas ao polos norte e sul, respectivamente.

Fixemos um atlas $\mathcal{A}$ num conjunto M. Uma carta local φ em M é dita *compatível* com $\mathcal{A}$ se φ é compatível com toda carta local $\psi \in \mathcal{A}$. A noção de compatibilidade é reflexiva e simétrica, mas não é transitiva. De fato, se (U, φ), (V, ψ), (W, ξ) são cartas locais em M, com φ sendo compatível com ψ, e ψ sendo compatível com ξ, então só podemos garantir que a aplicação de transição $\xi \circ \varphi^{-1}$ seja diferenciável em $\varphi(U \cap V \cap W)$. É bem possível, por exemplo, que $U \cap V = \emptyset$, $V \cap W = \emptyset$, tornando a compatibilidade entre φ, ψ e ψ, ξ triviais. No entanto, pode-se ter $U \cap W \neq \emptyset$ e φ, ξ não serem compatíveis.

O lema seguinte nos diz como lidar com essa situação.

Lema 2.1.5. Seja $\mathcal{A}$ um atlas num conjunto M. Se (U, φ) e (V, ψ) são cartas locais em M, ambas compatíveis com $\mathcal{A}$, então φ e ψ são compatíveis.

Demonstração. Supondo $U \cap V \neq \emptyset$, devemos provar que $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e que $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ é um difeomorfismo. Como $U = \bigcup_{\alpha \in I}(U \cap U_\alpha)$, segue que

$$\varphi(U \cap V) = \bigcup_{\alpha \in I} \varphi(U \cap V \cap U_\alpha).$$

Assim, basta provar que, para cada índice $\alpha \in I$, $\varphi(U \cap V \cap U_\alpha)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e que $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V \cap U_\alpha)}$ é diferenciável. De fato, como (U, φ) e (V, ψ) são cartas compatíveis com $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, segue que $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U)$ e $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é um difeomorfismo. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap V \cap U_\alpha) &= (\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(U \cap V \cap U_\alpha)) \\ &= (\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)) \end{aligned}$$

é aberto em $\mathbb{R}^n$. Finalmente,

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V \cap U_\alpha)} = (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(U \cap V \cap U_\alpha)},$$

que é diferenciável. □

Um atlas $\mathcal{A}$ num conjunto M é dito ser *maximal* se não está propriamente contido em nenhum outro atlas em M. O lema seguinte garante que todo atlas está contido num único atlas maximal.

Lema 2.1.6. Dado um atlas $\mathcal{A}$ num conjunto M, existe um único atlas maximal em M que contém $\mathcal{A}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{A}_{\max}$ o conjunto formado por todas as cartas locais de M que são compatíveis com $\mathcal{A}$. Disso decorre que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\max}$. Além disso, o Lema 2.1.5 garante que $\mathcal{A}_{\max}$ é de fato um atlas em M. Quanto à maximalidade, considere um atlas $\mathcal{B}$ em M, contendo $\mathcal{A}$. Disso decorre que todo elemento de $\mathcal{B}$ é compatível com $\mathcal{A}$, logo, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_{\max}$. Finalmente, quanto à unicidade, suponha que exista um atlas maximal $\mathcal{B}$ em M, com $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Disso decorre que todo elemento de $\mathcal{B}$ é compatível com $\mathcal{A}$, logo $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_{\max}$. Como $\mathcal{B}$ é maximal tem-se, necessariamente, que $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{\max}$. □

Lema 2.1.7. Dado um atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ num conjunto M, existe uma única topologia em M que torna cada U_α aberto em M e cada φ_α um homeomorfismo.

Demonstração. Defina

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{V \subset M : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \text{ é aberto em } \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in I\}.$$

O fato de que $\tau_{\mathcal{A}}$ é uma topologia segue das igualdades

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \emptyset) = \emptyset, \quad \varphi_\alpha(U_\alpha \cap M) = \varphi_\alpha(U_\alpha),$$

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_1 \cap V_2) = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_1) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_2),$$
$$\varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap (\cup V_\lambda)\right) = \cup \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\lambda),$$

onde $\lambda \in J$. A fim de mostrar que cada U_α é um aberto em M e cada φ_α é um homeomorfismo, basta provar a seguinte afirmação: dados $\alpha \in I$ e $V \subset U_\alpha$, tem-se que $V \in \tau_{\mathcal{A}}$ se, e somente se, $\varphi_\alpha(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. De fato, se $V \in \tau_{\mathcal{A}}$ então $\varphi_\alpha(V) = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Reciprocamente, suponha $\varphi_\alpha(V)$ aberto em $\mathbb{R}^n$. Para que $V \in \tau_{\mathcal{A}}$, devemos provar que $\varphi_\beta(U_\beta \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, para todo $\beta \in I$. No entanto, isso segue da igualdade

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(U_\beta \cap V) &= \varphi_\beta(U_\beta \cap V \cap U_\alpha) \\ &= (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(V) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)) \end{aligned}$$

e do fato que

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é um homeomorfismo ente abertos de $\mathbb{R}^n$. Quanto à unicidade, seja τ uma topologia em M que torna cada U_α aberto em M e cada φ_α um homeomorfismo. Dado $V \in \tau$, tem-se $V \cap U_\alpha \in \tau$, para todo $\alpha \in I$, logo $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Isso mostra que $V \in \tau_{\mathcal{A}}$, logo $\tau \subset \tau_{\mathcal{A}}$. Por outro lado, dado $V \in \tau_{\mathcal{A}}$, tem-se que $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, para todo $\alpha \in I$. Assim, $V \cap U_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V))$ é aberto em (M, τ), para todo $\alpha \in I$. Logo, $V = \bigcup_{\alpha \in I} V \cap U_\alpha$ é aberto em (M, τ), provando que $\tau_{\mathcal{A}} \subset \tau$. □

A topologia $\tau_{\mathcal{A}}$, dada pelo Lema 2.1.7, será chamada a *topologia induzida* pelo atlas $\mathcal{A}$ no conjunto M.

Observação 2.1.8. Se dois atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ num conjunto M são tais que a união $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ também é um atlas em M, então as topologias induzidas em M por $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ coincidem (cf. Exercício 2.1.1). Disso decorre, em particular, que a topologia induzida por um atlas $\mathcal{A}$ coincide com a topologia induzida pelo atlas maximal que o contém.

Antes de introduzirmos a definição central dessa seção, lembremos que uma topologia num conjunto M é dita *Hausdorff* se dois pontos distintos quaisquer de M pertencem a abertos disjuntos. Além disso, uma topologia *satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade* se ela possui uma base enumerável de abertos.

Definição 2.1.9. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um par $(M, \mathcal{A})$, onde M é um conjunto e $\mathcal{A}$ é um atlas maximal de dimensão n em M, de modo que a topologia induzida em M por $\mathcal{A}$ é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.

Quando nos referirmos à topologia de uma variedade diferenciável, estaremos sempre nos referindo à topologia induzida pelo seu atlas. A exigência de que o atlas seja maximal, bem como as condições impostas sobre a topologia de uma variedade diferenciável não são essenciais, no sentido de que não são necessárias ao longo de toda a teoria de variedades, mas são hipóteses padrão e necessárias em diversos teoremas centrais da teoria, como veremos ao longo do texto.

Para simplificar a notação e quando não houver perigo de confusão, escreveremos apenas M^n para denotar a variedade diferenciável $(M, \mathcal{A})$ de dimensão n. Quando dissermos que (U, φ) é uma carta local de M, significaremos que φ é um elemento do atlas maximal $\mathcal{A}$ e não apenas que φ é uma bijeção arbitrária definida num subconjunto $U \subset M$.

Exemplo 2.1.10. O conjunto unitário $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})\}$ é um atlas em $\mathbb{R}^n$. Além disso, como a aplicação identidade Id é um homeomorfismo, com domínio aberto em relação à topologia usual de $\mathbb{R}^n$, segue que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em $\mathbb{R}^n$ coincide com a topologia usual. O atlas maximal $\mathcal{A}_{\max}$ que contém $\mathcal{A}$ consiste de todos os difeomorfismos $\varphi : U \to \varphi(U)$, onde U e $\varphi(U)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1.11. Sejam $(M, \mathcal{A})$ uma variedade diferenciável e U um aberto de $(M, \tau_{\mathcal{A}})$. Para cada $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, sejam $\widetilde{U}_\alpha = U \cap U_\alpha$ e $\widetilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha|_{\widetilde{U}_\alpha}$, e considere o conjunto

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha) : (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}\}.$$

Claramente $\widetilde{\mathcal{A}}$ é um atlas em U. Denotemos por τ a topologia induzida por $\tau_{\mathcal{A}}$ em U, e por $\tau_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ a topologia induzida por $\widetilde{\mathcal{A}}$ em U. Mostremos que $\tau_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \tau$. De fato, dado $V \in \tau$, tem-se $V = U \cap W$, onde $W \in \tau_{\mathcal{A}}$. Assim,

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{U}_\alpha \cap V) = \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha \cap V) = \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha \cap W),$$

que é aberto em $\mathbb{R}^n$, logo $V \in \tau_{\widetilde{\mathcal{A}}}$. Por outro lado, dado $V \in \tau_{\widetilde{\mathcal{A}}}$, segue que $\widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{U}_\alpha \cap V) = \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha \cap V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Disso decorre que $U \cap V \in \tau_{\mathcal{A}}$. Assim, $V = U \cap (U \cap V) \in \tau$, logo $V \in \tau$. Portanto, a topologia $\tau_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, logo $(U, \widetilde{\mathcal{A}})$ também é uma variedade diferenciável.

Exemplo 2.1.12. Dado um espaço vetorial real E de dimensão n, o conjunto $\mathcal{A}$ de todos os isomorfismos lineares $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ é um atlas em E. Assim E, munido do único atlas maximal que contém $\mathcal{A}$, é uma variedade diferenciável. A topologia induzida por $\mathcal{A}$ em E é a topologia usual, induzida por qualquer norma em E.

Os espaços vetoriais reais de dimensão finita serão sempre considerados como variedades diferenciáveis, munidos do atlas maximal que contém as cartas lineares.

2.2 A topologia de uma variedade diferenciável

O lema seguinte nos dá condições para que a topologia induzida por um atlas numa variedade diferenciável coincide com uma dada topologia, previamente fixada na variedade.

Lema 2.2.1. Sejam $(M^n, \mathcal{A})$ uma variedade diferenciável e considere uma topologia τ no conjunto M. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\tau = \tau_{\mathcal{A}}$.

(b) Para toda carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$, tem-se $U_\alpha \in \tau$ e φ_α é um homeomorfismo em relação à topologia induzida em U_α por τ;

(c) Existe um atlas $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ tal que vale (b) para toda carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ segue do fato que $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é homeomorfismo segundo a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$. Para mostrar $(b) \Rightarrow (c)$, basta considerar $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Finalmente, a fim de provar que $(c) \Rightarrow (a)$, basta provar que a aplicação identidade $\mathrm{Id} : (M, \tau) \to (M, \tau_{\mathcal{A}})$ é um homeomorfismo. De fato, para todo $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ segue por hipótese que $U_\alpha \in \tau_{\mathcal{A}}$, $U_\alpha \in \tau$, $\varphi_\alpha : (U_\alpha, \tau_{\mathcal{A}}) \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ e $\varphi_\alpha : (U_\alpha, \tau) \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ são homeomorfismos. Como o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(U_\alpha, \tau) \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] & & (U_\alpha, \tau_{\mathcal{A}}) \arrow[dl, "\varphi_\alpha"] \\
& \varphi_\alpha(U_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

é comutativo, segue que $\mathrm{Id} : (U_\alpha, \tau) \to (U_\alpha, \tau_{\mathcal{A}})$ é um homeomorfismo. Além disso, como $M = \bigcup_{\alpha \in \widetilde{I}} U_\alpha$, segue que $\mathrm{Id} : (M, \tau) \to (M, \tau_{\mathcal{A}})$ é um homeomorfismo, concluindo a demonstração. $\square$

Como aplicação do Lema 2.2.1, veremos que toda subvariedade Euclidiana é, naturalmente, uma variedade diferenciável.

Exemplo 2.2.2. Seja M^m uma subvariedade Euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Para cada parametrização $\psi_\alpha : W_\alpha \to M \cap V_\alpha$ de M, denote por φ_α a inversa de ψ_α. Fazendo $U_\alpha = M \cap V_\alpha$, considere o conjunto

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \varphi_\alpha = \psi_\alpha^{-1}\}.$$

Segue do Teorema 1.4.1 que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$ é um difeomorfismo, logo $\mathcal{A}$ é um atlas de dimensão m em M. Além disso, como cada $\varphi_\alpha : U_\alpha \to W_\alpha$ é um homeomorfismo em relação à topologia induzida em M de $\mathbb{R}^n$, segue do Lema 2.2.1 que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ coincide com a topologia usual de M e, portanto, $(M, \mathcal{A})$ torna-se naturalmente uma variedade diferenciável.

A esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é, em virtude do Exemplo 2.2.2, uma variedade diferenciável de dimensão n. Mais precisamente, quando considerarmos a esfera $\mathbb{S}^n$ como variedade, o atlas maximal considerado é aquele que contém as projeções estereográficas. Por outro lado, é um fato conhecido que a esfera $\mathbb{S}^n$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$ ou seja, existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ entre a esfera $\mathbb{S}^n$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Vejamos o que ocorre se considerarmos essa bijeção φ como carta em $\mathbb{S}^n$.

Exemplo 2.2.3. Seja $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ uma bijeção entre a esfera $\mathbb{S}^n$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Por definição, φ é uma carta global em $\mathbb{S}^n$. Se $\mathcal{A}$ denota o único atlas maximal que contém φ, então $(\mathbb{S}^n, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável de dimensão 1. Observe que tal bijeção φ não é um homeomorfismo, se considerarmos $\mathbb{S}^n$ com a topologia usual, induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$. Segue então que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ da variedade $(\mathbb{S}^n, \mathcal{A})$ não coincide com a topologia usual da esfera, aquela induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 2.2.4 (Espaço projetivo real)**.** Em $M = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, definimos uma relação de equivalência $\sim$ pondo:

$$x \sim y \Leftrightarrow y = tx, \text{ para algum } t \neq 0.$$

O espaço quociente $\mathbb{R}P^n = M/{\sim}$ chama-se o *espaço projetivo real*. Provaremos que $\mathbb{R}P^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão n. Geometricamente, cada classe $[x] \in \mathbb{R}P^n$ pode ser identificada com a reta em $\mathbb{R}^{n+1}$ que passa pela origem, cuja direção é dada pelo vetor x. Provemos, inicialmente, que a topologia quociente τ em $\mathbb{R}P^n$ é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. De fato, consideremos a aplicação quociente $\pi : M \to \mathbb{R}P^n$ e fixemos um subconjunto aberto $A \subset M$. Temos:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(A)) &= \{x \in M : x \sim a, \text{ para algum } a \in A\} \\ &= \bigcup_{t \neq 0} tA, \end{aligned}$$

onde $tA = \{tx : x \in A\}$. Como cada conjunto tA é aberto em M, segue que $\pi^{-1}(\pi(A))$ é aberto. Logo, por definição de topologia quociente, $\pi(A)$ é aberto, logo π é aberta. Assim, como M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, $M/\!\sim$ também o satisfaz (cf. Exercício 1). A fim de provar que τ é Hausdorff, considere a função $f : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \sum_{i \neq j} (x_i y_j - x_j y_i)^2,$$

para quaisquer $x, y \in M$. Note que

$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_i y_j - x_j y_i = 0, \ i \neq j \\ &\Leftrightarrow \quad y_i = t x_i, \text{ para algum } t \neq 0, 1 \leq i \leq n+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \sim y. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$R = \{(x,y) \in M \times M : x \sim y\} = f^{-1}(0).$$

Como f é contínua, R é fechado em $M \times M$, logo $(\mathbb{R}P^n, \tau)$ é de Hausdorff (cf. Exercício 1). A fim de construir um atlas em $\mathbb{R}P^n$ considere, para cada $1 \leq i \leq n+1$, o aberto $\widetilde{U}_i$ em M dado por

$$\widetilde{U}_i = \{x \in M : x_i \neq 0\}.$$

Além disso, defina uma aplicação $\widetilde{\varphi}_i : \widetilde{U}_i \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$\widetilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{n+1}).$$

Observe que $\widetilde{\varphi}_i$ é contínua, pois suas funções coordenadas são contínuas; $\widetilde{\varphi}_i$ também é sobrejetora. De fato, dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, considere

$$\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n) \in \widetilde{U}_i.$$

Assim, tem-se $\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{x}) = x$. Além disso, como

$$x \sim y \Leftrightarrow \widetilde{\varphi}_i(x) = \widetilde{\varphi}_i(y),$$

segue do lema de passagem ao quociente que, para cada $1 \leq i \leq n+1$, existe uma bijeção contínua $\varphi_i : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}^n$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{U}_i \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_i"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}P^n \arrow[ur, "\varphi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Seja $U_i = \pi(\widetilde{U}_i)$. Provemos que o conjunto

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : 1 \leq i \leq n+1\}$$

é um atlas de dimensão n em $\mathbb{R}P^n$. Note que

$$\varphi_i^{-1}(x_, \ldots, x_n) = \pi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n),$$

para todo $1 \leq i \leq n+1$. Assim, dados $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$, com $i < j$, temos:

$$\begin{aligned}
(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x) &= \varphi_j(\pi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n)) \\
&= \widetilde{\varphi}_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n) \\
&= \frac{1}{x_j}(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

logo $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ é diferenciável. Finalmente, resta provar que $\tau_{\mathcal{A}} = \tau$. De fato, como $\pi^{-1}(U_i) = \widetilde{U}_i$ é aberto em M, segue que U_i é aberto em $(\mathbb{R}P^n, \tau)$. Além disso, da igualdade

$$\varphi_i^{-1}(x_, \ldots, x_n) = \pi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n),$$

segue que φ_i^{-1} é contínua. Assim, $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ é um homeomorfismo relativo à topologia τ e, em virtude do Lema 2.2.1, segue que $\tau_{\mathcal{A}} = \tau$.

Vejamos a seguir um exemplo simples de variedade, cuja topologia induzida não é Hausdorff.

Exemplo 2.2.5. Em $\mathbb{R}^2$, considere os subconjuntos

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}, \\
B &= \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}, \\
C &= \{(x,-1) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}.
\end{aligned}$$

Sejam $U_1 = A \cup B$ e $U_2 = B \cup C$, e defina as aplicações $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ e $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ pondo

$$\varphi_1(x, y) = x \quad \text{e} \quad \varphi_2(x, y) = x.$$

O conjunto $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ é um atlas em $M = A \cup B \cup C$. No entanto, a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ não é Hausdorff, pois qualquer vizinhança em torno dos pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$ têm pontos em comum.

2.3 Aplicações diferenciáveis

A relação básica entre variedades diferenciáveis é a noção de aplicação diferenciável. Este conceito, visto inicialmente entre espaços Euclidianos, se generaliza naturalmente para variedades diferenciáveis, pois estas se comportam, localmente, como se fossem subconjuntos abertos de algum espaço Euclidiano. Uma aplicação diferenciável entre variedades é definida como sendo uma aplicação, cuja representação em relação à cartas locais das duas variedades, seja diferenciável no sentido usual.

Definição 2.3.1. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação $f : M \to N$ é *diferenciável num ponto* $p \in M$ se existem cartas locais (U, φ) em M e (V, ψ) em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$, de modo que a aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ seja diferenciável no ponto $\varphi(p)$.

A composição $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é chamada a *representação* de f em relação às cartas locais (U, φ) e (V, ψ). Diremos simplesmente que f é *diferenciável* se for diferenciável em todos os pontos de M.

A definição 2.3.1 independe da escolha das cartas locais. De fato, sejam (U', φ') e (V', ψ') cartas locais em M e N, respectivamente, com $p \in U'$ e $f(U') \subset V'$. Então, no aberto $\varphi'(U' \cap U)$, temos:

$$\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1}).$$

Como φ e φ', ψ e ψ' são compatíveis e $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável, segue que $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ também é diferenciável.

Uma aplicação $f : M \to N$ é um *difeomorfismo* se f é uma bijeção diferenciável, cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é diferenciável. Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se um *difeomorfismo local* se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança aberta $U \subset M$ tal que $f(U)$ é aberto em N e a restrição $f|_U : U \to f(U)$ é um difeomorfismo.

Exemplo 2.3.2. Se U é um aberto de $\mathbb{R}^m$, então U é uma variedade diferenciável, e a aplicação identidade $\mathrm{Id} : U \to U$ é uma carta local em U. Assim, dado uma variedade diferenciável N^n, uma aplicação $f : U \to N$ é diferenciável se, e somente se, para todo $p \in U$, existem um aberto $W \subset U$, com $p \in W$, e uma carta local (V, ψ) em N, com $f(W) \subset V$, tal que $\psi \circ f|_W$ é diferenciável. Disso decorre, em particular, no caso em que $N^n = \mathbb{R}^n$, que f é diferenciável no sentido de variedades se, e somente se, é diferenciável no sentido do Cálculo.

A proposição seguinte mostra que as cartas locais de uma variedade diferenciável M^n são difeomorfismos entre abertos de M e abertos de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.3.3. Seja $(M^n, \mathcal{A})$ uma variedade diferenciável. Dados um subconjunto $U \subset M$ e um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$, uma bijeção $\varphi : U \to W$ pertence ao atlas $\mathcal{A}$ se, e somente se, U é aberto em M e φ é um difeomorfismo.

Demonstração. Se (U, φ) é uma carta local de M, então U é aberto em M. Considere as representações de φ e φ^{-1} em relação às cartas φ na variedade U e Id na variedade $W = \varphi(U)$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ W \arrow[r, "\mathrm{Id}\circ\varphi\circ\varphi^{-1}"] & W \end{tikzcd}$$

Tais representações são iguais a aplicação identidade de W, que é diferenciável. Logo, φ é um difeomorfismo. Reciprocamente, suponha que U é aberto em M e que $\varphi : U \to W$ seja um difeomorfismo. Devemos provar que φ é compatível com o atlas $\mathcal{A}$. Dado uma carta local $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, como φ e ψ são homeomorfismos entre abertos, segue que $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$. A aplicação de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável, pois é a representação da aplicação $\varphi^{-1} : W \to U$ em relação às cartas locais $\mathrm{Id} : \varphi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ e $\psi|_{U \cap V} : U \cap V \to \psi(U \cap V)$. Analogamente se prova que $\varphi \circ \psi^{-1}$ é diferenciável. $\square$

O corolário seguinte é útil quando queremos provar resultados sobre unicidade de estruturas diferenciáveis satisfazendo certas condições.

Corolário 2.3.4. Dois atlas maximais $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ num conjunto M são iguais se, e somente se, a aplicação identidade $\mathrm{Id} : (M, \mathcal{A}_1) \to (M, \mathcal{A}_2)$ é um difeomorfismo.

Demonstração. Suponha que a aplicação identidade Id seja um difeomorfismo. Assim, Id é, em particular, um homeomorfismo, logo $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ induzem a mesma topologia em M. Dado um aberto $U \subset M$, denotemos por $\mathcal{A}_1|_U$, $\mathcal{A}_2|_U$ os atlas induzidos em U por $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, respectivamente. Assim, $\mathrm{Id} : (U, \mathcal{A}_1|_U) \to (U, \mathcal{A}_2|_U)$ é um difeomorfismo. Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\varphi : U \to V$ uma bijeção. Temos, assim, um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(U, \mathcal{A}_1|_U) \arrow[rr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "1", "\varphi"'] & & (U, \mathcal{A}_2|_U) \arrow[dl, "2"', "\varphi"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

A flecha 1 no diagrama é um difeomorfismo se, e somente se, a flecha 2 o for. Segue da Proposição 2.3.3 que $\varphi \in \mathcal{A}_1$ se, e somente se, $\varphi \in \mathcal{A}_2$. $\square$

Exemplo 2.3.5. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(t) = t^3$, é um homeomorfismo, cuja inversa é $f^{-1}(t) = t^{1/3}$, que não é diferenciável em $t = 0$, logo f não é um difeomorfismo. Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ estruturas de variedades diferenciáveis em $\mathbb{R}$ determinadas pelos atlas

$$\{(\mathbb{R}, \mathrm{Id})\} \quad \text{e} \quad \{(\mathbb{R}, f)\},$$

respectivamente. Note que $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não são compatíveis, pois $(\mathrm{Id} \circ f^{-1})(t) = t^{1/3}$ não é diferenciável em $t = 0$. Assim $(\mathbb{R}, \mathcal{A}) \neq (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Por outro lado, $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ são variedades difeomorfas, pois a aplicação $\phi : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, dada por $\phi(t) = t^{1/3}$, é um difeomorfismo. De fato, a representação de ϕ é a aplicação identidade $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é um difeomorfismo.

O Exemplo 2.3.5 fornece, na verdade, um exemplo de estruturas diferenciáveis equivalentes, no sentido da definição seguinte.

Definição 2.3.6. Duas variedades diferenciáveis $(M, \mathcal{A})$ e $(M, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são atlas maximais distintos sobre M, são ditas *equivalentes* se existe um difeomorfismo entre $(M, \mathcal{A})$ e $(M, \mathcal{B})$.

Em virtude do Exercício 2.3.1, decorre que todo difeomorfismo é um homeomorfismo. Este fato reporta naturalmente à questão da unicidade da estrutura diferenciável, ou seja, sobre a recíproca do Exercício 2.3.1. Mais precisamente, o problema que se propõe é saber se duas estruturas diferenciáveis quaisquer numa variedade são sempre equivalentes. Em dimensões baixas isso é sempre verdade. O leitor interessado pode consultar [10, Problem 2.5] ou [18, Problem 9.24] para o caso 1-dimensional não-compacto:

qualquer estrutura diferenciável em $\mathbb{R}$ é difeomorfa à estrutura usual $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$, onde $\mathcal{A}$ é o único atlas maximal que contém a aplicação identidade.

Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ o resultado também é verdadeiro. De fato, segue do trabalho de Munkres [16] (cf. também [13]) que toda variedade topológica de dimensão menor ou igual a 3 admite uma estrutura diferenciável que é única a menos de difeomorfismos. Por outro lado, em $\mathbb{R}^4$ existem exemplos de estruturas diferenciáveis que não são difeomorfas à estrutura diferenciável usual $(\mathbb{R}^4, \mathcal{A})$. Tais estruturas foram apresentadas por Donaldson [5] e Freedman [6], como consequência de seus estudos em geometria e topologia das variedades compactas de dimensão 4. Na esfera $\mathbb{S}^n$, quaisquer duas estruturas diferenciáveis são difeomorfas, para $n \leq 6$. Em 1956 Milnor [12] apresentou a construção de uma estrutura diferenciável exótica em $\mathbb{S}^7$, ou seja, uma variedade diferenciável homeomorfa mas não difeomorfa à esfera $\mathbb{S}^7$.

Outro problema básico neste contexto é a questão da existência de uma estrutura diferenciável. Mais precisamente, dado um espaço topológico M, munido de um atlas maximal $\mathcal{A}$ de classe C^0, o problema que se propõe é saber se sempre existe um atlas diferenciável $\mathcal{B}$, com $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. De forma independente, Smale e Kervaire [9] exibiram exemplos de espaços topológicos que não admitem estrutura de variedade diferenciável.

2.4 A diferencial de uma aplicação diferenciável

A noção de espaço tangente a uma variedade diferenciável M num ponto p motiva-se pela questão de como definir a diferencial de uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ entre duas variedades M e N. A ideia natural é definir a diferencial de f em $p \in M$ como sendo a diferencial no ponto $\varphi(p)$ da representação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de f em relação às cartas locais φ e ψ. Ocorre que esta representação depende da escolha das cartas φ e ψ, e não apenas de f. O problema inicial então é encontrar o objeto correto que deve ser a diferencial de f no ponto $p \in M$.

Intuitivamente, queremos que a diferencial num ponto $p \in M$ de uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ seja uma aplicação linear definida num espaço vetorial associado a M e ao ponto p, e tomando valores num espaço vetorial associado a N e ao ponto $f(p)$. O espaço vetorial associado a M e a p deve ter um papel análogo ao papel do espaço tangente a uma subvariedade Euclidiana M em $\mathbb{R}^n$.

Lembremos que o espaço tangente T_pM a uma subvariedade Euclidiana M em $\mathbb{R}^n$, num certo ponto $p \in M$, é o conjunto de todos os vetores $v \in \mathbb{R}^n$ da forma $v = \lambda'(0)$, onde $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma curva diferenciável em

$t = 0$, com $\lambda(0) = p$. Quando M é uma variedade diferenciável, os vetores tangentes deverão ser definidos de outra forma, visto que M não está contida, necessariamente, em algum espaço Euclidiano. Veremos a seguir uma das maneiras de se definir o espaço tangente.

Dado uma variedade diferenciável M^n e fixado um ponto $p \in M$, denotemos por C_p o conjunto de todas as curvas diferenciáveis $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, com $\lambda(0) = p$. Dizemos que duas curvas $\lambda, \mu \in C_p$ são *equivalentes*, e escreveremos $\lambda \sim \mu$, se existe uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, tal que

$$(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0). \tag{2.1}$$

Note que, como λ e μ são contínuas e $U \subset M$ é aberto, temos que as compostas $\varphi \circ \lambda$ e $\varphi \circ \mu$ estão definidas numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}$.

Observação 2.4.1. A definição dada em (2.1) independe da escolha da carta. De fato, se (V, ψ) é outra carta local em M, com $p \in V$, segue da regra da cadeia que:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \lambda)'(0) &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\ &= \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \lambda)'(0) \\ &= \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \mu)'(0) \\ &= (\psi \circ \mu)'(0). \end{aligned}$$

Além disso, fica a cargo do leitor verificar que a relação definida em (2.1) é uma relação de equivalência em C_p.

Definição 2.4.2. O *espaço tangente* à variedade diferenciável M no ponto p é definido como o classe de equivalência $C_p/\sim$, e será denotado por T_pM.

Devemos verificar agora que T_pM possuiu as propriedades que se espera para um espaço tangente. Dados um ponto $p \in M$ e uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, definimos uma aplicação $\overline{\varphi} : T_pM \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$\overline{\varphi}([\lambda]) = (\varphi \circ \lambda)'(0), \tag{2.2}$$

para toda classe $[\lambda] \in T_pM$. Segue da Observação 2.4.1 que $\overline{\varphi}$ está bem definida. Afirmamos que $\overline{\varphi}$ é bijetora. De fato, dados $[\lambda], [\mu] \in T_pM$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}([\lambda]) = \overline{\varphi}([\mu]) &\Leftrightarrow (\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0) \\ &\Leftrightarrow \lambda \sim \mu \\ &\Leftrightarrow [\lambda] = [\mu], \end{aligned}$$

ou seja, $\overline{\varphi}$ é injetora. Além disso, dado $v \in \mathbb{R}^n$, considere a curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \varphi(U)$ definida por $\alpha(t) = \varphi(p) + tv$. Pondo $\lambda = \varphi^{-1} \circ \alpha$, temos:

$$\overline{\varphi}([\lambda]) = (\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0) = v,$$

ou seja, $\overline{\varphi}$ é sobrejetora. Assim, sendo $\overline{\varphi}$ uma bijeção, existe uma única estrutura de espaço vetorial em T_pM que torna $\overline{\varphi}$ um isomorfismo linear. Mais precisamente, definimos:

$$\begin{aligned} [\lambda] + [\mu] &= \overline{\varphi}^{-1}\left(\overline{\varphi}([\lambda]) + \overline{\varphi}([\mu])\right), \\ c \cdot [\lambda] &= \overline{\varphi}^{-1}\left(c \cdot \overline{\varphi}([\lambda])\right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

para quaisquer $[\lambda], [\mu] \in T_pM$ e $c \in \mathbb{R}$.

Veremos na seção seguinte que o isomorfismo linear $\overline{\varphi} : T_pM \to \mathbb{R}^n$, definido em (2.2), será identificado com a diferencial de uma carta local em M na vizinhança do ponto p.

Observação 2.4.3. A estrutura de espaço vetorial induzida em T_pM, por (2.3), independe da escolha da carta local. De fato, se (V, ψ) é outra carta local de M, com $p \in V$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}([\lambda]) &= (\psi \circ \lambda)'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\ &= \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \overline{\varphi}([\lambda]), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{\psi} = T \circ \overline{\varphi},$$

onde T é o isomorfismo linear dado por $T = \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$. Portanto

$$\begin{aligned} \overline{\psi}^{-1}(\overline{\psi}([\lambda]) + \overline{\psi}([\mu])) &= (\overline{\varphi}^{-1} \circ T^{-1})(T \circ \overline{\varphi}([\lambda]) + T \circ \overline{\varphi}([\mu])) \\ &= \overline{\varphi}^{-1}(\overline{\varphi}([\lambda]) + \overline{\varphi}([\mu])). \end{aligned}$$

De forma análoga podemos mostrar que

$$\overline{\psi}^{-1}(c \cdot \overline{\psi}([\lambda])) = \overline{\varphi}^{-1}(c \cdot \overline{\varphi}([\lambda])),$$

para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Portanto, quaisquer duas cartas locais em M induzem a mesma estrutura de espaço vetorial em T_pM.

Dados uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ e um ponto $p \in M$, definiremos uma aplicação entre os espaços tangentes T_pM e $T_{f(p)}N$, denotada por $\mathrm{d}f(p)$, pondo

$$\mathrm{d}f(p) \cdot [\lambda] = [f \circ \lambda], \tag{2.4}$$

para todo $[\lambda] \in T_pM$. A aplicação $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$, assim definida, é chamada a *diferencial* de f no ponto p. Devemos verificar que $\mathrm{d}f(p)$ está bem definida e é linear. De fato, considere cartas locais (U, φ) em M e (V, ψ) em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$. Dado $[\lambda] \in T_pM$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}([f \circ \lambda]) &= (\psi \circ f \circ \lambda)'(0) \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\ &= \mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \overline{\varphi}([\lambda]), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathrm{d}f(p) \cdot [\lambda] = \overline{\psi}^{-1} \left(\mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \overline{\varphi}([\lambda]) \right). \tag{2.5}$$

A igualdade em (2.5) mostra que a classe $[f \circ \lambda] \in T_{f(p)}N$ depende apenas da classe $[\lambda]$, logo (2.4) está bem definido. Além disso, segue de (2.5) que o diagrama

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "\mathrm{d}f(p)"] \arrow[d, "\overline{\varphi}"'] & T_{f(p)}N \arrow[d, "\overline{\psi}"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

é comutativo, implicando que $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ é linear.

Dado uma carta local (U, φ) em M^n, com $p \in U$, denotemos por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\}$$

a base de T_pM induzida pelo isomorfismo $\overline{\varphi} : T_pM \to \mathbb{R}^n$. Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \overline{\varphi}^{-1}(e_i),$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = [\lambda_i],$$

onde $\lambda_i = \varphi^{-1} \circ \alpha_i$ e $\alpha_i : I \to \varphi(U)$ é uma curva diferenciável tal que $\alpha_i(0) = \varphi(p)$ e $\alpha_i'(0) = e_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Proposição 2.4.4. Dados uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ e um ponto $p \in M$, considere cartas locais (U, φ) em M e (V, ψ) em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$. Então, a matriz da diferencial $\mathrm{d}f(p)$, em relação às bases

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}(f(p)), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}(f(p)) \right\} \tag{2.7}$$

determinadas por φ e ψ, respectivamente, é a matriz jacobiana de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ no ponto $\varphi(p)$.

Demonstração. Denote por (a_{ij}) a matriz da diferencial $\mathrm{d}f(p)$ em relação às bases em (2.7). Da comutatividade do diagrama (2.6), temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}(f(p)) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}f(p) \cdot \overline{\varphi}^{-1}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{\psi}^{-1}(e_j) \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{\psi}\left(\mathrm{d}f(p) \cdot \overline{\varphi}^{-1}(e_i)\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq m$, e isso finaliza a demonstração. $\square$

Teorema 2.4.5 (Regra da cadeia)**.** *Sejam M, N, P variedades diferenciáveis e $f : M \to N$, $g : N \to P$ aplicações diferenciáveis. Então, a composta $g \circ f$ também é diferenciável e, para todo $p \in M$, tem-se:*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(p) = \mathrm{d}g(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p). \tag{2.8}$$

Demonstração. A primeira afirmação é o conteúdo do Exercício 2.3.2. Para provar a igualdade (2.8), considere um vetor $[\lambda] \in T_pM$. Temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g \circ f)(p) \cdot [\lambda] &= [g \circ f \circ \lambda] \\ &= [g \circ (f \circ \lambda)] \\ &= \mathrm{d}g(f(p)) \cdot [f \circ \lambda] \\ &= \mathrm{d}g(f(p)) \cdot \mathrm{d}f(p) \cdot [\lambda]. \end{aligned}$$

Como $[\lambda]$ é arbitrário, a demonstração está concluída. $\square$

Corolário 2.4.6. Se $f : M \to N$ é um difeomorfismo então, para todo $p \in M$, a diferencial $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ é um isomorfismo linear e

$$\mathrm{d}f(p)^{-1} = \mathrm{d}(f^{-1})(f(p)).$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 2.4.5 à igualdade $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$ no ponto $p \in M$ e à igualdade $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ no ponto $f(p) \in N$. $\square$

Observação 2.4.7. Um espaço vetorial n-dimensional V é, em virtude do Exemplo 2.1.12, uma variedade diferenciável, e qualquer isomorfismo linear $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ é uma carta em V. Dado um vetor $p \in V$, afirmamos que o isomorfismo $\varphi^{-1} \circ \overline{\varphi} : T_pV \to V$ não depende de φ. De fato, dados outro isomorfismo $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ e um vetor $[\lambda] \in T_pV$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}([\lambda]) &= (\psi \circ \lambda)'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\ &= \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \overline{\varphi}([\lambda]). \end{aligned}$$

Como $\psi \circ \varphi^{-1}$ é linear, tem-se $\mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \psi \circ \varphi^{-1}$. Isso implica que $\overline{\psi} = \psi \circ \varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}$, mostrando que $\psi^{-1} \circ \overline{\psi} = \varphi^{-1} \circ \overline{\varphi}$. Essa observação permite-nos realizar a seguinte convenção: se V é um espaço vetorial n-dimensional então, para qualquer vetor $p \in V$, identificaremos o espaço tangente T_pV com o próprio espaço vetorial V através do isomorfismo

$$\varphi^{-1} \circ \overline{\varphi} : T_pV \to V,$$

onde $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo arbitrário. No caso particular em que $V = \mathbb{R}^n$, identificamos $T_p\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n$, para qualquer $p \in \mathbb{R}^n$, através do isomorfismo $\overline{\mathrm{Id}} : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ induzido pela carta $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id})$ em $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.4.8. Se W é um aberto de uma variedade diferenciável M^n então, para todo ponto $p \in W$, a diferencial da aplicação inclusão $i : W \to M$ é um isomorfismo linear de T_pW sobre T_pM.

Demonstração. Seja (U, φ) uma carta local em W. Como W é aberto em M, (U, φ) é também uma carta em M. A representação de i em relação às cartas φ e φ é a aplicação identidade do aberto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$. Logo, $\mathrm{d}(\varphi \circ i \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$. Sejam $\overline{\varphi}^W$, $\overline{\varphi}^M$ os isomorfismos induzidos pela carta φ nas variedades W e M, respectivamente. Assim,

$$\mathrm{d}i(p) = (\overline{\varphi}^M)^{-1} \circ \mathrm{Id} \circ \overline{\varphi}^W = (\overline{\varphi}^M)^{-1} \circ \overline{\varphi}^W.$$

Como $\overline{\varphi}^W$ e $\overline{\varphi}^M$ são isomorfismos, segue que $\mathrm{d}i(p)$ também é um isomorfismo,

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \varphi(U) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_pW \arrow[r, "\mathrm{d}i(p)"] \arrow[d, "\overline{\varphi}^W"'] & T_{i(p)}M \arrow[d, "\overline{\varphi}^M"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

e isso finaliza a demonstração. $\square$

Observação 2.4.9. O Lema 2.4.8 permite-nos adotar a seguinte convenção: se W é um aberto de uma variedade diferenciável M, identificamos o espaço tangente T_pW com o espaço tangente T_pM, através do isomorfismo linear $\mathrm{d}i(p) : T_pW \to T_{i(p)}M$.

Em virtude da identificação acima, temos também o seguinte resultado sobre a diferencial da restrição de uma aplicação a um aberto.

Lema 2.4.10. Sejam M, N variedades diferenciáveis, $M_1 \subset M$ e $N_1 \subset N$ subconjuntos abertos e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável tal que $f(M_1) \subset N_1$. Se $f_1 : M_1 \to N_1$ denota a restrição de f a M_1, então $\mathrm{d}f_1(p) = \mathrm{d}f(p)$, para todo $p \in M_1$.

Demonstração. Denotando por $i : M_1 \to M$ e $j : N_1 \to N$ as aplicações de inclusão, temos que $j \circ f_1 = f \circ i$. A conclusão segue então da regra da cadeia, observando que, em virtude da identificação acima, $\mathrm{d}i(p)$ é a aplicação identidade de T_pM e $\mathrm{d}j(f(p))$ é a aplicação identidade de $T_{f(p)}N$. $\square$

Lema 2.4.11. Se (U, φ) é uma carta local em uma variedade diferenciável M^n então, para todo ponto $p \in U$, a diferencial $\mathrm{d}\varphi(p)$ coincide com o isomorfismo induzido $\overline{\varphi}_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$ definido em (2.2).

Demonstração. Para calcular a diferencial $\mathrm{d}\varphi(p)$ podemos, em virtude do Lema 2.4.10, considerar φ como uma aplicação com contradomínio $\mathbb{R}^n$, em vez de $\varphi(U)$. Em relação às cartas φ em U e Id em $\mathbb{R}^n$, a representação da aplicação φ é a aplicação de inclusão i do aberto $\varphi(U)$ em $\mathbb{R}^n$. Assim, $\mathrm{d}i(\varphi(p))$ é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "i"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_pU \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi(p)"] \arrow[d, "\overline{\varphi}^U"'] & T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \arrow[d, "\overline{\mathrm{Id}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

A diferencial de φ no ponto p é dada então por

$$\mathrm{d}\varphi(p) = \overline{\mathrm{Id}}^{-1} \circ \mathrm{Id} \circ \overline{\varphi}^U = \overline{\mathrm{Id}} \circ \overline{\varphi}^U.$$

Como identificamos $T_pU = T_pM$ e $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, então $\overline{\varphi}^U = \overline{\varphi}$ e $\overline{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$, logo $\mathrm{d}\varphi(p) = \overline{\varphi}_p$. $\square$

A partir de agora omitiremos a notação $\overline{\varphi}$ para o isomorfismo induzido pela carta φ. Em virtude do Lema 2.4.11, usaremos $\mathrm{d}\varphi(p)$ em vez de $\overline{\varphi}_p$.

Teorema 2.4.12 (Aplicação inversa)**.** *Sejam $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável e $p \in M$ um ponto tal que $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ seja um isomorfismo. Então, existe um aberto $W \subset M$, com $p \in W$, tal que $f(W)$ é aberto em N e $f|_W : W \to f(W)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Sejam (U, φ), (V, ψ) cartas locais em M e N, respectivamente, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$. A representação $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de f é diferenciável e, em virtude da regra da cadeia, temos:

$$\mathrm{d}\widetilde{f}(\varphi(p)) = \mathrm{d}\psi(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p) \circ \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}.$$

Como $\mathrm{d}\psi(f(p))$ e $\mathrm{d}\varphi(p)$ são isomorfismos, segue que $\mathrm{d}\widetilde{f}(\varphi(p))$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Assim, pelo teorema da aplicação inversa em espaços Euclidianos, existe um aberto $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^m$, com $\varphi(p) \in \widetilde{W} \subset \varphi(U)$, tal que $\widetilde{f}(\widetilde{W}) \subset \psi(V)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\widetilde{f}|_{\widetilde{W}} : \widetilde{W} \to \widetilde{f}(\widetilde{W})$ é um difeomorfismo. Tome $W = \varphi^{-1}(\widetilde{W})$. Segue então que W é aberto em M, $p \in W$, $f(W) = \psi^{-1}\left(\widetilde{f}(\widetilde{W})\right)$ é aberto em N e $f|_W : W \to f(W)$ é um difeomorfismo, pois

$$f|_W = \left(\psi^{-1}|_{\widetilde{f}(\widetilde{W})}\right) \circ \left(\widetilde{f}|_{\widetilde{W}}\right) \circ (\varphi|_W)$$

é uma composição de difeomorfismos. □

Como consequência direta do Teorema 2.4.12, temos o seguinte

Corolário 2.4.13. Se $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável tal que $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ é um isomorfismo linear, para todo $p \in M$, então f é um difeomorfismo local. Em particular, se f é injetora, então f é um difeomorfismo sobre $f(M)$, que é um aberto de N.

Corolário 2.4.14. Para qualquer aplicação diferenciável $f : M \to N$, o conjunto $\mathcal{C}$ dos pontos $p \in M$, para os quais $\mathrm{d}f(p)$ é um isomorfismo linear, é aberto em M.

Demonstração. Fixe um ponto arbitrário $p \in \mathcal{C}$. Se W é uma vizinhança aberta em torno de p, dada pelo Teorema 2.4.12, então $\mathrm{d}f(q)$ é um isomorfismo linear, para todo $q \in W$. Disso decorre, em particular, que $W \subset \mathcal{C}$, provando que $\mathcal{C}$ é aberto. □

2.5 Exercícios

2.1

1. Considere dois atlas $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ num conjunto M.

(a) Prove que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ é um atlas em M se, e somente se, todo elemento $\varphi \in \mathcal{A}_1$ é compatível com $\mathcal{A}_2$.

(b) Prove que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ é um atlas em M se, e somente se, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ estão contidos no mesmo atlas maximal em M.

(c) Se $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ é um atlas em M, prove que as topologias induzidas em M por $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ coincidem.

2. Dado um atlas maximal $\mathcal{A}$ de dimensão n num conjunto M, fixe um elemento $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Se W é um aberto de $\mathbb{R}^n$, com $W \subset \varphi(U)$, e se $V = \varphi^{-1}(W)$, prove que a restrição $\varphi|_V : V \to W$ também pertence a $\mathcal{A}$.

3. Seja $M = \mathbb{R}$ e considere o atlas maximal $\mathcal{A}$ em M que contém a carta global $\varphi : M \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = x^3$. Prove que:

(a) A topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M coincide com a topologia usual de $\mathbb{R}$. Em particular, essa topologia é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, logo $(M, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável.

(b) A estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ em M é diferente da estrutura diferenciável usual em $\mathbb{R}$.

2.2

1 (Topologia quociente)**.** Dados um espaço topológixo X e uma relação de equivalência $\sim$ em X, denotemos por $X/\!\sim$ o espaço quociente. Assim, os elementos de $X/\!\sim$ são as classes de equivalências

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}.$$

A *topologia quociente* em $X/\!\sim$ é a topologia τ que torna a aplicação quociente $\pi : X \to X/\!\sim$ contínua. Mais precisamente, um subconjunto $U \subset X/\!\sim$ é aberto se $\pi^{-1}(U)$ é aberto em X. Uma relação de equivalência $\sim$ em X é dita ser *aberta* se, para todo aberto $A \subset X$, o subconjunto $[A]$ é aberto em $X/\!\sim$, onde $[A] = \bigcup_{a \in A} [a]$.

(a) Prove que uma relação de equivalência $\sim$ em X é aberta se, e somente se, π é uma aplicação aberta. Quando $\sim$ é aberta e X tem uma base enumerável de abertos, então $X/\sim$ também tem base enumerável.

(b) Seja $\sim$ uma relação de equivalência aberta em X. Então, o conjunto

$$R = \{(x, y) \in X \times X : x \sim y\}$$

é um subconjunto fechado de $X \times X$ se, e somente se, $X/\sim$ é Hausdorff.

2. Mostre que o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ é compacto.

2.3

1. Prove que toda aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ é contínua.

2. Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ são aplicações diferenciáveis, prove que a composta $g \circ f : M \to N$ também é diferenciável.

3. Sejam M^m, N^n variedades diferenciáveis. Mostre que se existe um difeomorfismo local $f : M^m \to N^n$, então $m = n$.

4. Sejam M, N variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma aplicação arbitrária. Mostre que f é diferenciável se, e somente se, $g \circ f : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável, para toda função diferenciável $g : N \to \mathbb{R}$.

5. Considere duas variedades diferenciáveis M e N, e seja $f : M \to N$ uma aplicação. Prove que:

(a) Se V é um aberto em N tal que $f(M) \subset V$, então $f : M \to N$ é diferenciável se, e somente se, $f : M \to V$ é diferenciável.

(b) A aplicação identidade $\mathrm{Id} : M \to M$ é diferenciável. Mais geralmente, se U é um aberto de M então a aplicação inclusão $i : U \to M$ é diferenciável.

(c) Se $f : M \to N$ é diferenciável então, para todo aberto $U \subset M$, a restrição $f|_U : U \to N$ é diferenciável.

6. Dados duas variedades diferenciáveis M_1 e M_2, seja $M = M_1 \times M_2$ seu produto cartesiano. Prove que existe um único atlas maximal $\mathcal{A}$ em M tal que $(M, \mathcal{A})$ é uma variedade diferenciável com as seguintes propriedades:

(a) As projeções $\pi_i : M \to M_i$ são aplicações diferenciáveis, $i = 1, 2$.

(b) Se N é uma variedade diferenciável, então uma aplicação $f : N \to M$ é diferenciável se, e somente se, as coordenadas $\pi_i \circ f : N \to M_i$ são diferenciáveis, $i = 1, 2$.

(c) A topologia induzida em M por $\mathcal{A}$ coincide com a topologia produto.

(d) $\dim(M) = \dim(M_1) + \dim(M_2)$.

7. Seja M^n uma variedade diferenciável compacta. Prove que não existe um difeomorfismo local $f : M^n \to \mathbb{R}^n$.

8. Considere dois conjuntos M e N, uma aplicação bijetora $f : M \to N$ e $\mathcal{B}$ um atlas maximal em N. Prove que existe um único atlas maximal $\mathcal{A}$ em M tal que $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ seja um difeomorfismo.

9. Sejam M, N espaços topológicos e $\pi : M \to N$ uma aplicação. Lembremos que π é dita ser uma *aplicação de recobrimento* se para todo $q \in N$ existe uma vizinhança aberta V de q em N e uma família $\{U_i : i \in I\}$ de abertos dois a dois disjuntos em M tal que

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

e tal que $\pi|_{U_i} : U_i \to V$ é um homeomorfismo, para todo $i \in I$. Disso decorre que toda aplicação de recobrimento π é um homeomorfismo local; em particular, π é contínua e aberta.

(a) Seja $\pi : M \to N$ um aplicação de recobrimento, onde N é uma variedade diferenciável. Prove que existe uma estrutura de variedade diferenciável em M tal que a projeção π é uma aplicação de recobrimento diferenciável.

(b) Prove que toda aplicação de recobrimento diferenciável $\pi : M \to N$ é um difeomorfismo local. Além disso, se π é injetora, então π é um difeomorfismo.

10. Dado uma variedade diferenciável $(M^n, \mathcal{A})$, considere um homeomorfismo $\phi : M \to M$ que não seja um difeomorfismo, e defina

$$\mathcal{B} = \{\varphi \circ \phi : \varphi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n : \ (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}.$$

Prove que $\mathcal{B}$ é um atlas maximal em M, distinto de $\mathcal{A}$, e $\phi : (M, \mathcal{B}) \to (M, \mathcal{A})$ é um difeomorfismo.

2.4

1. Dado uma variedade diferenciável M, prove que a diferencial da identidade $\mathrm{Id} : M \to M$, em qualquer ponto $p \in M$, é a aplicação identidade em T_pM.

2. Se $f : M \to N$ é uma aplicação constante, prove que f é diferenciável e que $\mathrm{d}f(p) = 0$, para todo $p \in M$.

3. Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Se M é conexa e $\mathrm{d}f(p) = 0$, para todo $p \in M$, prove que f é constante.

4. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Prove que se $p \in M$ é um ponto de máximo ou de mínimo local de f, então p é um ponto crítico de f.

5. Se M é uma variedade diferenciável compacta, prove que toda função $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciável tem, pelo menos, dois pontos críticos.

6. Se M^n é uma variedade diferenciável compacta, prove que toda aplicação diferenciável $f : M \to \mathbb{R}^n$ tem, pelo menos, um ponto crítico, i.e., existe pelo menos um ponto $p \in M$ tal que $\mathrm{d}f(p)$ não é sobrejetora.

7. Dados duas variedades diferenciáveis M_1 e M_2, seja $M = M_1 \times M_2$ seu produto cartesiano munido da estrutura diferenciável produto.

(a) Mostre que, para todo $p = (p_1, p_2) \in M$, a aplicação

$$v \in T_pM \mapsto \big(\mathrm{d}\pi_1(p) \cdot v, \mathrm{d}\pi_2(p) \cdot v\big) \in T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$$

é um isomorfismo linear entre T_pM e a soma direta $T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$.

(b) Dados uma variedade diferenciável N e uma aplicação diferenciável $f : N \to M$, com $f = (f_1, f_2)$, mostre que

$$\mathrm{d}f(x) \cdot v = \big(\mathrm{d}f_1(x) \cdot v, \mathrm{d}f_2(x) \cdot v\big),$$

para quaisquer $x \in N$ e $v \in T_xN$.

(c) Fixado um ponto $p = (p_1, p_2) \in M$, defina uma aplicação $i_1 : M_1 \to M$ pondo $i_1(x_1) = (x_1, p_2)$, para todo $x_1 \in M_1$. Mostre que i_1 é uma aplicação diferenciável e sua diferencial no ponto $x_1 \in M_1$ é a inclusão de $T_{x_1}M_1$ na soma direta $T_{x_1}M_1 \oplus T_{x_2}M_2$, ou seja,

$$\mathrm{d}i_1(x_1) \cdot v_1 = (v_1, 0),$$

para todo $v_1 \in T_{x_1}M_1$. De forma análoga podemos definir uma aplicação $i_2 : M_2 \to M$ pondo $i_2(x_2) = (p_1, x_2)$, para todo $x_2 \in M_2$.

Capítulo 3

Subvariedades

Em analogia às funções reais de uma variável real, onde a reta tangente fornece a melhor aproximação linear para a função numa vizinhança do ponto, é natural esperar que a diferencial de uma aplicação diferenciável entre variedades também forneça a melhor aproximação linear para a aplicação numa vizinhança do ponto em questão. A propriedade fundamental da diferencial, como veremos, é o seu posto, e várias propriedades geométricas podem ser obtidas a partir do estudo da diferencial.

As aplicações diferenciáveis para as quais a diferencial traduz propriedades interessantes são aquelas de posto constante. Essencialmente, existem três classes de tais aplicações: as imersões, as submersões e os mergulhos. As imersões são os objetos essenciais na teoria de subvariedades, enquanto que as submersões desempenham papel fundamental em certos modelos de geometria e topologia.

O objetivo deste capítulo é o estudo de algumas propriedades de certas variedades diferenciáveis que surgem naturalmente como subconjuntos de outras variedades, as chamadas subvariedades. Intuitivamente, uma subvariedade tem a mesma natureza de uma subvariedade Euclidiana em relação ao seu ambiente Euclidiano. O ponto de partida é a discussão de alguns teoremas clássicos, conhecidos como formas locais das imersões e submersões, que serão fundamentais neste primeiro estudo das subvariedades.

O estudo de subvariedades é um universo vasto, que pode convergir para várias direções e culminar para certos tópicos de pesquisa como as imersões isométricas, por exemplo, onde as variedades em questão admitem algumas estruturas adicionais. O que faremos aqui é um primeiro estudo sobre subvariedades. O leitor interessado em se aprofundar mais sobre o assunto pode consultar, por exemplo, o excelente livro do J. Lee [10].

3.1 Aplicações de posto constante

O posto de uma aplicação linear, entre espaços vetoriais de dimensão finita, é definido como a dimensão de sua imagem. O teorema clássico da Álgebra Linear, conhecido como *forma canônica de uma aplicação linear*, estabelece que, a menos da escolha das bases, uma aplicação linear é completamente determinada pelo seu posto e as dimensões do seu domínio e contradomínio. Ou seja, toda aplicação linear pode ser prepresentada, matricialmente, numa forma diagonal através de escolhas apropriadas de bases para o domínio e o contradomínio.

Considere agora duas variedades diferenciáveis M^m e N^n. Dados uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ e um ponto $p \in M$, definimos o *posto* de f em p, denotado por $\text{rank} f(p)$, como sendo o posto da diferencial $\mathrm{d}f(p)$, i.e., a dimensão da imagem da aplicação linear $\mathrm{d}f(p)$. Disso decorre que o posto de f não pode ser maior do que m nem maior do que n. Quando f tem o mesmo posto em todos os pontos, diremos que f é uma *aplicação de posto constante*. Nas seções seguintes veremos exemplos de aplicações diferenciáveis de posto máximo.

Se $f : M^m \to N^n$ é uma aplicação diferenciável, então o posto de f é uma função semicontínua inferiormente. Ou seja, se f tem posto r num ponto $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M tal que o posto de f é maior ou igual a r em U. De fato, existe uma submatriz $r \times r$ da matriz $\mathrm{d}f(p)$, cujo determinante é diferente de 0. Por continuidade, este mesmo determinante é não-nulo em todos os pontos de uma vizinhança U de p. Nestes pontos, o posto de f é, portanto, pelo menos igual a r.

O resultado seguinte é a versão para variedades do clássico teorema do posto para aplicações entre espaços Euclidianos.

Teorema 3.1.1 (Teorema do posto)**.** *Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável que tenha posto igual a $r \leq \min\{m, n\}$ em todos os pontos de M. Então, dado um ponto $p \in M$, existem cartas locais (U, φ) em M e (V, ψ) em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$, tais que*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x_r, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r},$$

para todo $x = (x_r, x_{m-r}) \in \varphi(U)$.

Demonstração. Sejam (U_1, φ_1), (V_1, ψ_1) cartas locais em M e N, respectivamente, com $p \in U_1$ e $f(U_1) \subset V_1$. Disso decorre que a representação $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ de f tem posto r em todos os pontos do aberto $\varphi_1(U_1)$. Pelo teorema do posto em espaços Euclidianos, existem abertos $W, W' \subset \mathbb{R}^m$, $Z, Z' \subset \mathbb{R}^n$ e difeomorfismos $\alpha : W \to W'$, $\beta : Z \to Z'$, com $\varphi_1(p) \in W \subset \varphi_1(U_1)$ e $(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})(W) \subset Z$, tais que

$$\left(\beta \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \alpha^{-1}\right)(x) = (x_r, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r},$$

para todo $x \in W'$. Para completar a prova, basta tomar $U = \varphi_1^{-1}(W)$, $\varphi = \alpha \circ \varphi_1|_U$, $V = \psi_1^{-1}(\psi_1(V_1) \cap Z)$, $\psi = \beta \circ \psi_1|_V$ e observar que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = \left(\beta \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \alpha^{-1}\right)(x),$$

para todo $x \in W' = \varphi(U)$. $\square$

Proposição 3.1.2. Dado uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$, para cada $r = 0, 1, \ldots, s$, com $s = \min\{m, n\}$, denotemos por A_r o interior do subconjunto de M no qual f tem posto igual a r. Então, o conjunto

$$A = A_0 \cup \ldots \cup A_s$$

é aberto e denso em M.

Demonstração. Dado um aberto $V \subset M$, denotemos por s o valor máximo do posto de f em V. Como

$$p \mapsto \mathrm{rank} f(p)$$

é uma função semicontínua inferiormente, se $p \in V$ é tal que $\mathrm{rank} f(p) = s$, então existe um aberto $U \subset V$ contendo p tal que $\mathrm{rank} f(q) = s$, para todo $q \in U$. Assim, $U \subset V \cap A_s \subset V \cap A$, logo A é denso em M. $\square$

3.2 Imersões

Uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ é dita ser uma *imersão no ponto* $p \in M$ se a diferencial $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}M$ é uma aplicação linear injetora. Neste caso, deve-se ter $m \leq n$. Se f for uma imersão em todos os pontos de M, diremos simplesmente que f é uma *imersão*.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.2.1. Um exemplo simples de imersão é a aplicação inclusão $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(p) = (p, 0),$$

para todo $p \in \mathbb{R}^m$. Como f é linear, f é diferenciável e tem-se $\mathrm{d}f(p) = f$, para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e, sendo f injetora, segue que f é uma imersão.

Exemplo 3.2.2. Um exemplo de imersão que não é injetora é a curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t^3 - t, t^2),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Tem-se $\alpha'(t) \neq (0,0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e $\alpha(1) = \alpha(-1)$. Um exemplo de uma aplicação diferenciável, injetora, que não é imersão é a *ciclóide* $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\beta(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Observe que $\beta'(t) = (0,0)$, para todo $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

O teorema seguinte mostra que toda imersão pode ser descrita, localmente, como a inclusão do Exemplo 3.2.1.

Teorema 3.2.3 (Forma local das imersões)**.** *Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável que é uma imersão num ponto $p \in M$. Então, existem uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, e um difeomorfismo $\xi : V \to \varphi(U) \times W$, onde $V \subset N$ é um aberto contendo $f(U)$ e $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ é um aberto contendo $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, tais que*

$$(\xi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m},$$

para todo $x \in \varphi(U)$.

Demonstração. Sejam (U, φ), (V, ψ) cartas locais em M e N, respectivamente, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$. Como $\mathrm{d}f(p)$ é injetora, segue da Proposição 2.4.4 que $\mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ também é injetora. Pela forma local das imersões em espaços Euclidianos, restringindo os domínios, se necessário, existe um difeomorfismo $\eta : \psi(V) \to \varphi(U) \times W$, onde $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ é um aberto contendo $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, tal que

$$\eta \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \to \varphi(U) \times W$$

é a aplicação de inclusão, i.e.,

$$[\eta \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})](x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m},$$

para todo $x \in \varphi(U)$. Agora, basta definir $\xi = \eta \circ \psi$. $\square$

Vejamos algumas consequências.

Corolário 3.2.4. Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Então, o conjunto dos pontos $p \in M$ tais que f é uma imersão em p é aberto em M.

Demonstração. Com a notação do enunciado do Teorema 3.2.3, temos que se f é imersão em $p \in U$ então f é imersão em q, para todo $q \in U$, pois $\xi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é imersão em $\varphi(q)$, e as aplicações φ e ξ são difeomorfismos. □

Corolário 3.2.5. Seja $f : M \to N$ uma imersão. Então, uma aplicação $g : P \to M$ é diferenciável se, e somente se, g é contínua e a composta $f \circ g$ é diferenciável.

Demonstração. Suponhamos g contínua e $f \circ g$ é diferenciável. Dado um ponto $p \in P$, segue do Teorema 3.2.3 que existem uma carta local (U, φ) em M, com $g(p) \in U$, e um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$, com $f(U) \subset V$, tais que $\xi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é dada por

$$(\xi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0),$$

para todo $x \in \varphi(U)$. Como g é contínua, existe um aberto $W \subset P$ contendo p tal que $g(W) \subset U$. Além disso, sendo $f \circ g$ diferenciável, para toda carta local (Z, ψ) em P, com $p \in Z \subset W$, tem-se que $\xi \circ (f \circ g) \circ \psi^{-1} : \psi(Z) \to \xi(V)$ é diferenciável. No entanto, como

$$\begin{aligned} \left(\xi \circ (f \circ g) \circ \psi^{-1}\right)(x) &= (\xi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ g \circ \psi^{-1})(x) \\ &= \left((\varphi \circ g \circ \psi^{-1})(x), 0\right), \end{aligned}$$

segue que $\varphi \circ g \circ \psi^{-1}$ é diferenciável, logo g é diferenciável. A recíproca segue diretamente da regra da cadeia. □

Uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ é dita ser um *mergulho* se f é uma imersão e a aplicação $f : M \to f(M)$ é um homeomorfismo, onde $f(M)$ está munido da topologia induzida de N. Nem toda imersão injetora é um mergulho (cf. Exercício 3.2.1). No entanto, temos um resultado local.

Proposição 3.2.6. Toda imersão $f : M^m \to N^n$ é, localmente, um mergulho. Mais precisamente, todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança aberta $U \subset M$ tal que $f|_U : U \to N$ é um mergulho.

Demonstração. Basta observar que a inclusão

$$\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m} \to \mathbb{R}^n,$$

assim como qualquer restrição dessa inclusão a abertos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, é um mergulho e que, pelo Teorema 3.2.3, toda imersão é localmente representada em cartas apropriadas por uma inclusão como essa. □

3.3 Submersões

Uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ é dita ser uma *submersão no ponto* $p \in M$ se a diferencial $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}M$ é uma aplicação linear sobrejetora. Neste caso, deve-se ter $m \geq n$. Se f for uma submersão em todos os pontos de M, diremos simplesmente que f é uma *submersão*.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.3.1. Uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ é uma submersão em $p \in M$ se, e somente se, $\mathrm{d}f(p) \neq 0$. De fato, isso segue do fato de que um funcional linear é sobrejetor ou nulo.

Exemplo 3.3.2. Dado uma decomposição de $\mathbb{R}^{m+n}$ em soma direta da forma $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$, seja $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ a projeção sobre o primeiro fator, i.e., $\pi(x, y) = x$. Como π é linear, tem-se $\mathrm{d}\pi(x, y) = \pi$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$. Sendo π sobrejetora, concluímos que é uma submersão.

O teorema seguinte mostra que o Exemplo 3.3.2 é, em cartas locais apropriadas, o caso mais geral de uma submersão.

Teorema 3.3.3 (Forma local das submersões)**.** *Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável que é uma submersão num ponto $p \in M$. Então, dado uma carta local (V, ψ) em N, com $f(p) \in V$, existe um difeomorfismo $\xi : U \to \psi(V) \times W$, onde $U \subset M$ é um aberto contendo p, com $f(U) \subset V$, e $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ é um aberto, tais que*

$$(\psi \circ f \circ \xi^{-1})(x, y) = x,$$

para todo $(x, y) \in \psi(V) \times W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.

Demonstração. Sejam (U, φ), (V, ψ) cartas locais em M e N, respectivamente, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$. Como $\mathrm{d}f(p)$ é sobrejetora, segue da Proposição 2.4.4 que $\mathrm{d}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ também o é. Assim, pela forma local das submersões em espaços Euclidianos, restringindo os domínios, se necessário, existe um difeomorfismo $\eta : \varphi(U) \to \psi(V) \times W$, onde $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ é um aberto, tal que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \eta^{-1} : \psi(V) \times W \to \psi(V)$ é a aplicação projeção sobre o primeiro fator, i.e.,

$$\big((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \eta^{-1}\big)(x, y) = x,$$

para todo $(x, y) \in \psi(V) \times W$. Assim, basta considerar $\xi = \eta \circ \varphi$. $\square$

Vejamos algumas aplicações da forma local das submersões.

Corolário 3.3.4. Se $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, então o conjunto dos pontos $p \in M$ tais que f é submersão em p é aberto em M.

Demonstração. Com a notação do enunciado do Teorema 3.3.3, temos que se f é submersão em $p \in U$ então f é uma submersão em q, para todo $q \in U$, pois $\psi \circ f \circ \xi^{-1}$ é submersão em $\xi(q)$, e as aplicações ξ e ψ são difeomorfismos. □

Corolário 3.3.5. Seja $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetora. Então, uma aplicação $f : N \to P$ é diferenciável se, e somente se, $f \circ \pi$ é diferenciável.

Demonstração. Suponhamos que a composta $f \circ \pi$ seja diferenciável. Dado um ponto $q \in N$, seja $p \in M$ tal que $\pi(p) = q$. Como π é uma submersão, segue do Teorema 3.3.3 que existem uma carta local (V, ψ) em N e um difeomorfismo $\xi : U \to \psi(V) \times W$, com $\pi(U) \subset V$, tais que

$$(\psi \circ \pi \circ \xi^{-1})(x, y) = x,$$

para todo $(x, y) \in \psi(V) \times W$. Além disso, como $f \circ \pi$ é diferenciável, dado uma carta local (Z, φ) em P, com $f(q) \in Z$, restringindo U e V, se necessário, temos que $f(V) \subset Z$ e

$$\varphi \circ (f \circ \pi) \circ \xi^{-1} : \psi(V) \times W \to \psi(Z)$$

é diferenciável. No entanto, como

$$\begin{aligned} \left(\varphi \circ (f \circ \pi) \circ \xi^{-1}\right)(x, y) &= (\varphi \circ f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \pi \circ \xi^{-1})(x, y) \\ &= (\varphi \circ f \circ \psi^{-1})(x), \end{aligned}$$

segue que $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ é diferenciável, logo f é diferenciável. A recíproca segue diretamente da regra da cadeia. □

3.4 Subvariedades

Nesta seção introduziremos o conceito de subvariedade. Em linhas gerais, uma subvariedade m-dimensional de uma variedade diferenciável N^n é um subconjunto M de N tal que, em cartas locais apropriadas, a inclusão de M em N é representada pela inclusão de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$,

$$(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m},$$

ou seja, a relação entre $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ serve como um modelo para a relação existente entre uma subvariedade e uma variedade.

Definição 3.4.1. Seja N^n uma variedade diferenciável. Dizemos que um subconjunto $M \subset N$ é uma *subvariedade* m-dimensional de N se para todo ponto $p \in M$, existe uma carta local (U, φ) em N, com $p \in U$, tal que

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m. \tag{3.1}$$

Os exemplos mais simples de subvariedades são as subvariedades Euclidianas. De fato, decorre do Teorema 1.2.7 que toda subvariedade Euclidiana M^m em $\mathbb{R}^n$ é uma subvariedade no sentido da Definição 3.4.1.

É de se esperar que uma subvariedade M^m de uma variedade diferenciável N^n também tenha uma estrutura diferenciável. De fato, dado um ponto $p \in M$, considere uma carta (U, φ) em N, com $p \in U$, satisfazendo (3.1). Definimos uma aplicação

$$\overline{\varphi} : M \cap U \to \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m \tag{3.2}$$

pondo $\overline{\varphi} = \varphi|_{M \cap U}$. Com a notação acima, temos o seguinte

Teorema 3.4.2. *O conjunto $\mathcal{A}$ formado por todas as aplicações $\overline{\varphi}$, dadas em* (3.2)*, é um atlas em M, cuja topologia induzida em M coincide com a topologia induzida pela variedade N. Além disso, a aplicação inclusão $i : M \to N$ é um mergulho.*

Demonstração. Observe inicialmente que $\overline{\varphi}$ é bijetora e seu contra-domínio $\varphi(U) \cap \mathbb{R}^m$ é aberto em $\mathbb{R}^m$, logo $(U \cap M, \overline{\varphi})$ é uma carta local em M. Se (U, φ), (V, ψ) são cartas em N, com $p \in U \cap V$, satisfazendo (3.1), então os conjuntos

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}\left((U \cap M) \cap (V \cap M)\right) &= \varphi\left((U \cap V) \cap (V \cap M)\right) \\ &= \varphi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{\psi}\left((U \cap M) \cap (V \cap M)\right) &= \psi\left((U \cap V) \cap (U \cap M)\right) \\ &= \psi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

são abertos em $\mathbb{R}^m$, pois $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$. Além disso, a aplicação de transição

$$\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^m \to \psi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^m$$

é uma restrição da aplicação de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ e é, portanto, um difeomorfismo. Portanto, o conjunto $\mathcal{A}$, formado por todas tais aplicações $\overline{\varphi}$, é um atlas em M. Afirmamos que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$, induzida em M pelo atlas $\mathcal{A}$, coincide com a topologia τ, induzida em M pela variedade N. De fato, dado uma carta (U, φ) em N, satisfazendo (3.1) então, relativamente a τ, o conjunto $U \cap M$ é aberto em M e a carta $\overline{\varphi}$ é um homeomorfismo, pois é restrição de um homeomorfismo. Logo a topologia τ faz com que os elementos de $\mathcal{A}$ sejam homeomorfismos definidos em abertos de M, o que mostra que as topologias τ e $\tau_{\mathcal{A}}$ coincidem. Em relação à aplicação inclusão $i : M \to N$, se (U, φ) é uma carta em N satisfazendo (3.1), temos que $i(U \cap M) \subset U$ e a representação $\widetilde{i} : \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m \to \varphi(U)$ de i em relação às cartas $\overline{\varphi}$ e φ é a inclusão do aberto $\varphi(U) \cap \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^m$ no aberto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$. Logo, $\widetilde{i}$ é uma imersão e, portanto,

$$i|_{U \cap M} = \varphi^{-1} \circ \widetilde{i} \circ \overline{\varphi}$$

é uma imersão, já que $\overline{\varphi}$ e φ são difeomorfismos. Como $U \cap M$ é uma vizinhança aberta de p em M e p é um ponto arbitrário de M, segue que i é uma imersão. Finalmente, para mostrar que i é um homeomorfismo sobre sua imagem, basta provar que a aplicação identidade $\mathrm{Id} : M \to M$ é um homeomorfismo, onde o domínio de Id é munido da topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ e o contra-domínio de Id é munido da topologia τ. Como ambas as topologias coincidem, segue que Id é de fato um homeomorfismo. $\square$

O corolário seguinte é conhecido como o teorema da mudança de contra-domínio.

Corolário 3.4.3. Sejam M, N variedades diferenciáveis, $f : M \to N$ uma aplicação e $P \subset N$ uma subvariedade tal que $f(M) \subset P$. Seja $\widetilde{f} : M \to P$ a aplicação que difere de f apenas no contra-domínio. Então, f é diferenciáel se, e somente se, $\widetilde{f}$ é diferenciável.

Demonstração. Denotando por $i : P \to N$ a aplicação inclusão, temos que $f = i \circ \widetilde{f}$, i.e., o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} & N \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\widetilde{f}"] & P \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

comuta. Suponha que f seja diferenciáel. Como $i : P \to N$ é um mergulho segue, em particular, que $i : P \to i(P)$ é um homeomorfismo. Logo, como $f = i \circ \widetilde{f}$ e f é contínua, segue que $\widetilde{f}$ é contínua. Portanto, pelo Corolário 3.2.5, segue que $\widetilde{f}$ é diferenciáel. A recíproca segue da regra da cadeia. $\square$

Exemplo 3.4.4. Seja W um aberto de uma variedade diferenciável M^n. Se (U, φ) é uma carta local em M, com $U \subset W$, temos:

$$\varphi(U \cap W) = \varphi(U) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^n.$$

Isso mostra que W é uma subvariedade n-dimensional de M. A carta $\overline{\varphi}$ em W, correspondente à carta (U, φ), é igual a φ. Logo, a estrutura diferenciável induzida por M na subvariedade W, no sentido do Teorema 3.4.2, é constituída pelas cartas de M com domínio contido em W, ou seja, coincide com a estrutura diferenciável que M induz no subconjunto aberto W.

Exemplo 3.4.5. Seja W um subespaço vetorial de um espaço vetorial V de dimensão n. Seja $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo linear tal que $\varphi(W) = \mathbb{R}^m$, onde $m = \dim(W)$. Então (V, φ) é uma carta local em V que satisfaz (3.1), logo W é uma subvariedade de V. A carta $\overline{\varphi} = \varphi|_W : W \to \mathbb{R}^m$ em W, associada a φ, é um isomorfismo linear e, portanto, a estrutura diferenciável induzida em W por V coincide com a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial W.

3.5 Mergulhos

Como vimos na Seção 3.2, um mergulho de uma variedade M sobre outra variedade N é uma aplicação que é, ao mesmo tempo, um mergulho topológico e uma imersão diferenciável, e que se relaciona fortemente com o conceito de subvariedade. O objetivo desta seção é estudar condições necessárias e suficientes para que a imagem de uma variedade M por uma imersão $f : M \to N$ seja uma subvariedade em N.

Teorema 3.5.1. *Seja $f : M^m \to N^n$ uma imersão. Então, $f(M)$ é uma subvariedade de N se, e somente se, $f : M \to f(M)$ é uma aplicação aberta em relação à topologia induzida em $f(M)$.*

Demonstração. Se $f(M)$ é uma subvariedade de N então, pelo Corolário 3.4.3, $f : M \to f(M)$ é uma imersão e, portanto, um difeomorfismo local. Em particular, $f : M \to f(M)$ é uma aplicação aberta. Reciprocamente, pelo Teorema 3.2.3, para cada $p \in M$, existem uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, e um difeomorfismo $\psi : V \to \varphi(U) \times W$ tal que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0),$$

para todo $x \in \varphi(U)$. Segue então que

$$\psi(f(U)) = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n.$$

Como $f : M \to f(M)$ é aberta, temos que $f(U)$ é um aberto relativo a $f(M)$ e, portanto, existe um aberto $\widetilde{V}$ em N tal que $f(U) = \widetilde{V} \cap f(M)$. Podemos supor então, sem perda de generalidade, que $\widetilde{V} = V$. Assim,

$$\begin{aligned} \psi(V \cap f(M)) &= \psi(f(U)) \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(U)) \\ &= \psi(V) \cap \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

mostrando que $f(M)$ é uma subvariedade de N. □

Corolário 3.5.2. Se $f : M^m \to N^n$ é um mergulho, então $f(M)$ é uma subvariedade de N e $f : M \to f(M)$ é um difeomorfismo.

Demonstração. Em virtude do Teorema 3.5.1, temos que $f(M)$ é uma subvariedade de N e $f : M \to f(M)$ é um homeomorfismo diferenciável. Resta provar que f^{-1} é diferenciável. Dado $p \in M$, seja $\overline{\psi} : V \cap f(M) \to \psi(V) \cap \mathbb{R}^m$ a carta em $f(M)$ correspondente à carta (V, ψ) em N, com $f(p) \in V$, como no Teorema 3.5.1. Como

$$f(U) = V \cap f(M),$$

faz sentido considerar a representação de $f^{-1} : f(M) \to M$ em relação às cartas $\overline{\psi}$ e φ. Essa representação é igual à aplicação identidade do aberto $\varphi(U)$. Assim, f^{-1} é diferenciável na vizinhança aberta $V \cap f(M)$ de $f(p)$ em $f(M)$. Como $p \in M$ foi escolhido de forma arbitrária, concluímos que $f^{-1} : f(M) \to M$ é diferenciável. □

Corolário 3.5.3. Um subconjunto M de uma variedade diferenciável N é uma subvariedade de N se, e somente se, for imagem de um mergulho.

Demonstração. Toda subvariedade de N é imagem de sua própria inclusão que, em virtude do Teorema 3.4.2, é um mergulho. A recíproca segue diretamente do Corolário 3.5.2. □

Finalizaremos essa seção relacionando o espaço tangente a uma subvariedade com o espaço tangente da variedade ambiente. Mais precisamente, dados uma subvariedade M de uma variedade diferenciável N e um ponto $p \in M$, queremos saber a relação existente entre o espaço tangente T_pM e o espaço tangente T_pN. É natural esperar que T_pM seja um subespaço de T_pN, assim como ocorre ao espaço tangente de uma subvariedade Euclidiana M em $\mathbb{R}^n$, que é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. A questão é que T_pM não é exatamente um subespaço de T_pN, mas apenas naturalmente isomorfo a um subespaço de T_pN.

No espaço tangente, construído usando curvas segunda a Definição 2.4.2, um elemento de T_pM é determinado por uma classe de equivalência de uma curva γ em M passando por p; tal curva γ também determina uma classe de equivalência que é um elemento de T_pN. No entanto, as classes de equivalência determinadas por γ vista como curva em M e vista como curva em N não coincidem; existem curvas em N que são tangentes a γ mas que não são curvas em M.

Identificaremos T_pM com um subespaço de T_pN da seguinte forma. Se $i : M \to N$ denota a aplicação inclusão então, para todo $p \in M$, identificaremos o espaço tangente T_pM com a imagem da diferencial $\mathrm{d}i(p)$ através da diferencial

$$\mathrm{d}i(p) : T_pM \to T_{i(p)}N.$$

Note que, como i é um mergulho e, em particular, uma imersão, temos que $\mathrm{d}i(p)$ é injetora e é, portanto, um isomorfismo sobre sua imagem. Trabalharemos então como se T_pM fosse um subespaço de T_pN e como se a diferencial $\mathrm{d}i(p) : T_pM \to T_pN$ fosse a aplicação inclusão de T_pM em T_pN.

3.6 Valores regulares

No Capítulo 1 vimos que pré-imagem de valor regular, através de aplicações diferenciáveis, são subvariedades Euclidianas. É natural esperar que esta propriedade também ocorra no contexto de variedades diferenciáveis, e é o que veremos nesta seção. O resultado seguinte é uma aplicação simples do teorema do posto, mas que é útil para encontrar exemplos de subvariedades.

Teorema 3.6.1. *Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável com posto constante e igual a r em todos os pontos de M, com $r \leq \min\{m, n\}$. Então, para cada ponto $q \in f(M)$, o conjunto $f^{-1}(q)$ é uma subvariedade fechada de M de dimensão igual a $m - r$.*

Demonstração. O conjunto $f^{-1}(q)$ é fechado em M pois é a imagem inversa do fechado $\{q\}$ em N por uma aplicação contínua. Dado $p \in f^{-1}(q)$, segue do Teorema 3.1.1 que existem cartas (U, φ), (V, ψ) em M e N, respectivamente, com $p \in U$, $\varphi(p) = 0$, $f(U) \subset V$ e $\psi(q) = 0$, tais que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x_r, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r},$$

para todo $x = (x_r, x_{m-r}) \in \varphi(U)$. Disso decorre que os únicos pontos de U que são transformados em q por f são aqueles cujas r primeiras coordenadas são zero, i.e.,

$$\begin{aligned} U \cap f^{-1}(q) &= \varphi^{-1}\big((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(0)\big) \\ &= \varphi^{-1}\big(\{x \in \varphi(U) : x_1 = \ldots = x_r = 0\}\big). \end{aligned}$$

Isso significa que

$$\varphi(U \cap f^{-1}(q)) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^{m-r},$$

mostrando que $f^{-1}(q)$ é subvariedade de M de dimensão $m - r$. □

Como consequência direta do Teorema 3.6.1, temos o seguinte

Corolário 3.6.2. Se $n \leq m$ e o posto de f é constante e igual a n em todo ponto de $f^{-1}(q)$, então $f^{-1}(q)$ é uma subvariedade fechada de M.

O teorema seguinte é o resultado análogo à Proposição 1.2.1 para subvariedades Euclidianas e, assim como o Teorema 3.6.1, nos dá um método de obter subvariedades que são pré-imagens de valores regulares.

Teorema 3.6.3. *Considere uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ e $c \in N$ um valor regular de f. Então, o conjunto $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade de M de dimensão $m - n$ e, para todo $p \in f^{-1}(c)$, tem-se:*

$$T_p f^{-1}(c) = \ker(\mathrm{d}f(p)).$$

Demonstração. Dado um ponto $p \in f^{-1}(c)$, segue do Teorema 3.3.3 que existem uma carta local (V, ψ) em N, com $c \in V$ e $\psi(c) = 0$, e um difeomorfismo $\varphi : U \to \psi(V) \times W$, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$, tais que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n), \tag{3.3}$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) \in \varphi(U)$. Temos:

$$\varphi(U \cap f^{-1}(c)) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(0) = \varphi(U) \cap \left(\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}\right).$$

Seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ um isomorfismo linear que transforma o subespaço $\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ sobre $\mathbb{R}^{m-n} \subset \mathbb{R}^m$. Então, $T \circ \varphi : U \to T(\varphi(U))$ é uma carta em M que satisfaz

$$\begin{aligned} (T \circ \varphi)(U \cap f^{-1}(c)) &= T\left(\varphi(U) \cap (\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n})\right) \\ &= T(\varphi(U)) \cap \mathbb{R}^{m-n}, \end{aligned}$$

ou seja, $T \circ \varphi$ é uma carta local em M satisfazendo (3.1). Isso mostra que $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade $(m-n)$-dimensional de M. Além disso, como φ

é um difeomorfismo que transforma $U \cap f^{-1}(c)$ sobre $\varphi(U) \cap (\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n})$, temos que $\mathrm{d}\varphi(p)$ transforma o espaço tangente a $U \cap f^{-1}(c)$ no ponto p, que é igual a $T_p f^{-1}(c)$, sobre o espaço tangente a $\varphi(U) \cap (\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n})$ no ponto $\varphi(p)$, que é igual a $\{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Ou seja,

$$\mathrm{d}\varphi(p) \left(T_p f^{-1}(c)\right) = \{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}. \tag{3.4}$$

Diferenciando (3.3) no ponto $\varphi(p)$, obtemos:

$$\left(\mathrm{d}\psi(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p) \circ \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}\right)(v_1, \ldots, v_m) = (v_1, \ldots, v_n),$$

para todo $(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$. Assim,

$$\ker\left(\mathrm{d}\psi(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p) \circ \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}\right) = \{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}. \tag{3.5}$$

Como $\mathrm{d}\psi(f(p))$ e $\mathrm{d}\varphi(p)$ são isomorfismos, temos:

$$\begin{aligned} \ker\left(\mathrm{d}\psi(f(p)) \circ \mathrm{d}f(p) \circ \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}\right) &= \ker\left(\mathrm{d}f(p) \circ \mathrm{d}\varphi(p)^{-1}\right) \\ &= \mathrm{d}\varphi(p)\left(\ker(\mathrm{d}f(p))\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

De (3.5) e (3.6), obtemos

$$\mathrm{d}\varphi(p)\left(\ker(\mathrm{d}f(p))\right) = \{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

Comparando com (3.4), obtemos então

$$\mathrm{d}\varphi(p)\left(T_p f^{-1}(c)\right) = \mathrm{d}\varphi(p)\left(\ker(\mathrm{d}f(p))\right),$$

o que implica que $T_p f^{-1}(c) = \ker(\mathrm{d}f(p))$. $\square$

3.7 Exercícios

3.1

1. Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável e suponha M conexa. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) Para cada ponto $p \in M$, existem cartas locais contendo p e $f(p)$, para as quais a correspondente representação de f é linear.

(b) f tem posto constante.

3.2

1. Considere a curva $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - t, t^2)$. Verifique que f é uma imersão injetora, mas não é um mergulho.

2. Encontrar uma imersão $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e uma função descontínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f \circ g$ seja diferenciável.

3. Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável. Prove que:

(a) Se f é injetora, então $m \leq n$ e o conjunto dos pontos nos quais f tem posto m é aberto e denso em M.

(b) Se f é aberta, então $m \geq n$ e o conjunto dos pontos nos quais f tem posto n é aberto e denso em M.

2. Seja $f : M \to N$ uma imersão. Prove que, para todo $p \in M$, existem abertos $U \subset M$ e $V \subset N$, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$, de modo que a aplicação $f|_U : U \to V$ admite uma inversa à esquerda $g : V \to U$ diferenciável.

3. Sejam (M, τ) um espaço topológico, N uma variedade diferenciável e $f : M \to N$ uma aplicação contínua. Prove que existe, no máximo, uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}$ em M que torna f uma imersão, com $\tau_{\mathcal{A}} = \tau$.

3.3

1. Sejam M, N, P variedades diferenciáveis, $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetora, $f : M \to P$ uma aplicação diferenciável e $\overline{f} : N \to P$ uma aplicação tal que $\overline{f} \circ \pi = f$. Prove que $\overline{f}$ é diferenciável.

2. Prove que toda submersão $f : M \to N$, com M compacta e N conexa, é sobrejetora.

3. Prove que a aplicação quociente $\pi : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}P^n$ é uma submersão.

4. Seja M^n uma variedade diferenciável compacta. Prove que não existe submersão $f : M^n \to \mathbb{R}^k$, para qualquer $k \geq 1$.

5. Sejam X um espaço topológico, Y um conjunto e $\pi : X \to Y$ uma aplicação.

(a) Prove que a coleção $\tau = \{U \subset Y : \pi^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}$ é uma topologia[1] em Y.

(b) Prove que se Y é munido da topologia co-induzida por π então $\pi : X \to Y$ é contínua.

(c) Assuma que Y é munido da topologia co-induzida por π. Sejam Z um espaço topológico e $f : X \to Z$, $\overline{f} : Y \to Z$ aplicações tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, "\overline{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

comuta. Prove que f é contínua se, e somente se, $\overline{f}$ é contínua.

6. Sejam X, Y espaço topológicos e $\pi : X \to Y$ uma aplicação. Prove que:

(a) Se π é contínua, aberta e sobrejetora então π é uma aplicação quociente.

(b) Se π é contínua, fechada e sobrejetora então π é uma aplicação quociente.

(c) Se X é compacto, Y é Hausdorff e π é contínua e sobrejetora então π é uma aplicação quociente.

7. O objetivo deste exercício é provar que toda submersão é uma aplicação aberta.

(a) Sejam X, $\widetilde{X}$, Y, $\widetilde{Y}$ espaços topológicos, $\varphi : X \to \widetilde{X}$, $\psi : Y \to \widetilde{Y}$ homeomorfismos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Prove que se $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é uma aplicação aberta então f também é uma aplicação aberta.

[1] A topologia τ é chamada a *topologia co-induzida* por π em Y; quando Y é munido da topologia co-induzida por π diz-se também que π é uma *aplicação quociente*.

(b) Seja X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Suponha que para todo $x \in X$ existem abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$, com $x \in U$ e $f(U) \subset V$, de modo que $f|_U : U \to V$ seja uma aplicação aberta. Prove que f é uma aplicação aberta.

(c) Prove que a projeção $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é uma aplicação aberta.

(d) Use o Teorema 3.3.3 e os itens anteriores para concluir que toda submersão é uma aplicação aberta.

8. Prove que toda submersão sobrejetora é uma aplicação quociente.

3.4

1. Prove que o gráfico de uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$ é uma subvariedade m-dimensional de $M \times N$.

2. Sejam $f : M \to N$ um difeomorfismo e P uma subvariedade de M. Prove que $f(P)$ é uma subvariedade de N, $f|_P : P \to f(P)$ é um difeomorfismo e $T_{f(p)}f(P) = \mathrm{d}f(p)(T_pP)$, para todo $p \in P$.

3. Dado uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ prove que, para todo $p \in M$, o espaço tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ coincide com o gráfico de $\mathrm{d}f(p)$.

4. Sejam N uma variedade diferenciável e $M \subset N$ um subconjunto discreto, i.e., a topologia induzida em M por N é discreta. Prove que M é uma subvariedade 0-dimensional de N.

5. Prove que o conjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 = y^3\}$$

é uma curva de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, mas não é de classe C^2.

6. Dado uma aplicação diferenciável $f : M \to N$, considere subvariedades $P \subset M$ e $Q \subset N$, com $f(P) \subset Q$. Denote por $\widetilde{f} : P \to Q$ a restrição de f às subvariedades P e Q. Prove que $\widetilde{f}$ é diferenciável e $\mathrm{d}\widetilde{f}(p) : T_pP \to T_{f(p)}Q$ é a restrição de $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ a T_pP, para todo $p \in P$.

3.5

1. Prove que se $f : M \to N$ é uma imersão injetora, com M compacta, então f é um mergulho.

2. Se $f : M \to N$ é um mergulho, prove que

$$T_{f(p)}f(M) = \mathrm{Im}(\mathrm{d}f(p)),$$

para todo $p \in M$.

3. Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável que admite uma inversa à esquerda diferenciável. Prove que f é um mergulho.

4. A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(t) = (2\cos t + t, \sin t),$$

é um mergulho? Justifique.

Capítulo 4

O teorema de Sard

O objetivo deste capítulo é discutir o teorema de Sard no contexto de variedades diferenciáveis, o qual afirma que a imagem do conjunto dos pontos críticos, através de uma aplicação diferenciável, tem medida nula. Trata-se de um resultado importante em topologia diferencial, principalmente no estudo de certas propriedades que são preservadas por difeomorfismos entre variedades.

O que está por trás do teorema de Sard é a noção de conjunto de medida nula, usualmente definida em $\mathbb{R}^n$, mas que se extende naturalmente a uma variedade diferenciável. Tais conjuntos são pequenos em relação ao ambiente, no sentido que possuem volume suficientemente pequeno, e que são considerados também em outros assuntos, como na teoria de integração, por exemplo.

Como aplicação do teorema de Sard, introduziremos o conceito de transversalidade que discute, essencialmente, a questão da interseção de subvariedades. Em álgebra linear, por exemplo, a interseção de dois subespaços de um espaço vetorial é sempre outro subespaço vetorial. O análogo, para o contexto de subvariedades, não é verdade em geral; é relativamente simples encontrar exemplos de subvariedades cuja interseção não é subvariedade (cf. Exercício 4.3.1). No entanto, com uma hipótese adicional adequada, é possível provar, como veremos, que a interseção também é subvariedade.

4.1 Conjuntos de medida nula

Nesta seção iremos apenas apresentar as propriedades básicas dos conjuntos de medida nula em $\mathbb{R}^n$. Além disso, veremos que podemos extender naturalmente essas ideias para o contexto de variedades diferenciáveis. O leitor interessado em se aprofundar mais sobre o assunto pode consultar os livros do E. Lima [11] ou J. Lee [10].

Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tem *medida nula em* $\mathbb{R}^n$, e escrevemos $\mu(X) = 0$, se para cada $\epsilon > 0$ dado, é possível obter uma sequência de cubos abertos $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$ em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} vol(C_k) < \epsilon.$$

Existem várias propriedades importantes acerca dos conjuntos de medida nula. Apresentamos apenas algumas delas, que serão usadas quando necessário. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar [11].

Proposição 4.1.1. São válidas as seguintes propriedades:

(a) Todo subconjunto de um conjunto de medida nula também tem medida nula.

(b) Qualquer união enumerável de conjuntos de medida nula ainda é um conjunto de medida nula.

(c) Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, e $X \subset U$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$, então $f(X)$ também tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

(d) Se $m < n$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, então $f(U)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Em particular, $\mathbb{R}^m$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *localmente de medida nula em* $\mathbb{R}^n$ se, para cada $x \in X$, existe um aberto V_x em $\mathbb{R}^n$, contendo o ponto x, tal que $\mu(V_x \cap X) = 0$. Observe que, da cobertura aberta $X \subset \cup V_x$ extraimos, pelo teorema de Lindelöf (cf. [16, Theorem 30.3]), uma subcobertura enumerável $X \subset \cup V_k$, logo $X = \cup(V_k \cap X)$ é uma união enumerável de conjuntos de medida nula e, portanto, $\mu(X) = 0$. Assim, um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é localmente de medida nula se, e somente se, tem medida nula.

Exemplo 4.1.2. Seja M^m uma subvariedade Euclidiana em $\mathbb{R}^n$, com $m < n$. Dado uma parametrização $\varphi : U \to \varphi(U)$ de M, a vizinhança coordenada $\varphi(U) \subset M$ tem, em virtude da Proposição 4.1.1, medida nula em $\mathbb{R}^n$. Como $\varphi(U) = A \cap M$, para algum aberto A de $\mathbb{R}^n$, segue que M é localmente de medida nula e, assim, M^m tem medina nula em $\mathbb{R}^n$.

O que faremos agora é estender a noção de conjuntos de medida nula para variedades diferenciáveis.

Definição 4.1.3. Dizemos que um subconjunto X de uma variedade diferenciável M^n tem *medida nula em* M se, para toda carta local (U, φ) de M, o subconjunto $\varphi(X \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

O lema seguinte garante que, a fim de verificar a condição da Definição 4.1.3, basta verificar numa coleção de cartas locais de M, cujos domínimos realizam uma cobertura para o conjunto X.

Lema 4.1.4. Considere um subconjunto X de uma variedade diferenciável M^n. Suponha que para alguma coleção $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ de cartas locais em M, cujos domínios cobrem X, o conjunto $\varphi_\alpha(X \cap U_\alpha)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$, para todo $\alpha \in I$. Então X tem medida nula em M.

Demonstração. Dado uma carta local (V, ψ) em M, devemos provar que $\psi(X \cap V)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Alguma subcoleção enumerável dos abertos U_α cobre $X \cap V$. Para cada tal aberto U_α, temos

$$\psi(X \cap V \cap U_\alpha) = (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ \varphi_\alpha(X \cap V \cap U_\alpha).$$

Observe que $\varphi_\alpha(X \cap V \cap U_\alpha)$ é subconjunto de $\varphi_\alpha(X \cap U_\alpha)$, que tem medida nula em $\mathbb{R}^n$, por hipótese. Pela Proposição 4.1.1 aplicada a $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$, segue que $\varphi_\alpha(X \cap V \cap U_\alpha)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Como $\psi(X \cap V)$ pode ser expresso como união enumerável de tais conjuntos, concluimos que $\psi(X \cap V)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$, como queríamos. $\square$

Os conjuntos de medida nula em uma variedade diferenciável satisfazem propriedades análogas daquelas dos conjuntos de medida nula do espaço Euclidiano. O resultado seguinte é consequência direta da Proposição 4.1.1 usando-se parametrizações para as variedades M e N.

Proposição 4.1.5. Dado uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$, valem as seguintes propriedades:

(a) Se $m = n$ e $X \subset M$ é um subconjunto de medida nula em M, então $f(X)$ tem medida nula em N.

(b) Se $m < n$, então $f(M)$ tem medida nula em N. Em particular, qualquer que seja o subconjunto $X \subset M$, o conjunto $f(X)$ tem medida nula em N.

4.2 O teorema de Sard

Nesta seção apresentaremos o clássico teorema de Sard a respeito dos valores regulares de uma aplicação diferenciável $f : M \to N$, que afirma que o conjunto de tais pontos é sempre denso na variedade N. O teorema seguinte foi provado por A. Morse [14], para o caso $n = 1$, e por A. Sard [17], para o caso geral.

Teorema 4.2.1 (Sard)**.** *Dado uma aplicação diferenciável $f : M^m \to N^n$, denotemos por S o conjunto dos pontos $p \in M$ tais que a diferencial $\mathrm{d}f(p)$ não é sobrejetora. Então $f(S)$ tem medida nula em N.*

O conjunto S, como no enunciado do Teorema 4.2.1, é precisamente o conjunto dos pontos críticos de f. Note que, em virtude da Proposição 4.1.5, o conjunto $f(S)$ tem medida nula em N sempre que $m < n$. Assim, basta considerar o caso em que $m \geq n$. Dado um ponto arbitrário $p \in S$, considere cartas locais (U, φ), (V, ψ) em M e N, respectivamente, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$. A fim de provar que $f(S)$ tem medida nula em N, é suficiente mostrar que $f(S \cap U)$ tem medida nula em N, visto que é possível exibir uma cobertura aberta para S através de domínios de cartas locais de M. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \mu(f(S \cap\ U)) = 0 \text{ em } N \quad &\Leftrightarrow \quad \mu(\psi(f(S \cap U))) = 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \quad \mu(\widetilde{f}(\varphi(S \cap U))) = 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ denota a representação de f em relação às cartas φ e ψ. Dessa forma, o teorema de Sard para variedades diferenciáveis se reduz ao caso Euclidiano.

A prova do teorema, por ser relativamente técnica, pode ser omitida numa primeira leitura. O leitor interessado pode consultar [10, Theorem 6.10].

Teorema 4.2.2. *Dado uma aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, denotemos por S o conjunto dos pontos $x \in U$ tais que $\mathrm{d}f(x)$ não é sobrejetora. Então $f(S)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.*

Uma consequência direta do teorema de Sard é o seguinte

Corolário 4.2.3. O conjunto $Reg(f)$ é sempre denso em N.

Demonstração. De fato, se existisse um aberto $V \subset N$ que não intercepta $Reg(f)$, o conjunto V seria constituído somente de valores críticos e não teria medida nula em N, contradizendo o teorema de Sard. $\square$

Corolário 4.2.4. O conjunto dos pontos $q \in N$ para os quais $f^{-1}(q)$ é subvariedade de M é denso em N.

4.3 Transversalidade

Nesta seção estudaremos sob que condições a pré-imagem de uma subvariedade, através de uma aplicação diferenciável, também é uma subvariedade. No caso particular em que a subvariedade reduz-se a um ponto basta, em virtude do Teorema 3.6.3, que este ponto seja valor regular para a aplicação. O que faremos agora é estender essa noção de regularidade.

Definição 4.3.1. Sejam $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável e P uma subvariedade de N. Dizemos que f é *transversal* à subvariedade P se, para cada ponto $p \in f^{-1}(P)$, tem-se

$$T_{f(p)}N = \mathrm{d}f(p)(T_pM) + T_{f(p)}P. \tag{4.1}$$

A equação (4.1) significa que todo vetor tangente à variedade N no ponto $f(p)$ se expressa como soma de um vetor tangente à subvariedade P em $f(p)$ e um vetor tangente à imagem de M através de $\mathrm{d}f(p)$.

Casos triviais de transversalidade ocorrem, por exemplo, quando $P = N$ ou $f(M) \cap P = \emptyset$. Por outro lado, a transversalidade impõe algumas restrições nas dimensões das variedades. Por exemplo, se $\dim M < \dim N - \dim P$, então f não pode ser transversal a P, a menos que $f(M) \cap P = \emptyset$.

O resultado seguinte é uma extensão do Teorema 3.6.3.

Teorema 4.3.2. *Sejam $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável e P^k uma subvariedade de N^n, com $f^{-1}(P) \neq \emptyset$. Se f é transversal a P, então $f^{-1}(P)$ é uma subvariedade de M^m, cuja codimensão é $n - k$.*

Demonstração. A ideia da prova é escrever $f^{-1}(P)$ como pré-imagem de valor regular de uma outra aplicação diferenciável. A menos de cartas locais, podemos assumir que f é da forma $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, e P é uma subvariedade Euclidiana de dimensão k em $\mathbb{R}^n$. Fixemos um ponto $p \in P$ e seja $x \in f^{-1}(p)$. Assim, existe um aberto V de $\mathbb{R}^n$, com $p \in V$, e um difeomorfismo $\xi : V \to \xi(V)$ tais que

$$\xi(P \cap V) = \xi(V) \cap \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}.$$

Seja $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ a projeção canônica sobre o segundo fator. Note que

$$\pi(\xi(P \cap V)) = 0 \in \mathbb{R}^{n-k}$$

e

$$\mathrm{d}(\pi \circ \xi)(p)(T_pP) = 0, \tag{4.2}$$

onde estamos identificando $T_pP \simeq \mathrm{d}\xi(p)(T_pP)$. Considere agora a aplicação $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-k}$ definida por $h = \pi \circ (\xi \circ f)$. Pela regra da cadeia e usando (4.2), obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}h(x)(\mathbb{R}^m) &= \pi\big(\mathrm{d}\xi\big(p)(\mathrm{d}f(x)(\mathbb{R}^m))\big) \\ &= \pi\big(\mathrm{d}\xi(p)\big(\mathrm{d}f(x)(\mathbb{R}^m) + T_pP\big)\big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

A condição de transversalidade de f em relação a P nos diz que

$$\mathrm{d}f(x)(\mathbb{R}^m) + T_pP = \mathbb{R}^n, \tag{4.4}$$

para todo $x \in f^{-1}(P)$. Decorre então de (4.3) e (4.4) que

$$\mathrm{d}h(x)(\mathbb{R}^m) = \pi(\mathrm{d}\xi(p)(\mathbb{R}^n)) = \mathbb{R}^{n-k},$$

ou seja, $\mathrm{d}h(x)$ é sobrejetora, mostrando que $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ é valor regular para h. Como $f^{-1}(P \cap V) = h^{-1}(0)$ concluimos, através da Proposição 1.2.1, que $f^{-1}(P)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^m$, cuja codimensão é $n - k$, que coincide com a codimensão de P em $\mathbb{R}^n$. □

Considere agora duas subvariedades M e P de uma variedade diferenciável N. Dizemos que M e P são *transversais* se

$$T_pM + T_pP = T_pN, \tag{4.5}$$

para todo $p \in M \cap P$, onde estamos considerando T_pM e T_pP como subespaços vetoriais de T_pN. Note que a condição (4.5) é justamente a Definição 4.3.1 aplicada entre a inclusão $i : M \to N$ e a subvariedade P.

Corolário 4.3.3. A interseção não-vazia $M \cap P$ de duas subvariedades transversais M e P de N também é uma subvariedade de N. Além disso

$$\operatorname{codim}(M \cap P) = \operatorname{codim} M + \operatorname{codim} P.$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 4.3.2 à inclusão $i : M \to N$, usando a hipótese que i é transversal a P. Se m, k, n, l denotam as dimensões de M, P, N e $M \cap P$, respectivamente, segue do Teorema 4.3.2 que $m - l = n - k$, logo $n - l = (n - m) + (n - k)$. □

Exemplo 4.3.4. Em $\mathbb{R}^2$, seja M o gráfico da função $f(x) = x^3 - a$ e P o eixo-x. Neste caso, M e P são transversais se, e somente se, $a \neq 0$.

De modo mais geral, em $\mathbb{R}^3$, uma curva regular e uma superfície que se interceptam transversalmente têm somente pontos isolados na interseção. Duas curvas regulares em $\mathbb{R}^3$ interceptam-se transversalmente se, e somente se, a interseção é vazia, pois em qualquer ponto da interseção, as duas retas tangentes às curvas deveriam gerar o espaço todo $\mathbb{R}^3$. Duas superfícies em $\mathbb{R}^3$ interceptam-se transversalmente se a interseção é uma curva regular.

No resultado seguinte veremos que se M e N são variedades diferenciáveis e P é uma subvariedade de N, então quase todas as aplicações diferenciáveis $f : M \to N$ são transversais a P.

Teorema 4.3.5 (Teorema da transversalidade)**.** *Considere variedades M, N e S e uma aplicação diferenciável $f : M \times S \to N$, transversal a uma subvariedade P de N. Então, o conjunto de todos os pontos $s \in S$, tais que $f_s = f(\cdot, s) : M \to N$ é transversal a P, é denso em S.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.3.2, tem-se que $f^{-1}(P)$ é uma subvariedade de $M \times S$. Denotemos por π a restrição à subvariedade $f^{-1}(P)$ da projeção de $M \times S$ sobre o segundo fator. Mostremos que se $s \in S$ é valor regular para π, então f_s é transversal a P. Fixemos um ponto $x \in M$ tal que $f_s(x) = p \in P$. Como $f(x, s) = p \in P$ e f é transversal a P, temos

$$\mathrm{d}f(x, s)\big(T_{(x,s)}(M \times S)\big) + T_pP = T_pN.$$

Como $s \in S$ é valor regular para π, e π é linear, tem-se

$$\pi\big(T_{(x,s)}f^{-1}(P)\big) = T_sS.$$

Disso decorre, em particular, que

$$T_{(x,s)}(M \times S) = \ker \pi + T_{(x,s)}f^{-1}(P),$$

ou seja,

$$T_{(x,s)}(M \times S) = T_{(x,s)}(M \times \{s\}) + T_{(x,s)}f^{-1}(P).$$

Assim,

$$\mathrm{d}f(x, s)\big(T_{(x,s)}(M \times \{s\})\big) + \mathrm{d}f(x, s)\big(T_{(x,s)}f^{-1}(P)\big) + T_pP = T_pN,$$

e usando o fato que $\mathrm{d}f(x, s)\big(T_{(x,s)}f^{-1}(P)\big) \subset T_pP$, tem-se

$$\mathrm{d}f_s(x)(T_xM) + T_pP = T_pN,$$

ou seja, f_s é transversal a P. A densidade do conjunto de tais pontos $s \in S$ segue do teorema de Sard. $\square$

4.4 Exercícios

4.1

1. Prove que a união enumerável de conjuntos de medida nula numa variedade diferenciável M tem medida nula em M.

4.2

1. Dado um número real t, considere o conjunto $\mathbb{R}^{n-1}_t = \{x \in \mathbb{R}^n : x^n = t\}$. Fixado um conjunto C em $\mathbb{R}^n$, suponha que $C_t = C \cap \mathbb{R}^{n-1}_t$ tenha medida nula em $\mathbb{R}^{n-1}_t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que C tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

4.3

1. Verifique se as seguintes subvariedades são transversais:

(a) O plano-xy e o eixo-z em $\mathbb{R}^3$.

(b) O plano-xy e o plano gerado pelos vetores $\{(3,2,0),(0,4,-1)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(c) O plano gerado pelos vetores $\{(1,0,0),(2,1,0)\}$ e o eixo-y em $\mathbb{R}^3$.

(d) $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{R}^l$ em $\mathbb{R}^n$.

(e) $V \times \{0\}$ e a diagonal em $V \times V$.

(f) Os conjuntos das matrizes simétricas e anti-simétricas em $M(n)$.

2. Se M e P são subvariedades transversais de uma variedade diferenciável N, prove que, em todo ponto $p \in M \cap P$, tem-se

$$T_p(M \cap P) = T_pM \cap T_pP.$$

3. Sejam $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável e P uma subvariedade de N. Se f é transversal a P, prove que, em todo ponto $p \in f^{-1}(P)$, tem-se

$$T_p(f^{-1}(P)) = \mathrm{d}f(p)^{-1}(T_{f(p)}P).$$

4. Considere duas aplicações diferenciáveis $f : M \to N$ e $g : N \to W$, e uma subvariedade P de W de modo que g seja transversal a P. Prove que f é transversal a $g^{-1}(P)$ se, e somente se, $g \circ f$ é transversal a P.

Capítulo 5

Extensão de aplicações diferenciáveis

Os resultados sobre variedades diferenciáveis apresentados até agora foram de natureza local e as demonstrações reduziram-se, através de cartas locais apropriadas, a um problema de cálculo no espaço Euclidiano. As partições da unidade, que veremos neste capítulo, são uma ferramenta útil para globalizar objetos definidos localmente como, por exemplo, a integral em variedades. Usando uma partição da unidade apropriada, podemos escrever a integral de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ como uma soma de integrais de funções f_i que têm suporte contido no domínio de uma carta local. A integral de uma dessas funções f_i reduz-se, essencialmente, ao cálculo da integral da representação dessa função na carta local em questão.

Como aplicação das partições da unidade, veremos um resultado sobre extensão de aplicações diferenciáveis numa variedade diferenciável. Mais precisamente, provaremos uma versão diferenciável do teorema da extensão de Tietze, que afirma ser possível estender toda função real contínua, definida num subconjunto fechado de um espaço normal, a uma função real contínua em todo o espaço. Discutiremos também o problema de saber se toda variedade diferenciável pode ser vista como subvariedade de algum espaço Euclidiano, ou seja, provaremos uma versão simples do teorema de Whitney que afirma que qualquer variedade diferenciável M^n pode ser mergulhada como uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Neste capítulo faremos uso de alguns pré-requisitos de topologia. Utilizaremos, por exemplo, a noção de família localmente finita de subconjuntos de um espaço topológico. Usaremos também o fato que variedades diferenciáveis são espaços topológicos regulares e normais.

5.1 Partições da unidade

As construções que faremos nesta seção são baseadas na existência de funções diferenciáveis que são positivas num subconjunto fixado de uma variedade e identicamente nula no complementar do conjunto.

Consideremos inicialmente a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & \text{se} \quad t > 0 \\ 0, & \text{se} \quad t \leq 0 \end{cases}. \tag{5.1}$$

Note que f é diferenciável e satisfaz $0 < f(t) < 1$, para todo $t > 0$.

Lema 5.1.1. Dados dois números reais $0 < r_1 < r_2$, existe uma função diferenciável $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $h \equiv 1$ em $\overline{B(0, r_1)}$, $0 < h(x) < 1$, para todo $x \in B(0, r_2) \setminus \overline{B(0, r_1)}$, e $h \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B(0, r_2)$.

Demonstração. Considere, inicialmente, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}, \tag{5.2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, onde f é a função definida em (5.1). Note que o denominador de g é positivo para todo $t \in \mathbb{R}$, pois pelo menos uma das expressões $r_2 - t$ ou $t - r_1$ é sempre positivo. Assim, por construção, g satisfaz $g \equiv 1$ para $t \leq r_1$, $0 < g(t) < 1$ para $r_1 < t < r_2$, e $g \equiv 0$ para $t \geq r_2$. Definimos agora $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pondo

$$h(x) = g(\|x\|),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde g é a função dada em (5.2). A função h é diferenciável em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, pois é composta de funções diferenciáveis. Além disso, h é constante e igual a 1 em $B(0, r_1)$, logo é globalmente diferenciável. $\square$

A função h construída no Lema 5.1.1 é usualmente chamada de *bump-function*. Ou seja, é uma função real que é constante e igual a 1 num conjunto fixado e identicamente nula no complementar de uma vizinhança do conjunto.

O *suporte* de uma função $f : M \to \mathbb{R}$, denotado por $\operatorname{supp}(f)$, é o fecho do conjunto dos pontos de M onde f não se anula:

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

Isso significa que se $p \in M$ é um ponto fora do suporte de f, então f é nula numa vizinhança de p. Por exemplo, se h é a bump-function construída no Lema 5.1.1, então

$$\operatorname{supp}(h) = \overline{B(0, r_2)}.$$

Definição 5.1.2. Uma *partição da unidade* para uma variedade diferenciável M^n é uma família $\{\xi_\alpha : \alpha \in I\}$ de funções diferenciáveis $\xi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

(i) $0 \leq \xi_\alpha(p) \leq 1$, para todo $\alpha \in I$ e todo $p \in M$.

(ii) A família $\{\text{supp}(\xi_\alpha) : \alpha \in I\}$ é localmente finita em M.

(iii) $\sum_{\alpha \in I} \xi_\alpha(p) = 1$, para todo $p \in M$.

Em virtude da condição (ii) da Definição 5.1.2 tem-se, para todo $p \in M$, que $\xi_\alpha(p) = 0$, exceto para um número finito de índices $\alpha \in I$. Assim, a função $\xi : M \to \mathbb{R}$, dada por

$$\xi(p) = \sum_{\alpha \in I} \xi_\alpha(p), \tag{5.3}$$

para todo $p \in M$, está bem definida e é diferenciável.

Definição 5.1.3. Seja $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ uma cobertura por abertos para a variedade M. Uma partição da unidade $\{\xi_\alpha : \alpha \in I\}$ é dita *subordinada* à cobertura $\mathcal{C}$ se

$$\text{supp}(\xi_\alpha) \subset U_\alpha,$$

para todo índice $\alpha \in I$.

Antes de provarmos a existência de partições da unidade, estabeleçamos a seguinte nomenclatura. Um subconjunto B de M^n é chamado uma *bola coordenada* para M se B é domínio de uma carta local φ em M tal que $\varphi(B) = B(0,r)$, onde $B(0,r)$ denota a bola aberta de $\mathbb{R}^n$ centrada em $0 \in \mathbb{R}^n$ e de raio $r > 0$. Além disso, dizemos que um subconjunto B de M^n é uma *bola coordenada regular* se existe uma bola coordenada $B' \subset M$, com $\overline{B} \subset B'$, tal que

$$\varphi(B) = B(0,r), \quad \varphi(\overline{B}) = \overline{B(0,r)} \quad \text{e} \quad \varphi(B') = B(0,r'),$$

com $0 < r < r'$.

Teorema 5.1.4 (Existência de partições da unidade)**.** *Dado uma cobertura aberta $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ para uma variedade diferenciável M^n, existe uma partição da unidade $\{\xi_\alpha : \alpha \in I\}$ subordinada à cobertura $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Cada aberto U_α da coleção $\mathcal{C}$ é, em particular, uma variedade diferenciável. Assim, admite uma base $\mathcal{B}_\alpha$ formada por bolas coordenadas regulares. A coleção

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha,$$

formada a partir das bases $\mathcal{B}_\alpha$, constitui uma base para a topologia de M. Como M é paracompacto, existe um refinamento enumerável $\{B_i : i \in J\}$ para a coleção $\mathcal{C}$, formada por elementos de $\mathcal{B}$, que é localmente finito. Além disso, a cobertura $\{\overline{B}_i : i \in J\}$ também é localmente finita. Para cada índice $i \in J$, o fato que B_i é uma bola coordenada regular em algum U_α garante a existência de uma bola coordenada $B_i' \subset U_\alpha$, com $\overline{B}_i \subset B_i'$, e uma carta local $\varphi_i : B_i' \to \mathbb{R}^n$ tais que

$$\varphi_i(B_i) = B(0, r_i), \quad \varphi_i(\overline{B}_i) = \overline{B(0, r_i)} \quad \text{e} \quad \varphi(B_i') = B(0, r_i'),$$

para alguns $0 < r_i < r_i'$. Para tal índice $i \in J$, defina uma função $f_i : M \to \mathbb{R}$ pondo

$$f_i = \begin{cases} h_i \circ \varphi_i & \text{em} \quad B_i' \\ 0 & \text{em} \quad M \setminus \overline{B}_i \end{cases},$$

onde $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma bump-function que é positiva em $B(0, r_i)$ e zero no complementar. No conjunto $B_i' \setminus \overline{B}_i$, onde as duas definições se superpõem, ambas produzem a função nula, logo f_i está bem definida e é diferenciável. Além disso, tem-se $\operatorname{supp}(f_i) = \overline{B}_i$. Defina agora uma função $f : M \to \mathbb{R}$ pondo

$$f(p) = \sum_{i \in J} f_i(p).$$

Como $\{\overline{B}_i : i \in J\}$ é localmente finito, esta soma tem somente uma quantidade finita de termos numa vizinhança de cada ponto e, assim, define uma função diferenciável. Além disso, cada f_i é não-negativa em M e positiva em B_i, e todo ponto de M pertence a algum B_i, logo $f(p) > 0$, para todo $p \in M$. Assim, as funções $g_i : M \to \mathbb{R}$, definidas por

$$g_i(p) = f_i(p)/f(p),$$

também são diferenciáveis e tem-se:

$$0 \leq g_i \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i \in J} g_i(p) = 1,$$

para todo $p \in M$. Finalmente, resta apenas re-indexar as funções g_i de modo que o conjunto de índices seja o mesmo da cobertura inicial $\mathcal{C}$. Como a cobertura $\{B_i' : i \in J\}$ é um refinamento de $\mathcal{C}$, para cada $i \in J$, escolha algum índice $a(i) \in I$ tal que $B_i' \subset U_{a(i)}$. Agora, para cada $\alpha \in I$, defina $\xi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ pondo

$$\xi_\alpha = \sum_{a(i)=\alpha} g_i.$$

Caso não exista índice i, com $a(i) = \alpha$, a soma acima deve ser interpretada como sendo a função nula. Temos:

$$\mathrm{supp}(\xi_\alpha) = \overline{\bigcup_{a(i)=\alpha} B_i} = \bigcup_{a(i)=\alpha} \overline{B}_i \subset U_\alpha.$$

Cada ξ_α é uma função diferenciável e satisfaz $0 \leq \xi_\alpha \leq 1$. Além disso, a família de suportes $\{\mathrm{supp}(\xi_\alpha) : \alpha \in I\}$ continua sendo localmente finita, e

$$\sum_{\alpha \in I} \xi_\alpha = \sum_{i \in J} g_i = 1,$$

e isso finaliza a demonstração. $\square$

Uma aplicação simples de partições da unidade é a extensão do conceito de bump-functions à variedades diferenciáveis. Dados uma variedade M, um fechado $F \subset M$, um aberto $U \subset M$, com $F \subset U$, uma função diferenciável $h : M \to \mathbb{R}$ é dita ser uma *bump-function* para F *suportada* em U se $0 \leq h \leq 1$ em M, $h \equiv 1$ em F, e $\mathrm{supp}(f) \subset U$.

Corolário 5.1.5 (Existência de bump-functions)**.** Para quaisquer fechado $F \subset M$ e aberto $U \subset M$, com $F \subset U$, existe uma bump-function $h : M \to \mathbb{R}$ para F suportada em U.

Demonstração. Basta considerar a partição da unidade $\{\xi_1, \xi_2\}$ subordinada à cobertura $\{U_1, U_2\}$, onde $U_1 = U$ e $U_2 = M \setminus F$. Como $\xi_2|_F \equiv 0$ e $\xi_1 + \xi_2 = 1$, a função $h = \xi_1$ satisfaz às condições exigidas. $\square$

5.2 O teorema de Tietze

Veremos nesta seção, como aplicação do conceito de partições da unidade, o clássico teorema de Tietze a respeito de extensão de aplicações diferenciáveis. Antes de prová-lo, apresentaremos uma versão diferenciável do Lema de Urysohn.

Lema 5.2.1 (Urysohn)**.** Considere dois subconjuntos fechados e disjuntos F, G de uma variedade diferenciável M. Então, existe uma função diferenciável $\xi : M \to \mathbb{R}$, com $\xi(M) \subset [0,1]$, tal que $\xi(p) = 1$, para todo $p \in F$, e $\xi(p) = 0$, para todo $p \in G$.

Demonstração. Os conjuntos $U_1 = M \backslash F$ e $U_2 = M \backslash G$ constituem uma cobertura aberta de M. Assim, pelo Teorema 5.1.4, existe uma partição da unidade $\{\xi_1, \xi_2\}$, subordinada a esta cobertura, i.e., $\xi_i(M) \subset [0,1]$ e $\text{supp}\xi_i \subset U_i$, $i = 1, 2$. Disso decorre que $\text{supp}\xi_1$ é disjunto de F e $\text{supp}\xi_2$ é disjunto de G. Assim, $\xi_2(p) = 0$ para todo $p \in G$ e $\xi_1(p) = 0$, para todo $p \in F$. Como $\xi_1 + \xi_2 = 1$, a hipótese $\xi_1(p) = 0$ implica $\xi_2(p) = 1$, para todo $p \in F$. Portanto, a função $\xi = \xi_2$ satisfaz as condições desejadas. $\square$

Teorema 5.2.2 (Tietze)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável definida num aberto U de uma variedade diferenciável M^m. Então, para todo fechado $F \subset M$, com $F \subset U$, existe uma aplicação diferenciável $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}^n$ tal que $\widetilde{f}|_F = f|_F$.*

Demonstração. Como M é normal, existe um aberto $V \subset M$ tal que $F \subset V$ e $\overline{V} \subset U$. A partir dos fechados disjuntos F e $M \backslash V$ obtemos, pelo Lema 5.2.1, uma função $\xi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\xi(p) = 1$, para todo $p \in F$, e $\xi(p) = 0$ para todo $p \notin V$. Defina $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$\widetilde{f}(p) = \begin{cases} \xi(p)f(p) & \text{se} \quad p \in U \\ 0 & \text{se} \quad p \in M \backslash U \end{cases}.$$

A restrição de $\widetilde{f}$ aos abertos U e $M \backslash \overline{V}$ é diferenciável. De fato, a restrição de $\widetilde{f}$ a U coincide com o produto $(\xi|_U)f$ e a restrição de $\widetilde{f}$ a $M \backslash \overline{V}$ é nula. Como $M = U \cup (M \backslash \overline{V})$, temos que $\widetilde{f}$ é diferenciável em M. Finalmente, como $\xi|_F \equiv 1$, segue que $\widetilde{f}|_F = f|_F$. $\square$

Observação 5.2.3. O Teorema 5.2.2 não é válido para aplicações que tomam valores numa variedade arbitrária. Por exemplo, a aplicação identidade $\text{Id} : S^1 \to S^1$ não pode ser estendida a uma aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to S^1$, de classe C^2. De fato, suponha que exista uma aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to S^1$ de classe, pelo menos C^2, tal que $F|_{S^1} = \text{Id}$. Escrevendo

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)),$$

tem-se que

$$f(\cos t, \sin t) = \cos t \quad \text{e} \quad g(\cos t, \sin t) = \sin t,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, se escrevermos

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \quad \text{e} \quad \mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

a integral curvilínea de $f\mathrm{d}g - g\mathrm{d}f$ sobre S^1 é dada por

$$\begin{aligned} \int_{S^1}(f\mathrm{d}g - g\mathrm{d}f) &= \int_{S^1}(\cos t \cdot \mathrm{d}(\sin t) - \sin t \cdot \mathrm{d}(\cos t)) \\ &= \int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)\mathrm{d}t = 2\pi. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $S^1 = \partial D^2$, o Teorema de Green fornece:

$$\begin{aligned} \int_{S^1}(f\mathrm{d}g - g\mathrm{d}f) &= \int_{S^1}\left[\left(f\frac{\partial g}{\partial x} - g\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(f\frac{\partial g}{\partial y} - g\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\right] \\ &= 2\iint_{D^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Como a expressão dentro dos parênteses na integral dupla acima é identicamente nula, pois é o determinante cujas colunas são os vetores $\mathrm{d}F(x,y)\cdot e_1$ e $\mathrm{d}F(x,y)\cdot e_2$, os quais são colineares por serem tangentes a S^1 no mesmo ponto $F(x,y)$, obtemos

$$\int_{S^1}(f\mathrm{d}g - g\mathrm{d}f) = 0,$$

o que é uma contradição.

5.3 O teorema de Whitney

Discutiremos agora o problema de saber se toda variedade diferenciável pode ser vista como subvariedade de algum espaço Euclidiano. Mais precisamente, dado uma variedade diferenciável M^m, queremos exibir um mergulho $f: M^m \to \mathbb{R}^n$, para algum n suficientemente grande. A resposta é positiva e foi provado por Whitney [20] em 1936 em um artigo que se tornou uma das referências no estudo das variedades diferenciáveis.

Teorema 5.3.1 (Whitney). *Qualquer variedade diferenciável M^n pode ser mergulhada como uma subvariedade fechada de $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

A prova do Teorema 5.3.1 tem sido simplificada e tem hoje diferentes abordagens da prova original de Whitney. Dentre os textos clássicos da literatura Guillemin - Pollack [7], Hirsch [8] e Lee [10], uma abordagem mais completa do assunto pode ser encontrada em [1], onde a prova do Teorema 5.3.1 é apresentada com detalhes.

O teorema seguinte é uma versão parcial do Teorema de Whitney, válida apenas para variedades compactas e sem a estimativa sobre a dimensão do espaço Euclidiano onde mergulhamos a variedade M.

Teorema 5.3.2. *Toda variedade diferenciável compacta M^m pode ser mergulhada em algum espaço Euclidiano.*

Demonstração. Para cada ponto $p \in M$, escolha uma carta local (U_p, φ_p) em M, com $p \in U_p$. Como M é regular, todo ponto de M possui um sistema fundamental de vizinhanças fechadas. Assim, existem abertos $W_p, V_p \subset M$ tais que

$$p \in W_p \subset \overline{W}_p \subset V_p \subset \overline{V}_p \subset U_p.$$

Pelo Teorema 5.2.2, existe uma aplicação diferenciável $\phi_p : M \to \mathbb{R}^m$ que coincide com φ_p no fechado $\overline{V}_p$. Pelo Lema 5.2.1, existe uma função diferenciável $\xi_p : M \to \mathbb{R}$ que é igual a 1 no fechado $\overline{W}_p$ e é igual a zero no fechado $M \backslash V_p$. Como M é compacta, a cobertura aberta $M = \bigcup_{p \in M} W_p$ possui uma subcobertura finita $M = \bigcup_{i=1}^r W_{p_i}$. Definimos uma aplicação $f : M \to \mathbb{R}^n$ pondo:

$$f(p) = \big(\phi_{p_1}(p), \ldots, \phi_{p_r}(p), \xi_{p_1}(p), \ldots, \xi_{p_r}(p)\big),$$

para todo $p \in M$, onde $n = rm + r$. Tem-se que f é uma aplicação diferenciável. Provemos que f é um mergulho. De fato, dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, temos:

$$\mathrm{d}f(p) \cdot v = \big(\mathrm{d}\phi_{p_1}(p) \cdot v, \ldots, \mathrm{d}\phi_{p_r}(p) \cdot v, \mathrm{d}\xi_{p_1}(p) \cdot v, \ldots, \mathrm{d}\xi_{p_r}(p) \cdot v\big).$$

Assuma que $\mathrm{d}f(p) \cdot v = 0$. Seja $s \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $p \in W_{p_s}$. Como as aplicações ϕ_{p_s} e φ_{p_s} coincidem no aberto W_{p_s}, temos que

$$\mathrm{d}\varphi_{p_s}(p) \cdot v = \mathrm{d}\phi_{p_s}(p) \cdot v = 0.$$

Como φ_{p_s} é um difeomorfismo, temos que $\mathrm{d}\varphi_{p_s}(p)$ é um isomorfismo, donde concluimos que $v = 0$. Isso prova que f é uma imersão. Como M é compacta, para estabelecer que f é um mergulho é suficiente provar que f é injetora. Sejam $p, q \in M$ com $f(p) = f(q)$. Disso decorre que

$$\phi_{p_i}(p) = \phi_{p_i}(q) \quad \text{e} \quad \xi_{p_i}(p) = \xi_{p_i}(q),$$

para todo $1 \leq i \leq r$. Seja $s \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $p \in W_{p_s}$. Temos que $\xi_{p_s}(p) = 1$ e, portanto, $\xi_{p_s}(q) = 1$. Como $\xi_{p_s} \equiv 0$ em $M \backslash V_{p_s}$, segue que $q \in \overline{V}_{p_s}$. Como ϕ_{p_s} coincide com a carta φ_{p_s} em $\overline{V}_{p_s}$, a restrição de ϕ_{p_s} a $\overline{V}_{p_s}$ é injetora. Assim, as condições $\phi_{p_s}(p) = \phi_{p_s}(q)$ e $p, q \in \overline{V}_{p_s}$ implicam $p = q$, e isso finaliza a demonstração. $\square$

5.4 Exercícios

5.1

1. Uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ é dita ser uma *função exaustão* para M se, para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}((-\infty, c])$ é compacto. Prove que toda variedade diferenciável admite funções exaustão.

5.2

1. Dado uma variedade diferenciável M^m, considere um ponto $p \in M$, um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e uma aplicação linear $L : T_pM \to \mathbb{R}^n$. Prove que existe uma aplicação diferenciável $f : M^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(p) = x$ e $\mathrm{d}f(p) = L$.

Capítulo 6

Campos vetoriais

6.1 O fibrado tangente

Dado uma variedade diferenciável M^n, denotemos por TM a união disjunta de todos os espaços tangentes a M. Mais precisamente, definimos:

$$TM = \bigcup_{p \in M} \big(\{p\} \times T_pM\big).$$

O conjunto TM é chamado o *fibrado tangente* de M. Um dos objetivos desta seção é provar que TM pode ser visto de maneira natural como uma variedade diferenciável. Para isso, definimos uma aplicação $\pi : TM \to M$ pondo

$$\pi(p, v) = p,$$

para quaisquer $p \in M$ e $v \in T_pM$. A aplicação π é claramente sobrejetora, e é chamada a *projeção canônica* de TM sobre M. Quando necessário, indentificaremos o espaço tangente T_pM com o subconjunto $\{p\} \times T_pM$ de TM através da bijeção natural

$$v \in T_pM \mapsto (p, v) \in \{p\} \times T_pM.$$

Teorema 6.1.1. *O fibrado tangente TM é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.*

Demonstração. Dado uma carta local (U, φ) em M, definimos uma aplicação $\overline{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ pondo

$$\overline{\varphi}(p, v) = \big(\varphi(p), \mathrm{d}\varphi(p) \cdot v\big),$$

para quaisquer $p \in U$ e $v \in T_pM$. Como φ é bijetora e $\mathrm{d}\varphi(p)$ é um isomorfismo linear para todo $p \in U$, a aplicação $\overline{\varphi}$ é bijetora. Como $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ é um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$, segue que $\overline{\varphi}$ é uma carta local em TM. Provaremos que

$$\mathcal{A} = \{\overline{\varphi} : (U, \varphi) \text{ é carta de } M\}$$

é um atlas em TM. Em primeiro lugar, é fácil ver que os domínios das aplicações de $\mathcal{A}$ cobrem TM. Sejam então (U, φ), (V, ψ) cartas locais em M. Temos:

$$\overline{\varphi}\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\big) = \overline{\varphi}\big(\pi^{-1}(U \cap V)\big) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

e

$$\overline{\psi}\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\big) = \overline{\psi}\big(\pi^{-1}(U \cap V)\big) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n.$$

Como $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$, segue que os conjuntos imagens

$$\overline{\varphi}\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\big) \quad \text{e} \quad \overline{\psi}\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\big)$$

são abertos em $\mathbb{R}^{2n}$. Dado um ponto $(x, h) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, tem-se que $\overline{\varphi}^{-1}(x, h) = (p, v)$, onde $p = \varphi^{-1}(x)$ e $v = \mathrm{d}\varphi(p)^{-1} \cdot h$. Além disso, se $p \in V$ então $\overline{\psi}(p, v) = (\psi(p), \mathrm{d}\psi(p) \cdot v)$. Temos:

$$\mathrm{d}\psi(p) \cdot v = \big(\mathrm{d}\psi(\varphi^{-1}(x)) \cdot \mathrm{d}\varphi(\varphi^{-1}(x))^{-1}\big) \cdot h = \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(x) \cdot h.$$

Assim, a aplicação de transição

$$\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n,$$

de $\overline{\varphi}$ para $\overline{\psi}$, é dada por

$$\big(\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}\big)(x, h) = \big((\psi \circ \varphi^{-1})(x), \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(x) \cdot h\big).$$

Como $\psi \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável, o mesmo vale para $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}$. De forma análoga podemos provar que a inversa de $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}$, que é igual a $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}^{-1}$, também é diferenciável. Isso prova que $\mathcal{A}$ é um atlas em TM. Resta provar que a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em TM é Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Antes disso, provemos que a projeção π é contínua, onde TM está munido da topologia induzida por $\mathcal{A}$. De fato, se $U \subset M$ é o domínio de uma carta φ em M, então $\pi^{-1}(U)$ é aberto em TM, pois $\pi^{-1}(U)$ é o domínio da carta $\overline{\varphi}$. Em geral, se $U \subset M$ é um aberto arbitrário, então $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, onde U_α é o domínio de uma carta em M, para todo $\alpha \in I$. Assim, $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} \pi^{-1}(U_\alpha)$ é aberto em TM. Provemos então que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ é Hausdorff. Sejam (p, v), (q, w) pontos distintos em TM. Se $p \neq q$ então, como M é Hausdorff, existem abertos disjuntos $U, V \subset M$, com $p \in U$ e $q \in V$. Assim, $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ são abertos disjuntos em TM contendo (p, v) e (q, w), respectivamente. Se $p = q$, seja (U, φ) uma carta em M, com $p \in U$. Como $\mathrm{d}\varphi(p) \cdot v \neq \mathrm{d}\varphi(p) \cdot w$, existem abertos disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ contendo $\mathrm{d}\varphi(p) \cdot v$ e $\mathrm{d}\varphi(p) \cdot w$, respectivamente. Assim, $\overline{\varphi}^{-1}\big(\varphi(U) \times A\big)$ e $\overline{\varphi}^{-1}\big(\varphi(U) \times B\big)$ são abertos disjuntos em TM contendo (p, v) e (q, w), respectivamente. Provemos agora que a topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Como M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, temos que o atlas maximal que define a estrutura diferenciável de M contém um atlas enumerável $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$. Assim, $\{\overline{\varphi}_i : i \in \mathbb{N}\}$ é um atlas enumerável para TM e, portanto, TM satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade (cf. Exercícios 6.1.3 e 6.1.4). $\square$

Veremos agora algumas propriedades básicas do fibrado tangente.

Lema 6.1.2. A projeção $\pi : TM \to M$ é uma submersão.

Demonstração. Dado uma carta local (U, φ) em M, considere a correspondente carta local $\overline{\varphi}$ em TM. Como $\pi(\pi^{-1}(U)) \subset U$, a representação de π em relação às cartas locais $\overline{\varphi}$ e φ é a projeção $\overline{\pi} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to \varphi(U)$ dada por $\overline{\pi}(x, h) = x$, que é uma submersão.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{\varphi}"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\overline{\pi}"] & \varphi(U) \end{tikzcd}$$

Isso prova que a restrição de π a $\pi^{-1}(U)$ é uma submersão. Como φ é uma carta arbitrária, segue a conclusão. $\square$

Lema 6.1.3. Sejam M uma variedade diferenciável e $W \subset M$ um subconjunto aberto. Então TW é um aberto de TM tal que a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente da variedade W coincide com a estrutura diferenciável que TM induz no aberto TW.

Demonstração. Observe inicialmente que, como $T_pW = T_pM$, para todo $p \in W$, tem-se $TW = \pi^{-1}(W)$. Além disso, como π é contínua, segue que TW é aberto em TM. A estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de W é o atlas maximal que contém as cartas locais da forma $\overline{\varphi}$, onde (U, φ) é uma carta de W. Se (U, φ) é uma carta de W, então (U, φ) também é carta em M, logo $\overline{\varphi}$ é uma carta de TM com domínio contido em TW, provando que $\overline{\varphi}$ pertence à estrutura diferenciável induzida por TM no aberto TW. $\square$

Exemplo 6.1.4. Seja E um espaço vetorial real n-dimensional. Para cada ponto $p \in E$, tem-se $T_pE = E$, logo

$$TE = \bigcup_{p \in E} \big(\{p\} \times T_pE\big) = E \times E.$$

Se $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear, φ é uma carta para a variedade E, e a carta correspondente $\overline{\varphi} : E \times E \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em TE é dada por

$$\overline{\varphi}(p, v) = (\varphi(p), \varphi(v)).$$

Isso mostra, em particular, que $\overline{\varphi} : E \times E \to \mathbb{R}^{2n}$ é um isomorfismo linear. Portanto, tanto a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de E quanto a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real $E \times E$ contém o atlas

$$\mathcal{A} = \{\overline{\varphi} : \varphi \text{ é carta de } E\}.$$

Isso prova que a estrutura diferenciável usual de TE coincide com a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real $E \times E$.

Como consequência do Lema 6.1.3 e do Exemplo 6.1.4, temos o seguinte

Corolário 6.1.5. Se W é um aberto de $\mathbb{R}^n$, então $TW = W \times \mathbb{R}^n$, e a estrutura diferenciável usual do fibrado tangente de W coincide com a estrutura diferenciável induzida por $\mathbb{R}^{2n}$ no aberto $W \times \mathbb{R}^n$.

Finalizaremos essa seção mostrando a relação existente entre o espaço tangente T_pM com o fibrado tangente TM.

Proposição 6.1.6. Cada espaço tangente T_pM é subvariedade do fibrado tangente TM. Além disso, a estrutura diferenciável usual do espaço vetorial T_pM coincide com a estrutura diferenciável induzida por TM em T_pM.

Demonstração. Como $T_pM = \pi^{-1}(p)$ e π é uma submersão, segue que T_pM é uma subvariedade de TM. Dado uma carta (U, φ) em M, considere a carta correspondente $\overline{\varphi}$ em TM. Temos:

$$\overline{\varphi}\big(\pi^{-1}(U) \cap T_pM\big) = \overline{\varphi}(T_pM) = \{\varphi(p)\} \times \mathbb{R}^n.$$

Considere o difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ definido por

$$\phi(x, h) = (h, x - \varphi(p)).$$

Segue que $\phi \circ \overline{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \phi(\varphi(U) \times \mathbb{R}^n)$ é uma carta em TM e:

$$(\phi \circ \overline{\varphi})\big(\pi^{-1}(U) \cap T_pM\big) = \mathbb{R}^n = \phi\big(\varphi(U) \cap \mathbb{R}^n\big) \cap \mathbb{R}^n,$$

i.e., $\phi \circ \overline{\varphi}$ é uma carta de TM que satisfaz a relação (3.1). A restrição de $\phi \circ \overline{\varphi}$ a T_pM nos fornece uma carta local em T_pM pertencente à estrutura diferenciável induzida por TM em T_pM. Tal restrição é dada por

$$v \in T_pM \mapsto (\phi \circ \overline{\varphi})(p, v) = \mathrm{d}\varphi(p) \cdot v \in \mathbb{R}^n.$$

Mas $\mathrm{d}\varphi(p) : T_pM \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear e, portanto, é também uma carta local pertencente à estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real T_pM. Concluimos então que o atlas $\{\mathrm{d}\varphi(p)\}$ em T_pM está contido tanto na estrutura diferenciável induzida por TM em T_pM como na estrutura diferenciável usual do espaço vetorial real T_pM. $\square$

6.2 Campos vetoriais

Uma das motivações para termos introduzido o fibrado tangente é a noção de campo vetorial, que discutiremos nessa seção.

Definição 6.2.1. Um *campo vetorial* numa variedade diferenciável M^n é simplesmente uma aplicação $X : M \to TM$ que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

comutativo.

Em outras palavras, uma aplicação $X : M \to TM$ é um campo vetorial se, e somente se, X é uma inversa à direita da projeção canônica π. Um campo vetorial X numa variedade M é também chamado uma *seção* do fibrado tangente TM, no sentido de que $X(p) \in T_pM$, para todo $p \in M$.

O conjunto de todos os campos vetoriais diferenciáveis de uma variedade diferenciável será denotado por $\mathfrak{X}(M)$. Com as operações naturais

$$\begin{aligned} (X + Y)(p) &= X(p) + Y(p), \\ (cX)(p) &= cX(p), \end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ e $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\mathfrak{X}(M)$ torna-se um espaço vetorial real (cf. Exercício 6.2.3).

Dados um campo vetorial $X : M \to TM$ e uma carta local (U, φ) em M, podemos escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

para todo $p \in U$, onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função no aberto U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ é a base de T_pM associada à carta φ. Considerando a carta $\overline{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ em TM, associada a φ, temos:

$$\overline{\varphi}(p, X(p)) = (\varphi(p), a_1(p), \dots, a_n(p)),$$

para todo $p \in U$. Assim,

$$\big(\overline{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}\big)(x) = \big(x, (a_1 \circ \varphi^{-1})(x), \dots, (a_n \circ \varphi^{-1})(x)\big),$$

para todo $x \in \varphi(U)$. Portanto, X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis, para todo $1 \leq i \leq n$.

Lema 6.2.2. Todo campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um mergulho.

Demonstração. Decorre diretamente do Exercício 3.5.**??**, observando que a projeção $\pi : TM \to M$ é uma inversa diferenciável à esquerda para X. □

Corolário 6.2.3. A imagem de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é uma subvariedade de TM, e a restrição da projeção $\pi : TM \to M$ a $X(M)$ é um difeomorfismo da imagem de X sobre M.

Demonstração. Como X é um mergulho, em virtude do Lema 6.2.2, segue que $X(M)$ é uma subvariedade de TM e $X : M \to X(M)$ é um difeomorfismo. Para concluir a prova, basta observar que $\pi|_{X(M)} : X(M) \to M$ é a inversa de $X : M \to X(M)$. □

6.3 Curvas integrais e o fluxo local

Nesta seção faremos um estudo mais detalhado do fibrado tangente e de suas seções, os campos vetoriais. Mais precisamente, veremos que um campo vetorial em uma variedade diferenciável pode ser interpretado como uma equação diferencial, no sentido que passaremos a descrever.

Definição 6.3.1. Sejam M^n uma variedade diferenciável e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Uma curva diferenciável $\alpha \colon I \to M$ é chamada uma *curva integral* de X se $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, para todo $t \in I$.

Dado uma carta local (U, φ) em M, escrevamos

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

para todo $p \in U$. Assim, se $\alpha\colon I \to M$ é uma curva integral de X, com $\alpha(I) \subset U$, temos:

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) = X(\alpha(t)) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\varphi(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \mathrm{d}\varphi(\alpha(t)) \cdot X(\alpha(t)) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi \circ \alpha)(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \circ \alpha)(t) e_i.
\end{aligned}$$

Assim, a condição $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ dá a expressão local

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_i \circ \alpha) = a_i \circ \alpha,$$

para todo $1 \leq i \leq$, que constitui um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem.

O teorema fundamental de existência e unicidade para as soluções de tais sistemas tem a seguinte consequência neste contexto:

Teorema 6.3.2. *Para cada $p \in M^n$, existe um intervalo aberto $I = (a, b)$, contendo 0, onde está definida a única curva integral $\alpha\colon I \to M$ do campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\alpha(0) = p$.*

Uma consequência do Teorema 6.3.2 é o seguinte

Corolário 6.3.3. Sejam $\alpha_1\colon I_1 \to M$ e $\alpha_2\colon I_2 \to M$ curvas integrais de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $\alpha_1(c) = \alpha_2(c)$, para algum $c \in I_1 \cap I_2$. Então, $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$, para todo $t \in I_1 \cap I_2$.

Demonstração. Defina o conjunto $I = \{t \in I_1 \cap I_2 : \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$. Temos que $I \neq \emptyset$, pois $c \in I$. Um argumento simples de continuidade nos dá que I é aberto e fechado em $I_1 \cap I_2$. Como estamos supondo que os intervalos I_1 e I_2 são conexos, segue que $I = I_1 \cap I_2$. $\square$

A proposição seguinte é conhecida como a *invariância por translação do parâmetro.*

Proposição 6.3.4. Seja $\alpha\colon I \to M$ uma curva integral de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dado uma constante $c \in \mathbb{R}$, considere os subconjuntos

$$L_c(I) = \{t - c : t \in I\} \quad \text{e} \quad R_c(I) = \{t + c : t \in I\},$$

e defina as curvas $\gamma\colon L_c(I) \to M$ e $\beta\colon R_c(I) \to M$, pondo

$$\gamma(t) = \alpha(t + c) \quad \text{e} \quad \beta(t) = \alpha(t - c).$$

Então, γ e β são curvas integrais de X.

Demonstração. De fato, temos:

$$\gamma'(t) = \alpha'(t + c) = X(\alpha(t + c)) = X(\gamma(t))$$

e

$$\beta'(t) = \alpha'(t - c) = X(\alpha(t - c)) = X(\beta(t)),$$

provando a afirmação. $\square$

Definição 6.3.5. Um *fluxo local* para um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ em torno de um ponto $q \in M^n$ é uma aplicação diferenciável $\varphi\colon (-\epsilon, \epsilon)\times U \to M$, onde $U \subset M$ é um aberto contendo q, que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Para cada $p \in U$, a curva $\lambda_p\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$, dada por $\lambda_p(t) = \varphi(t, p)$, é uma curva integral de X, com $\lambda_p(0) = p$.

(b) Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a aplicação $\varphi_t\colon U \to M$ é um difeomorfismo sobre sua imagem, com $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$.

Seja $\varphi\colon (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ um fluxo local para um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dado um ponto $p \in U$, as curvas

$$\lambda_1(t) = \varphi_{t+s}(p) \quad \text{e} \quad \lambda_2(t) = \varphi_t(\varphi_s(p))$$

são curvas integrais de X, com $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = \varphi_s(p)$. Assim, pelo Corolário 6.3.3, temos que

$$\varphi_t(\varphi_s(p)) = \varphi_{t+s}(p),$$

desde que ambos os lados estejam definidos. Disso também decorre que

$$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s,$$

quando definidas. Esta é a chamada *propriedade local de grupo*, pois se φ_t estivesse definida para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_t \in \mathrm{Dif}(M)$$

seria um homomorfismo de grupos. Veremos a seguir algumas condições para que isso ocorra.

O teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [10, Theorem 9.12], garante a existência do fluxo local.

Teorema 6.3.6. *Sejam M uma variedade diferenciável e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dado um ponto $q \in M$, existe um fluxo local $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ para X em torno de q tal que, para cada $p \in U$, a curva $\lambda_p : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, dada por $\lambda_p(t) = \varphi(t, p)$, é a única curva integral de X, com $\varphi(0, p) = p$.*

A unicidade no Teorema 6.3.6 significa que se (a,b) é um intervalo aberto, com $(a,b) \subset (-\epsilon,\epsilon)$, e se $\alpha : (a,b) \to U$ é uma curva integral de X, com $\alpha(0) = p \in U$, então $\alpha(t) = \varphi(t,p)|_{(a,b)}$.

Nas condições do Teorema 6.3.6, suponhamos que $p \in M$ seja uma singularidade isolada de X, ou seja, $X(p) = 0$. O resultado seguinte, cuja prova pode ser encontrada em [7], assegura que o fluxo local pode ser escolhido de modo que, localmente, p seja o único ponto fixo das aplicações $\{\varphi_t\}$.

Teorema 6.3.7. *Dados um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma singularidade isolada q para X, existe uma aplicação diferenciável $\varphi : (-\epsilon,\epsilon) \times U \to M$, onde U é uma vizinhança de q em M, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) Para cada $p \in U$, a curva $\lambda_p : (-\epsilon,\epsilon) \to M$, dada por $\lambda_p(t) = \varphi(t,p)$, é a única curva integral de X, com $\varphi(0,p) = p$.

(ii) Para cada $t \in (-\epsilon,\epsilon)$, a aplicação $\varphi_t : U \to M$, dada por $\varphi_t(p) = \varphi(t,p)$, é um difeomorfismo sobre $\varphi_t(U)$ e q é o único ponto fixo.

Proposição 6.3.8. Seja $\alpha : (a,b) \to M$ uma curva integral de $X \in \mathfrak{X}(M)$. Suponha que exista uma sequência (t_n) de pontos em (a,b) tal que $t_n \to b$ e $(\alpha(t_n))$ possui uma subsequência que converge para $p_0 \in M$. Então, existe $\delta > 0$ e uma curva integral $\widetilde{\alpha} : (a, b+\delta) \to M$ de X tal que $\widetilde{\alpha}|_{(a,b)} = \alpha$.

Demonstração. Seja $\varphi : (-\epsilon,\epsilon) \times U \to M$ o fluxo local de X em torno de p_0. Assim, para todo $p \in U$, a curva $\lambda_p : (-\epsilon,\epsilon) \to M$, dada por $\lambda_p(t) = \varphi(t,p)$, é a única curva integral de X, com $\lambda_p(0) = p$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq 0$, $t_n \in (b - \epsilon/2, b + \epsilon/2)$ e $\alpha(t_n) \in U$, para todo $n \geq n_0$. Assim, dado $n \geq n_0$, defina uma curva $\beta : R_{t_n}(-\epsilon,\epsilon) \to M$ pondo

$$\beta(t) = \lambda_{p_n}(t - t_n),$$

onde $p_n = \alpha(t_n) \in U$. Então, pela Proposição 6.3.4, β é uma curva integral de X tal que

$$\beta(t_n) = \lambda_{p_n}(0) = p_n = \alpha(t_n).$$

Assim, pelo Corolário 6.3.3, segue que $\beta(t) = \alpha(t)$, para todo instante t na interseção $(a,b) \cap R_{t_n}(-\epsilon,\epsilon)$. Defina, então,

$$\widetilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in (a,b) \\ \beta(t), & t \in R_{t_n}(-\epsilon,\epsilon) \end{cases}.$$

Temos que $\widetilde{\alpha}$ está bem definida, e está definida no intervalo $(a, t_n + \epsilon)$ que contém $(a, b + \epsilon/2)$, pois

$$R_{t_n}(-\epsilon,\epsilon) = t_n + (-\epsilon,\epsilon).$$

Além disso, tem-se $\widetilde{\alpha}|_{(a,b)} = \alpha$. Portanto, basta tomar $\delta = \epsilon/2$. $\square$

Sejam M uma variedade diferenciável e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dado um ponto $p \in M$, considere a família $\{\alpha_i : i \in I\}$ formada por todas as curvas integrais $\alpha_i : (-\epsilon_i, \epsilon_i) \to M$ de X, com $\alpha_i(0) = p$, para todo $i \in I$. O conjunto $I_p = \bigcup_{i\in I}(-\epsilon_i, \epsilon_i)$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ contendo 0. Defina uma curva $\alpha_p : I_p \to M$ pondo

$$\alpha_p(t) = \alpha_i(t),$$

se $t \in (-\epsilon_i, \epsilon_i)$. Pelo Corolário 6.3.3, α_p está bem definida e é uma curva integral de X, com $\alpha_p(0) = p$, chamada a *curva integral maximal* de X passando pelo ponto p.

Exemplo 6.3.9. Em $\mathbb{R}^2$, considere o campo $X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$. Então, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva integral de X se, e somente se,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y.$$

Assim, devemos ter $x(t) = Ae^t$ e $y(t) = Be^{-t}$, com $A, B \in \mathbb{R}$. Portanto, a curva integral maximal de X, passando pelo ponto $p = (p_1, p_2)$, é dada por

$$\alpha_p(t) = (p_1 e^t, p_2 e^{-t}),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

As curvas integrais maximais de um campo X têm a seguinte caracterização:

Proposição 6.3.10. Seja $\alpha_p : I_p \to M$ a curva integral maximal de $X \in \mathfrak{X}(M)$, com $\alpha_p(0) = p$. Se $\alpha : (a,b) \to M$ é uma curva integral de X e existe $t_0 \in (a,b) \cap I_p$ tal que $\alpha(t_0) = \alpha_p(t_0)$, então $(a,b) \subset I_p$ e $\alpha = \alpha_p|_{(a,b)}$.

Demonstração. Defina uma curva $\beta : I_p \cup (a,b) \to M$ pondo

$$\beta(t) = \begin{cases} \alpha_p(t), & t \in I_p \\ \alpha(t), & t \in (a,b) \end{cases}.$$

O Corolário 6.3.3 mostra que β está bem definida e é uma curva integral de X. Como $\beta(0) = \alpha_p(0) = p$, concluimos que $I_p \cup (a,b) \subset I_p$, logo $(a,b) \subset I_p$ e $\alpha(t) = \beta(t) = \alpha_p(t)$, para todo $t \in (a,b)$. $\square$

6.4 Campos vetoriais completos

Nesta seção discutiremos condições para que as curvas integrais maximais de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ estejam definidas em todo $\mathbb{R}$.

Proposição 6.4.1. Dados um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e um ponto $p \in M$, seja $\alpha_p \colon I_p \to M$ a curva integral maximal de X passando por p. Então:

(a) Se existe um compacto $K \subset M$ tal que $\alpha_p(I_p) \subset K$, então $I_p = \mathbb{R}$.

(b) Se existe $t_0 \in I_p$ tal que $X(\alpha_p(t_0)) = 0$ então $I_p = \mathbb{R}$ e $\alpha_p \equiv p$.

Demonstração. (a) Se $I_p \subsetneq \mathbb{R}$ existe, digamos, $b = \sup I_p$. Seja (t_n) uma sequência em I_p, com $t_n \to b$. Como $K \subset M$ é compacto e $(\alpha_p(t_n))$ é uma sequência contida em K, existe uma subsequência (t_{n_k}) de (t_n) tal que $\alpha_p(t_{n_k}) \to p_0 \in M$. Assim, pela Proposição 6.3.8, existe $\delta > 0$ e uma curva integral $\widetilde{\alpha} \colon I_p \cup (b, b+\delta) \to M$ de X tal que $\widetilde{\alpha}_p|_{I_p} = \alpha_p$, contradizendo o fato de α_p ser maximal.

(b) Defina uma curva $\beta \colon \mathbb{R} \to M$ pondo $\beta(t) = \alpha_p(t_0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\beta'(t) = 0 = X(\alpha_p(t_0)) = X(\beta(t)),$$

i.e., β é uma curva integral de X com $\beta(t_0) = \alpha_p(t_0)$. Assim, pelo Corolário 6.3.3, temos que $\beta(t) = \alpha_p(t)$, para todo $t \in I_p \cap \mathbb{R} = I_p$. Disso decorre que $\beta(0) = p$ e, portanto, β é uma curva integral de X passando por p. Logo, pela Proposição 6.3.10, temos que $\mathbb{R} \subset I_p$. Portanto, $I_p = \mathbb{R}$ e $\alpha_p(t) = p$, para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Corolário 6.4.2. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ com suporte compacto. Se $\alpha_p \colon I_p \to M$ é a curva integral maximal de X passando por p então $I_p = \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $K = \operatorname{supp} X$. Temos duas possibilidades: se $\alpha_p(I_p) \subset K$ então, pelo item (a) da Proposição 6.4.1, tem-se que $I_p = \mathbb{R}$; se existe $t_0 \in I_p$ tal que $\alpha_p(t_0) \notin K$ então $X(\alpha_p(t_0)) = 0$. Assim, pelo item (b) da Proposição 6.4.1 tem-se que $I_p = \mathbb{R}$. □

Motivados pelo Corolário 6.4.2, temos a seguinte:

Definição 6.4.3. Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dito ser *completo* se, para todo $p \in M$, o domínio da curva integral maximal de X passando por p é todo $\mathbb{R}$.

Segue então diretamente do Corolário 6.4.2 que todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ com suporte compacto é completo.

Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos

$$\mathcal{D} = \{(t,p) : t \in I_p\},$$

onde I_p é o domínio da curva integral maximal α_p de X passando por p. Definimos também uma aplicação $\varphi\colon \mathcal{D} \to M$ pondo

$$\varphi(t,p) = \alpha_p(t), \tag{6.1}$$

para todo $(t,p) \in \mathcal{D}$. Pelo Teorema 6.3.6, $\mathcal{D}$ contém uma vizinhança de $\{0\} \times M$ no qual φ é diferenciável. Este resultado pode ser melhorado, como mostra a proposição seguinte.

Proposição 6.4.4. A aplicação $\varphi\colon \mathcal{D} \to M$, definida em (6.1), é diferenciável.

Demonstração. Dado um ponto $p \in M$, seja C o conjunto formado pelos números reais $t \in I_p$ tais que (t,p) é ponto interior de $\mathcal{D}$ e φ é diferenciável numa vizinhança de (t,p). Temos que C é aberto em I_p e, pelo Teorema 6.3.6, tem-se que $0 \in C$, logo $C \neq \emptyset$. Provemos que C também é fechado em I_p. De fato, seja $b \in I_p$ um ponto aderente a C. Pelo Teorema 6.3.6, existem $\delta > 0$ e um aberto $V \subset M$ contendo $\alpha_p(b)$ tais que $(-\delta,\delta) \times V \subset \mathcal{D}$ e $\varphi\colon (-\delta,\delta) \times V \to M$ é diferenciável. Escolhendo um ponto $c \in C$ tal que $|b-c| < \delta$ e $\alpha_p(c) \in V$, existem $\epsilon > 0$ e um aberto $W \subset M$ contendo p tal que $(c-\epsilon, c+\epsilon) \times W \subset \mathcal{D}$ é outro subconjunto no qual φ é diferenciável. Em particular, a aplicação $\varphi_c = \varphi(c,\cdot)$ é contínua em W. Assim, existe um aberto $U \subset M$, com $p \in U \subset W$, tal que $\varphi_c(U) \subset V$. Então, se $q \in U$ temos que $\lambda(t) = \varphi(t-c, \varphi(c,q))$ é uma curva integral de X definida para $t - c \in (-\delta,\delta)$, com $\lambda(c) = \varphi(c,q)$. Logo,

$$\varphi(t,q) = \varphi(t-c, \varphi(c,q)),$$

para quaisquer $(t,q) \in (c-\delta, c+\delta) \times U$. Isso mostra que $(c-\delta, c+\delta) \times U \subset \mathcal{D}$ e φ é diferenciável neste conjunto. Como $|b-c| < \delta$, concluimos que $b \in C$, ou seja, C é fechado em I_p. Portanto, $C = I_p$, e a prova está concluida. $\square$

A aplicação $\varphi\colon \mathcal{D} \to M$, definida em (6.1), é chamada o *fluxo maximal* do campo X. Observe que X é completo se, e somente se, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times M$.

Seja $\varphi\colon \mathcal{D} \to M$ o fluxo maximal de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $t \in I$, defina $\mathcal{D}_t = \{p \in M : t \in I_p\}$ e considere a aplicação $\varphi_t\colon \mathcal{D}_t \to M$ definida por

$$\varphi_t(p) = \varphi(t,p).$$

Note que, em geral, o domínio de φ_t depende de t. Como $I_p \neq \emptyset$, para todo $p \in M$, segue que $M = \bigcup_{t>0} \mathcal{D}_t$.

Teorema 6.4.5. *Dado $s \in I$, seja $t \in I$ tal que $t \in I_{\alpha_p(s)}$, para todo $p \in \mathcal{D}_s$. Então, $t+s \in I_p$, para todo $p \in \mathcal{D}_s$, e vale:*

$$(\varphi_t \circ \varphi_s)(p) = \varphi_{s+t}(p), \tag{6.2}$$

para todo $p \in \mathcal{D}_s$. Decorre, em particular, que $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \mathrm{Id}$, logo φ_t é um difeomorfismo sobre $\mathcal{D}_{-t}$, cujo inverso é φ_{-t}.

Demonstração. Dado $p \in \mathcal{D}_s$, seja $\alpha_{\alpha_p(s)}\colon I_{\alpha_p(s)} \to M$ a curva integral de X, com $\alpha_{\alpha_p(s)}(0) = \alpha_p(s)$. Defina uma curva $\beta\colon R_s\left(I_{\alpha_p(s)}\right) \to M$ pondo

$$\beta(t) = \alpha_{\alpha_p(s)}(t-s).$$

Temos que β é uma curva integral de X tal que $\beta(s) = \alpha_p(s)$. Definimos agora uma curva $\alpha\colon I_p \cup R_s\left(I_{\alpha_p(s)}\right) \to M$ pondo

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_p(t), & t \in I_p \\ \beta(t), & t \in R_s\left(I_{\alpha_p(s)}\right) \end{cases}.$$

A curva α está bem definida e é uma curva integral de X, com $\alpha(p) = 0$. Segue então da unicidade que

$$R_s\left(I_{\alpha_p(s)}\right) \subset I_p \quad \text{e} \quad \alpha = \alpha_p|_{R_s\left(I_{\alpha_p(s)}\right)}.$$

Assim, se $t \in \ I_{\alpha_p(s)}$ então $t+s \in R_s\left(I_{\alpha_p(s)}\right) \subset I_p$. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \varphi_{t+s}(p) &= \alpha_p(t+s) = \beta(t+s) = \alpha_{\alpha_p(s)}(t) \\ &= \varphi_t(\alpha_p(s)) = \varphi_t(\varphi_s(p)), \end{aligned}$$

para todo $p \in \mathcal{D}_s$. Portanto, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. □

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é completo, as aplicações φ_t formam um grupo de difeomorfismos de M parametrizado pelo corpo dos reais, e é chamado o *grupo a* 1*-parâmetro de* X. Se X não é completo, os difeomorfismos φ_t não formam um grupo, pois os domínios dependem de t; dizemos, neste caso, que a coleção dos difeomorfismos φ_t é um *grupo local a* 1*-parâmetro de* X.

6.5 Exercícios

6.1

1. Prove que o fibrado tangente do círculo $\mathbb{S}^1$ é difeomorfo ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

2. Dado uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$, considere o conjunto

$$S(M) = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p \in M, v \in T_pM, \|v\| = 1\}.$$

Prove que $S(M)$ é uma superfície de dimensão $2m - 1$, conhecida como o *fibrado tangente unitário* de M. Prove que $S(M)$ é compacto se, e somente se, M é compacta.

3. Um espaço topológico X é chamado um espaço de *Lindelöf* se toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura enumerável. Prove que se X satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade então X é um espaço de Lindelöf.

4. Sejam M um conjunto e $\mathcal{A}$ um atlas em M. Prove que se $\mathcal{A}$ contém um atlas enumerável para M então a topologia induzida por $\mathcal{A}$ em M satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.

6.2

1. Dado uma variedade diferenciável M, e fixados um ponto $p \in M$ e um vetor $v \in T_pM$, prove que existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) = v$.

2. Prove que existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ com uma única singularidade.

3. Dado uma variedade diferenciável M^n, prove que o conjunto $\Gamma(M)$ de todos os campos vetoriais em M, munido das operações:

$$\begin{aligned} (X + Y)(p) &= X(p) + Y(p) \\ (cX)(p) &= cX(p), \end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y \in \Gamma(M)$, $p \in M$ e $c \in \mathbb{R}$, é um espaço vetorial real. Prove também que $\mathfrak{X}(M)$ é um subespaço vetorial de $\Gamma(M)$.

4. Considere os campos vetoriais $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ dados por

$$X = z\partial_y - y\partial_z, \quad Y = -z\partial_x + x\partial_z, \quad Z = y\partial_x - x\partial_y.$$

Prove que a aplicação

$$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mapsto aX + bY + cZ \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$$

é linear e injetora.

Capítulo 7

Distribuições

7.1 Derivações lineares

O objetivo dessa seção é obter uma nova interpretação para o espaço tangente de uma variedade diferenciável M^n.

Uma *derivação* num ponto $p \in M$ é um funcional linear $D\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que satisfaz a relação

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g), \tag{7.1}$$

para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$. A relação (7.1) é usualmente conhecida como a *regra de Leibniz*. Usando (7.1) e a linearidade de D, obtemos

$$cD(f) = D(cf) = D(c)f(p) + cD(f),$$

para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $c \in \mathbb{R}$. Disso decorre que $D(c)f(p) = 0$. Em particular, se $f(p) \neq 0$, segue que $D(c) = 0$, ou seja, qualquer derivação se anula nas funções constantes.

Exemplo 7.1.1. Dado um vetor arbitrário $v \in T_pM$, definimos uma função $\overline{v}\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ pondo

$$\overline{v}(f) = (f \circ \lambda)'(0), \tag{7.2}$$

onde $\lambda\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma curva diferenciável, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. Afirmamos que $\overline{v}$ é uma derivação em p. De fato, é fácil ver que $\overline{v}$ está bem definida e a linearidade de $\overline{v}$ segue da linearidade da derivada. Além disso, dados $f, g \in C^\infty(M)$, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{v}(fg) &= (fg \circ \lambda)'(0) \\
&= \big((f \circ \lambda) \cdot (g \circ \lambda)\big)'(0) \\
&= (f \circ \lambda)'(0) \cdot (g \circ \lambda)(0) + (f \circ \lambda)(0) \cdot (g \circ \lambda)'(0) \\
&= \overline{v}(f)g(p) + f(p)\overline{v}(g).
\end{aligned}$$

Exemplo 7.1.2. Uma situação particular do Exemplo 7.1.1 ocorre quando o vetor escolhido é um vetor coordenado. Mais precisamente, se (U, φ) é uma carta local em M^n, com $p \in U$, obtemos n derivações

$$\frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}(p) : C^\infty(M) \to \mathbb{R},$$

onde $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ denota a base de T_pM associada a φ. Assim, dado $f \in C^\infty(M)$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}(p)(f) &= (f \circ \lambda)'(0) \\
&= (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda)'(0) \\
&= \mathrm{d}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \circ \mathrm{d}(\varphi \circ \lambda)(0) \\
&= \mathrm{d}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \mathrm{d}\varphi(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \\
&= \mathrm{d}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot e_i \\
&= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)),
\end{aligned}$$

onde $\lambda \colon (-\epsilon, \epsilon) \to U$ é curva diferenciável, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$.

Denotemos por $\mathrm{Der}_p(M)$ o conjunto de todas as derivações em p de uma variedade M. O lema seguinte caracteriza a estrutura algébrica de $\mathrm{Der}_p(M)$.

Lema 7.1.3. O conjunto $\mathrm{Der}_p(M)$, munido das operações de soma e produto por escalar, dadas por

$$\begin{aligned}
(D + T)(f) &= D(f) + T(f) \\
(cD)(f) &= cD(f),
\end{aligned} \tag{7.3}$$

torna-se um espaço vetorial real, onde $D, T \in \mathrm{Der}_p(M)$, $f \in C^\infty(M)$ e $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Provemos, inicialmente, que $\mathrm{Der}_p(M)$ é fechado em relação às operações em (7.3). De fato, sejam $D, T \in \mathrm{Der}_p(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ e $c \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned}
(D+T)(fg) &= D(fg) + T(fg) \\
&= D(f)g(p) + f(p)D(g) + T(f)g(p) + f(p)T(g) \\
&= \big(D(f) + T(f)\big)g(p) + f(p)\big(D(g) + T(g)\big) \\
&= (D+T)(f)g(p) + f(p)(D+T)(g)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(cD)(fg) &= cD(fg) \\
&= cD(f)g(p) + cf(p)D(g) \\
&= (cD)(f)g(p) + f(p)(cD)(g).
\end{aligned}$$

Os axiomas que caracterizam um espaço vetorial são deixados a critério do leitor. □

O Lema 7.1.3 não nos diz qual é a dimensão do espaço vetorial $\mathrm{Der}_p(M)$. O teorema seguinte, além de responder a essa questão, nos garante que as derivações do Exemplo 7.1.1 são, essencialmente, as únicas derivações em $p \in M$. Para isso, usaremos o seguinte lema auxiliar.

Lema 7.1.4. Dado uma função diferenciável $f\colon U \to \mathbb{R}$, onde U é um aberto convexo de $\mathbb{R}^n$, com $0 \in U$, existem funções diferenciáveis $g_i\colon U \to \mathbb{R}$, com $1 \le i \le n$, tais que:

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x),$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$.

Demonstração. Dado $x \in U$, defina uma função $h_x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ pondo

$$h_x(t) = f(tx),$$

para todo $t \in [0,1]$. Temos:

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_i \mathrm{d}t = \int_0^1 h_x'(t)\mathrm{d}t = h_x(1) - h_x(0) = f(x) - f(0),$$

ou seja,

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_i \mathrm{d}t.$$

Assim, basta definir:

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t,$$

para todo $1 \leq i \leq n$. $\square$

De acordo com a notação do Exemplo 7.1.1, temos o seguinte:

Teorema 7.1.5. *A aplicação $\phi : T_pM \to \mathrm{Der}_p(M)$, definida por*

$$\phi(v) = \overline{v},$$

é um isomorfismo linear.

Demonstração. A linearidade de ϕ segue da linearidade de (7.2). Dado uma derivação $D \in \mathrm{Der}_p(M)$, escolha uma carta (U, φ) em M, com $\varphi(U)$ convexo, $p \in U$ e $\varphi(p) = 0$. Dado $f \in C^\infty(M)$, defina

$$h = f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}.$$

Como $\varphi(U)$ é convexo, segue do Lema 7.1.4 que existem funções diferenciáveis $\widetilde{g}_i : \varphi(U) \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, tais que

$$h(x) = h(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \widetilde{g}_i(x),$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \varphi(U)$. Como $x = \varphi(q)$, para algum $q \in U$, temos:

$$\begin{aligned} f(q) &= h(\varphi(q)) \\ &= h(0) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\varphi(q))\widetilde{g}_i(\varphi(q)) \\ &= h(0) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q) g_i(q), \end{aligned}$$

onde $\varphi_i(q) = \pi_i(\varphi(q))$ e $g_i(q) = (\widetilde{g}_i \circ \varphi)(q)$, para todo $q \in U$. Assim,

$$\begin{aligned} D(f) = \sum_{i=1}^{n} D(\varphi_i g_i) &= \sum_{i=1}^{n} \big(D(\varphi_i) g_i(p) + \varphi_i(p) D(g_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} D(\varphi_i) g_i(p). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x_i}(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{h(te_i)-h(0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{h(0)+t\widetilde{g}_i(te_i)-h(0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\widetilde{g}_i(te_i)=\widetilde{g}_i(0).\end{aligned}$$

Disso decorre, juntamente com o Exemplo 7.1.2, que:

$$\frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}(p)(f)=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))=\frac{\partial h}{\partial x_i}(0)=\widetilde{g}_i(0)=g_i(p).$$

Fazendo $a_i = D(\varphi_i)$, segue que (7.4) que

$$D(f)=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}(p)(f)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}(p)\right)(f),$$

ou seja,

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right)(f)=D(f).$$

Como $f \in C^\infty(M)$ foi escolhida de forma arbitrária, provamos que ϕ é sobrejetora. Além disso, dado $v \in T_pM$, com

$$v=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

temos:

$$\begin{aligned}\overline{v}(\varphi_i) &= \sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\overline{\partial}}{\partial x_j}(p)(\varphi_i)=\sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\partial(\varphi_i\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p))\\ &= \sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\partial\pi_i}{\partial x_j}(\varphi(p))=a_i,\end{aligned}$$

para todo $1 \le i \le m$. Assim, se $\overline{v}=0$ então $\overline{v}(\varphi_i)=0$, para todo $1\le i\le n$, logo $a_i=0$, para todo $1\le i\le n$. Portanto, $v=0$ e, assim, ϕ é injetora. $\square$

Do Teorema 7.1.5 obtemos que os vetores tangentes em T_pM podem ser identificados como derivações em p. Essa noção de derivação pode ser globalizada, como veremos a seguir.

7.2 Derivação em variedades

Uma *derivação* numa variedade diferenciável M^n é um operador linear $\mathcal{D} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que satisfaz globalmente a regra de Leibniz

$$\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g),$$

para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$.

Exemplo 7.2.1. Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos uma aplicação $\overline{X} \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ pondo

$$\overline{X}(f)(p) = \mathrm{d}f(p) \cdot X(p), \tag{7.5}$$

para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$. Afirmamos que $\overline{X}$ é uma derivação em M. De fato, devemos provar, inicialmente, que $\overline{X}(f) \in C^\infty(M)$, para toda $f \in C^\infty(M)$. Para isso, seja (U, φ) uma carta local em M. Assim, para todo $p \in U$, podemos escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \tag{7.6}$$

onde as funções $a_i \colon U \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis, para todo $1 \leq i \leq n$. Portanto,

$$\overline{X}(f)(p) = \mathrm{d}f(p) \cdot X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\mathrm{d}f(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

para todo $p \in U$. Isso prova que $\overline{X}(f)$ é uma função diferenciável no aberto U. Como U foi escolhido arbitrariamente, tem-se $\overline{X}(f) \in C^\infty(M)$. A linearidade de $\overline{X}$ segue diretamente da linearidade da derivada em funções. Além disso, segue de (7.5) que

$$\overline{X}(f)(p) = \overline{X(p)}(f),$$

para todo $p \in M$. Assim, dados $f, g \in C^\infty(M)$ e $p \in M$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{X}(fg)(p) &= \overline{X(p)}(fg) = \overline{X(p)}(f)g(p) + f(p)\overline{X(p)}(g) \\ &= \overline{X}(f)(p) \cdot g(p) + f(p)\overline{X}(g)(p) \\ &= \big(\overline{X}(f)g + f\overline{X}(g)\big)(p). \end{aligned}$$

Como $p \in M$ é arbitrário, segue a afirmação.

Seguindo a notação do Exemplo 7.2.1, temos a seguinte:

Proposição 7.2.2. Sejam M^n uma variedade diferenciável e $X\colon M \to TM$ um campo vetorial. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) $\overline{X}(f) \in C^\infty(M)$, para toda $f \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Do Exemplo 7.2.1, resta provar que $(b) \Rightarrow (a)$. Suponha então que $\overline{X}(f) \in C^\infty(M)$, para toda $f \in C^\infty(M)$. Dado $p \in M$, considere uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, e seja $\overline{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ a carta correspondente a φ em TM. Temos:

$$(\overline{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \big(\varphi(p), a_1(p), \ldots, a_n(p)\big),$$

para todo $p \in U$, onde as funções a_i são dadas como em (7.6). Definindo $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$, para todo $1 \leq i \leq n$, temos:

$$a_i(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p) \cdot X(p) = \mathrm{d}\varphi_i(p) \cdot X(p) = \overline{X}(\varphi_i)(p),$$

para quaisquer $p \in U$ e $1 \leq i \leq n$. Como $\overline{X}(\varphi_i)$ é diferenciável em U, segue que $a_i \in \mathrm{C}^\infty(U)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Isso prova que a representação de X nas cartas φ e $\overline{\varphi}$ é diferenciável. Portanto, $X \in \mathfrak{X}(M)$. $\square$

Denotemos por $\mathrm{Der}(M)$ o conjunto de todas as derivações em M. De forma análoga ao Lema 7.1.3, temos que $\mathrm{Der}(M)$ é um espaço vetorial real. O teorema seguinte é a versão global do Teorema 7.1.5.

Teorema 7.2.3. *A aplicação $\phi\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}(M)$, definida por*

$$\phi(X) = \overline{X},$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, é um isomorfismo linear.

Demonstração. A linearidade de ϕ segue diretamente da linearidade da derivada (7.5). Seja $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(M)$. Dado $p \in M$, a função $\mathcal{D}_p\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\mathcal{D}_p(f) = \mathcal{D}(f)(p),$$

para toda $f \in C^\infty(M)$, é uma derivação em p, ou seja, $\mathcal{D}_p \in \mathrm{Der}_p(M)$. Assim, do Teorema 7.1.5, existe $v \in T_pM$ tal que $\overline{v} = \mathcal{D}_p$. Isso define uma aplicação $X\colon M \to TM$ tal que $\pi \circ X = \mathrm{Id}$ e $\overline{X}(f) = \mathcal{D}(f)$, para toda $f \in C^\infty(M)$, pois

$$\overline{X}(f)(p) = \overline{X(p)}(f) = \mathcal{D}_p(f) = \mathcal{D}(f)(p),$$

para todo $p \in M$. Como $\mathcal{D}(f) \in C^\infty(M)$, temos que $\overline{X}(f) \in C^\infty(M)$. Assim, pela Proposição 7.2.2, segue que X é diferenciável, i.e., $X \in \mathfrak{X}(M)$. Isso prova que ϕ é sobrejetora. Finalmente, sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $\phi(X) = \phi(Y)$. Disso decorre que

$$\overline{X}(f)(p) = \overline{Y}(f)(p),$$

para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$. Ou seja, $\overline{X(p)}(f) = \overline{Y(p)}(f)$, para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$. Isso implica que $\overline{X(p)} = \overline{Y(p)}$, para todo $p \in M$. Assim, pelo Teorema 7.1.5, temos que $X(p) = Y(p)$, para todo $p \in M$, i.e., $X = Y$, e isso mostra que ϕ é injetora. $\square$

Em virtude do Teorema 7.2.3, identificaremos naturalmente cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ como uma derivação em M e, para cada função $f \in C^\infty(M)$, denotaremos simplesmente por $X(f)$ a função associada.

Proposição 7.2.4. Dados duas derivações $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathrm{Der}(M)$, a aplicação $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2]\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, definida por

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1,$$

também é uma derivação em M.

Demonstração. Dados $f, g \in C^\infty(M)$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(fg)) &= \mathcal{D}_1\big(\mathcal{D}_2(f)g + f\mathcal{D}_2(g)\big) \\ &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(f))g + \mathcal{D}_2(f)\mathcal{D}_1(g) + \mathcal{D}_1(f)\mathcal{D}_2(g) + f\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(g)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(fg)) &= \mathcal{D}_2\big(\mathcal{D}_1(f)g + f\mathcal{D}_1(g)\big) \\ &= \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(f))g + \mathcal{D}_1(f)\mathcal{D}_2(g) + \mathcal{D}_2(f)\mathcal{D}_1(g) + f\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(g)). \end{aligned}$$

Cancelando os termos semelhantes, obtemos:

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](fg) &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(f))g + f\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(g)) - \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(f))g - f\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(g)) \\ &= [\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](f)g + f[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](g), \end{aligned}$$

e isso prova que $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] \in \mathrm{Der}(M)$. $\square$

Corolário 7.2.5. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, existe um único campo vetorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

para toda $f \in C^\infty(M)$.

O campo vetorial $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$, dado pelo Corolário 7.2.5, é chamado o *colchete de Lie* dos campos X e Y e é, usualmente, denotado por

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Proposição 7.2.6. O colchete de Lie satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $[X,Y] = -[Y,X]$,

(b) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$,

(c) $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Basta identificar os campos acima como derivações e avaliar nas funções de $C^\infty(M)$. □

O item (b) da Proposição 7.2.6 é chamado a *identidade de Jacobi.* Note que a aplicação

$$(X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto [X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$$

é bilinear sobre $\mathbb{R}$ porém, pelo item (c), não é bilinear sobre $C^\infty(M)$. Além disso, pelo item (b), segue que X, Y, Z são permutados ciclicamente.

Observação 7.2.7. Dados uma carta local (U, φ) em M e dois campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos representá-los no aberto U como

$$X|_U = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y|_U = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Assim, o colchete de Lie entre X e Y, no aberto U, é dado por

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{7.7}$$

Exemplo 7.2.8. Em $\mathbb{R}^2$, com coordenadas (x,y), considere os campos vetoriais $X = y\frac{\partial}{\partial y}$ e $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$. Dado uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, temos:

$$\begin{aligned}
[X,Y](f) &= \left[y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y} \right](f) \\
&= yx\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\frac{\partial f}{\partial y} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= -x\frac{\partial}{\partial y}(f) = -Y(f).
\end{aligned}$$

Portanto, neste caso, tem-se $[X,Y] = -Y$.

7.3 Campos f-relacionados

Considere uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ e dois campos vetoriais $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Dizemos que X e Y são *f-relacionados* se

$$\mathrm{d}f(p) \cdot X(p) = Y(f(p)),$$

para todo $p \in M$. Com a identificação estabelecida no Teorema 7.2.3, entre campos vetoriais e derivações, temos o seguinte:

Lema 7.3.1. Dois campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ são f-relacionados se, e somente se, $X(g \circ f) = Y(g) \circ f$, para toda $g \in \mathrm{C}^\infty(N)$.

Demonstração. Dados $p \in M$ e $g \in \mathrm{C}^\infty(N)$, temos:

$$\begin{aligned} X(g \circ f)(p) &= X(p)(g \circ f) = \mathrm{d}(g \circ f)(p) \cdot X(p) \\ &= \mathrm{d}g(f(p)) \cdot \mathrm{d}f(p) \cdot X(p) = \mathrm{d}f(p) \cdot X(p)(g) \end{aligned} \tag{7.8}$$

e

$$(Y(g) \circ f)(p) = Y(g)(f(p)) = \mathrm{d}g(f(p)) \cdot Y(f(p)) = Y(f(p))(g). \tag{7.9}$$

A conclusão segue agora de (7.8) e (7.9). □

Dado uma aplicação diferenciável $f : M \to N$, nem sempre um campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}(N)$ é f-relacionado com algum campo $X \in \mathfrak{X}(M)$. A proposição seguinte nos dá uma condição para que isso ocorra.

Proposição 7.3.2. Se $f : M^m \to N^n$ é uma imersão e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ é um campo vetorial tal que

$$Y(f(p)) \in \mathrm{d}f(p)(T_pM),$$

para todo $p \in M$, então existe um único campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que X e Y são f-relacionados.

Demonstração. Definimos uma aplicação $X : M \to TM$ pondo $X(p)$ como sendo o único elemento de T_pM tal que

$$\mathrm{d}f(p) \cdot X(p) = Y(f(p)).$$

Provemos agora que X é diferenciável. Como f é uma imersão, segue do Teorema 3.2.3 que, para todo $p \in M$, existem cartas locais (U, φ) e (V, ψ) em M e N, respectivamente, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$, tais que

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0),$$

para todo $x \in \varphi(U)$. Fazendo $x = \varphi(p)$, temos $(\psi \circ f)(p) = (\varphi(p), 0)$, para todo $p \in U$. Disso decorre que

$$\mathrm{d}f(p) = \mathrm{d}\psi(f(p))^{-1} \circ \mathrm{d}\varphi(p),$$

para todo $p \in U$. Assim,

$$\mathrm{d}f(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial}{\partial y_i}(f(p)),$$

para quaisquer $p \in U$ e $1 \le i \le m$. Em relação à base associada a ψ, podemos escrever

$$Y(f(p)) = \sum_{i=1}^{m} b_i(f(p)) \frac{\partial}{\partial y_i}(f(p)), \tag{7.10}$$

para todo $p \in U$. Escrevendo

$$X(p) = \sum_{i=1}^{m} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

temos:

$$\begin{aligned} Y(f(p)) = \mathrm{d}f(p) \cdot X(p) &= \sum_{i=1}^{m} a_i(p) \mathrm{d}f(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i(p) \frac{\partial}{\partial y_i}(f(p)). \end{aligned} \tag{7.11}$$

De (7.10) e (7.11), obtemos $a_i = b_i \circ f$. Como as funções b_i são diferenciáveis, o mesmo ocorre para as funções a_i, e isso mostra que $X \in \mathfrak{X}(M)$. $\square$

No caso em que $f : M \to N$ é um difeomorfismo, para cada campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$, existe um único campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ que é f-relacionado com Y, a saber

$$X = \mathrm{d}f^{-1} \circ Y \circ f. \tag{7.12}$$

O campo em (7.12) é usualmente denotado por f^*Y, e é chamado o *pull-back de Y por f*. Analogamente, dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, existe um único campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$ que é f-relacionado com X, a saber

$$Y = \mathrm{d}f \circ X \circ f^{-1}. \tag{7.13}$$

O campo dado em (7.13) é usualmente denotado por f_*X, e é chamado o *push-forward de X por f.*

No espaço das funções, o *pull-back* é definido pondo $f^*g = g \circ f$, para toda $g \in \mathrm{C}^\infty(N)$. O *push-forward* é definido pondo $f_*h = (f^{-1})^*h = h \circ f^{-1}$, para toda $h \in C^\infty(M)$.

A proposição seguinte é uma das principais propriedades dos campos f-relacionados.

Proposição 7.3.3. Sejam $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável e campos $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$. Se X_i e Y_i são f-relacionados, para $i = 1, 2$, então $[X_1, X_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ são f-relacionados.

Demonstração. Como X_i e Y_i são f-relacionados, para $i = 1, 2$, segue do Lema 7.3.1 que

$$X_i(g \circ f) = Y_i(g) \circ f,$$

para toda $g \in \mathrm{C}^\infty(N)$ e $i = 1, 2$. Assim,

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_2](g) \circ f &= Y_1(Y_2(g)) \circ f - Y_2(Y_1(g)) \circ f \\ &= X_1(Y_2(g) \circ f) - X_2(Y_1(g) \circ f) \\ &= X_1(X_2(g \circ f)) - X_2(X_1(g \circ f)) \\ &= [X_1, X_2](g \circ f). \end{aligned}$$

Como $g \in \mathrm{C}^\infty(N)$ é arbitrária, segue do Lema 7.3.1 que $[X_1, X_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ são f-relacionados. □

Corolário 7.3.4. Se $f : M \to N$ é um difeomorfismo, então

$$[f_*X_1, f_*X_2] = f_*[X_1, X_2],$$

para quaisquer $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

Nosso objetivo agora é relacionar o colchete de Lie de dois campos vetoriais com seus fluxos. Para isso, consideremos o seguinte lema auxiliar.

Lema 7.3.5. Dado uma função diferenciável $F : I \times M \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo $0 \in \mathbb{R}$, existe outra função diferenciável $h : I \times M \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t, p) = F(0, p) + th(t, p),$$

para quaisquer $t \in I$ e $p \in M$.

Demonstração. Basta considerar, por exemplo,

$$h(t,p) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial s}(st,p)\mathrm{d}s,$$

para quaisquer $t \in I$ e $p \in M$. $\square$

Provemos agora o resultado central dessa seção.

Teorema 7.3.6. *Para quaisquer dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se*

$$[X,Y] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\varphi_t^* Y - Y\big),$$

onde $\{\varphi_t\}$ é o grupo local a 1-parâmetro de X.

Demonstração. Dado uma função $f \in C^\infty(M)$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi_t^* Y(f) &= (\mathrm{d}\varphi_t^{-1} \circ Y \circ \varphi_t)(f) = (\mathrm{d}\varphi_{-t} \circ Y \circ \varphi_t)(f) \\ &= \mathrm{d}f \circ (\mathrm{d}\varphi_{-t} \circ Y \circ \varphi_t) = \mathrm{d}(f \circ \varphi_{-t}) \circ (Y \circ \varphi_t) \\ &= (Y \circ \varphi_t)(f \circ \varphi_{-t}). \end{aligned}$$

Considere a função $F : I \times M \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(t,p) = (f \circ \varphi_{-t})(p),$$

para quaisquer $t \in I$ e $p \in M$. Segue do Lema 7.3.5 que

$$F(t,p) = F(0,p) + th(t,p), \tag{7.14}$$

onde $h : I \times M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, com

$$h(0,p) = \frac{\partial F}{\partial t}(0,p). \tag{7.15}$$

Note que, para cada $t \in I$ fixado, temos uma função $h_t : M \to \mathbb{R}$ dada por $h_t(p) = h(t,p)$, para todo $p \in M$. Segue, então, de (7.14) que

$$\begin{aligned} \varphi_t^* Y(f) &= (Y \circ \varphi_t)(f + th_t) \\ &= (Y \circ \varphi_t)(f) + t(Y \circ \varphi_t)(h_t). \end{aligned}$$

Dado $p \in M$, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(0,p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\varphi_{-t}(p)))(0) = \mathrm{d}f(p) \cdot (-X(p)) = -X(f)(p). \tag{7.16}$$

Assim, segue de (7.15) e (7.16) que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}(Y\circ\varphi_t)(h_t)(p) &= \lim_{t\to 0}(Y\circ\varphi_t)(p)(h_t)\\ &= \lim_{t\to 0} Y(\varphi_t(p))(h_t) = Y(p)(h_0) \qquad (7.17)\\ &= Y(p)(-X(f)) = -Y(X(f))(p).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((Y\circ\varphi_t)(f)(p) - Y(f)(p)\big) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(Y(\varphi_t(p))(f) - Y(p)(f)\big)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(Y(f)(\varphi_t(p)) - Y(f)(p)\big)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(Y(f)(\varphi_t(p))\big)(0) \qquad (7.18)\\ &= \mathrm{d}(Y(f))(p)\cdot X(p)\\ &= X(p)(Y(f))\\ &= X(Y(f))(p).\end{aligned}$$

Portanto, segue de (7.17) e (7.18) que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((\varphi_t^*Y)(f)(p) - Y(f)(p)\big) &= X(Y(f))(p) - Y(X(f))(p)\\ &= (XY - YX)(f)(p).\end{aligned}$$

Como $f\in C^\infty(M)$ e $p\in M$ são arbitrários, o teorema está provado. $\square$

Observação 7.3.7. Se $X\in\mathfrak{X}(M)$ é um campo completo então, para cada $t\in\mathbb{R}$, a aplicação φ_t é um difeomorfismo de M sobre M e

$$\varphi_t^*Y = \mathrm{d}\varphi_{-t}\circ Y\circ\varphi_t,$$

para todo $Y\in\mathfrak{X}(M)$. No entanto, se X não é completo, φ_t está definido somente no aberto $\mathcal{D}_t$. Assim, $\varphi_t^*:\mathfrak{X}(\mathcal{D}_{-t})\to\mathfrak{X}(\mathcal{D}_t)$. Se $Y\in\mathfrak{X}(M)$ interpretaremos, então, o campo φ_t^*Y como

$$\varphi_t^*(Y|_{\mathcal{D}_{-t}})\in\mathfrak{X}(\mathcal{D}_t).$$

Agora, como $M\subset\bigcup_{t\neq 0}\mathcal{D}_t$, ambos os valores $\varphi_t(p)$ e $(\varphi_t^*Y)(p)$ fazem sentido para qualquer $p\in M$, desde que t seja suficientemente pequeno e

$$(\varphi_t^*Y)(p) = \mathrm{d}\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(p))).$$

Tendo isso em mente, manteremos a notação

$$[X,Y] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\varphi_t^* Y\big)(0)$$

também para os campos que não são completos, desde que interpretamos, corretamente, o campo pull-back $\varphi_t^* Y$.

Observação 7.3.8. Considere um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e seu grupo local a 1-parâmetro $\{\varphi_t\}$. Dado um ponto $p \in M$, o vetor $X(p)$ é tangente à curva $\alpha(t) = \varphi_t(p)$ em $t = 0$. Isso pode ser interpretado em termos da ação de $X(p)$ sobre as funções $g \in C^\infty(M)$. De fato, como

$$\alpha'(t)(g) = (g \circ \alpha)'(t),$$

dizer que $X(p)$ é tangente à curva $\alpha(t)$ em $t = 0$ significa que

$$\begin{aligned} X(p)(g) &= \alpha'(0)(g) = (g \circ \alpha)'(0) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(g(\varphi_t(p)) - g(p)\big). \end{aligned}$$

A fim de obtermos uma interpretação para o colchete $[X, Y]$, provaremos os dois seguintes lemas.

Lema 7.3.9. Sejam $f : M \to N$ um difeomorfismo e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se $\{\varphi_t\}$ é o grupo local a 1-parâmetro de X então $\{f \circ \varphi_t \circ f^{-1}\}$ é o grupo local a 1-parâmetro de f_*X.

Demonstração. Dados $g \in \mathrm{C}^\infty(N)$ e $q \in N$, temos:

$$\begin{aligned} (f_*X)(q)(g) &= (\mathrm{d}f \circ X \circ f^{-1})(q)(g) \\ &= (\mathrm{d}f \circ X)(f^{-1}(q))(g) \\ &= X(f^{-1}(q))(g \circ f) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big((g\circ f)(\varphi_t(f^{-1}(q))) - (g \circ f)(f^{-1}(q))\big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[g\big((f \circ \varphi_t \circ f^{-1})(q)\big) - g(q)\big]. \end{aligned}$$

Assim, pela Observação 7.3.8, segue que $\{f \circ \varphi_t \circ f^{-1}\}$ é o grupo local a 1-parâmetro de f_*X. □

Corolário 7.3.10. Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo, então $f_*X = X$ se, e somente se, $\varphi_t \circ f = f \circ \varphi_t$, para todo $t \in I$.

Demonstração. Suponha $f_*X = X$. Assim, para cada $t \in I$, temos

$$\varphi_t(p) = (f \circ \varphi_t \circ f^{-1})(p),$$

para todo $p \in \mathcal{D}_t$, ou seja,

$$(\varphi_t \circ f)(p) = (f \circ \varphi_t)(p),$$

para todo $p \in \mathcal{D}_t$. Reciprocamente, suponha $\varphi_t \circ f = f \circ \varphi_t$, para todo $t \in I$. Disso decorre que $\varphi_t(p) = (f \circ \varphi_t \circ f^{-1})(p)$, para todo $p \in \mathcal{D}_t$. Fixado $p \in M$, defina

$$\alpha(t) = \varphi_t(p),$$

para t suficientemente pequeno. Temos $\alpha'(0) = X(p)$. Por outro lado, tem-se $\alpha'(0) = (f_*X)(p)$. Como $p \in M$ é arbitrário, segue que $f_*X = X$. □

Lema 7.3.11. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sejam $\{\varphi_t\}$ e $\{\psi_s\}$ os grupos locais a 1-parâmetro de X e Y, respectivamente. Então, $[X, Y] = 0$ se, e somente se, $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$, para quaisquer s, t.

Demonstração. Suponha $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$, para quaisquer s, t. Fixado t, segue do Corolário 7.3.10 que

$$\varphi_t^* Y = Y. \tag{7.19}$$

Dado $p \in M$, considere a curva $\alpha : I_p \to T_pM$ dada por

$$\alpha(t) = (\varphi_t^* Y)(p). \tag{7.20}$$

Do Teorema 7.3.6, temos que $\alpha'(0) = [X, Y](p)$. Porém, segue de (7.19) que $\alpha(t) = (\varphi_t^* Y)(p) = Y(p)$, i.e., α é constante. Logo, $\alpha'(0) = [X, Y](p) = 0$. Como $p \in M$ é arbitrário, segue que $[X, Y] = 0$. Reciprocamente, suponha $[X, Y] = 0$. Assim,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(\varphi_h^* Y - Y\big) = 0.$$

Fixado $p \in M$, considere a curva $\alpha(t)$ dada em (7.20). Então:

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(\alpha(t+h) - \alpha(t)\big) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big((\varphi_{t+h}^* Y)(p) - (\varphi_t^* Y)(p)\big) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(\varphi_t^*(\varphi_h^* Y)(p) - (\varphi_t^* Y)(p)\big) \\
&= \varphi_t^* \left(\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big((\varphi_h^* Y)(p) - Y(p)\big)\right) \\
&= \varphi_t^*(0) = 0.
\end{aligned}$$

Disso decorre que α é constante. Em particular, $\alpha(t) = \alpha(0)$, logo $\varphi_t^* Y = Y$. Assim, do Corolário 7.3.10, segue que $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$, para quaisquer s, t. $\square$

A comutatividade dos fluxos, dada pelo Lema 7.3.11, pode ser interpretada da seguinte forma. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dado $p \in M$, para todo t suficientemente pequeno, façamos:

$$\alpha(t) = (\psi_{-t} \circ \varphi_{-t} \circ \psi_t \circ \varphi_t)(p).$$

Assim, $\alpha(t) = p$ se, e somente se, $[X, Y](p) = 0$. O colchete $[X, Y]$ mede o quanto o paralelogramo da Figura 7.1 é fechado.

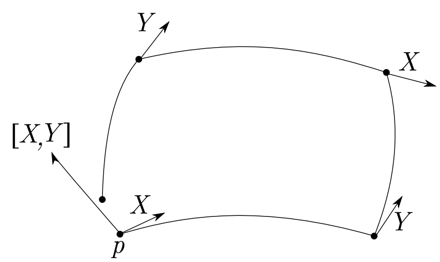

Figura 7.1: Variação da comutatividade dos fluxos.

Em virtude do Exercício 7.2.2, segue que se (U, φ) é uma carta local em M^n, então

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0,$$

para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$. Veremos a seguir que a condição $[X, Y] = 0$ é também suficiente para a existência de uma carta local (U, φ) em M de forma que dois de seus campos coordenados coincidam com X e Y.

Antes de estabelecermos o próximo resultado, lembremos que k campos vetoriais $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ são ditos *linearmente independentes* se os vetores $X_1(p), \ldots, X_k(p)$ são linearmente independentes em T_pM, para todo ponto $p \in M$.

Teorema 7.3.12. *Sejam $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M^n)$ campos linearmente independentes. Se $[X_i, X_j] = 0$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq k$ então, para cada ponto $p \in M$, existe uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, tal que*

$$X_i(q) = \frac{\partial}{\partial x_i}(q),$$

para quaisquer $q \in U$ e $1 \leq i \leq k$.

Demonstração. Dado um ponto $p \in M$, considere uma carta (U, φ) em M com as seguintes propriedades:

(a) $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\varphi(U) = (-\epsilon, \epsilon)^n$;

(c) $X_1(p), \ldots, X_k(p), \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$ são vetores linearmente independentes em T_pM.

Defina uma aplicação $\psi : (-\epsilon, \epsilon)^k \times (-\epsilon, \epsilon)^{n-k} \to M$ pondo

$$\psi(x, y) = \psi(x_1, \ldots, x_k, y) = \big(\varphi^k_{x_k} \circ \ldots \circ \varphi^1_{x_1}\big)(\varphi^{-1}(0, y)),$$

onde $\{\varphi^i_t\}$ é o grupo local a 1-parâmetro do campo X_i, para $1 \leq i \leq k$. Temos:

$$\begin{aligned} \psi(x + te_i, y) &= \big(\varphi^k_{x_k} \circ \ldots \circ \varphi^i_{x_i + t} \circ \ldots \circ \varphi^1_{x_1}\big)(\varphi^{-1}(0, y)) \\ &= \varphi^i_t(\psi(x, y)), \end{aligned}$$

pois $\varphi^i_s \circ \varphi^j_t = \varphi^j_t \circ \varphi^i_s$. Assim, para todo $1 \leq i \leq k$, temos:

$$\mathrm{d}\psi(x, y) \cdot e_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi(x + te_i, y))(0) = X_i(\psi(x, y)).$$

Decorre, em particular, que

$$\mathrm{d}\psi(0, 0) \cdot e_i = X_i(p),$$

para todo $1 \leq i \leq k$. Além disso, para $k + 1 \leq i \leq n$, temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\psi(0, 0) \cdot e_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi(0, te_i))(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi^{-1}(0, te_i))(0) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(p). \end{aligned}$$

Disso decorre, junto com a hipótese (c), que $\mathrm{d}\psi(0, 0) : \mathbb{R}^n \to T_pM$ é um isomorfismo linear. Assim, pelo Teorema 2.4.12, existe um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$, com $(0, 0) \in W \subset (-\epsilon, \epsilon)^n$, tal que $\psi|_W : W \to \psi(W)$ é um difeomorfismo. Assim, a carta local procurada é $\varphi = \psi^{-1}$. □

Concluimos então do Teorema 7.3.12 que o colchete de Lie $[X, Y]$ pode ser usado para comparar a diferença entre as curvas integrais de X e Y com as curvas coordenadas de uma dada carta local.

7.4 O teorema de Frobenius

A teoria das distribuições pode ser vista como uma formulação geométrica da teoria clássica de certos sistemas de equações diferenciais parciais. As soluções são subvariedades da variedade em questão, chamadas de subvariedades integrais. O teorema de Frobenius nos dá condições necessárias e suficientes para a existência de tais subvariedades integrais.

Definição 7.4.1. Uma *distribuição de posto k* numa variedade diferenciável M^n é uma correspondência D que associa a cada ponto $p \in M$ um subespaço vetorial $D(p) \subset T_pM$ de dimensão k.

Decorre da Definição 7.4.1 que para cada $p \in M$, existem um aberto U de M, com $p \in U$, e k campos vetoriais $X_1, \ldots, X_k$, possivelmente definidos em U, tais que

$$D(q) = \operatorname{span}\{X_1(q), \ldots, X_k(q)\}, \tag{7.21}$$

para todo $q \in U$. Diremos que D é *diferenciável* se é possível escolher campos vetoriais $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$ com a propriedade (7.21).

Exemplo 7.4.2. Seja M uma variedade diferenciável que admite um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ não-nulo em todo ponto. Assim, o campo X gera uma distribuição diferenciável D de posto 1, dada por

$$D(p) = \operatorname{span}\{X(p)\},$$

para todo $p \in M$.

Exemplo 7.4.3. No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, os campos vetoriais $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}$, $1 \leq k \leq n$, geram uma distribuição diferenciável de posto k.

Exemplo 7.4.4. Em $M = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, definimos uma distribuição D pondo, para cada $p \in M$, $D(p)$ como sendo o subespaço de $T_pM = \mathbb{R}^n$ ortogonal ao vetor posição $v_p = \overrightarrow{p}$. Estendendo o vetor v_p a um campo vetorial $X_1 \in \mathfrak{X}(U)$, onde $U \subset M$ é um aberto contendo p, e aplicando o algoritmo de Gram-Schmidt, obtemos n campos vetoriais $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$ tais que, para cada $q \in U$, os vetores $X_1(1), \ldots, X_n(q)$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Disso decorre que D é localmente gerada pelos campos $X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$. Portanto, D é uma distribuição diferenciável em M de posto $n - 1$.

Exemplo 7.4.5. No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, considere a distribuição D definida do seguinte modo. Para cada ponto $p = (a, b, c)$, defina $D(p)$ como o plano gerado pelos vetores

$$\frac{\partial}{\partial x}(p) + b\frac{\partial}{\partial z}(p) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}(p).$$

Assim,

$$D(p) = \{(r, s, br)_p : r, s \in \mathbb{R}\},$$

e a equação deste plano é dada por

$$z - c = b(x - a),$$

para cada ponto $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Definição 7.4.6. Uma distribuição D de posto k em M^n é dita ser *involutiva* se para quaisquer campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, com $X(p), Y(p) \in D(p)$, tem-se que $[X, Y](p) \in D(p)$, para todo $p \in M$.

Exemplo 7.4.7. Em $\mathbb{R}^n$, considere a distribuição D gerada pelos primeiros k campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}$. Dados campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, com $X(p), Y(p) \in D(p)$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^{k} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_{i=1}^{k} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Segue de (7.7) que $[X, Y](p) \in D(p)$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$, i.e., D é involutiva.

Exemplo 7.4.8. A distribuição D em $\mathbb{R}^3$ gerada pelos vetores

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad Y = \frac{\partial}{\partial x_2} + e^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

não é involutiva, pois

$$[X, Y] = e^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

que não é uma combinação linear de X e Y.

Definição 7.4.9. Seja D uma distribuição de posto k em uma variedade diferenciável M. Uma subvariedade $N^k \subset M$ é chamada uma *subvariedade integral* para a distribuição D se

$$D(i(x)) = \mathrm{d}i(x)(T_x N),$$

para todo $x \in N$, onde $i : N \to M$ é a aplicação inclusão. A distribuição D é chamada *integrável* se cada ponto de M pertence a uma subvariedade integral da distribuição.

Exemplo 7.4.10. No Exemplo 7.4.2, a imagem de qualquer curva integral de X é uma subvariedade integral de D. No Exemplo 7.4.4, por cada ponto $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, a esfera de raio $\|p\|$ centrada na origem é uma subvariedade integral da distribuição D.

Proposição 7.4.11. Toda distribuição integrável é involutiva.

Demonstração. Seja D uma distribuição integrável de posto k em M^n, e considere dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $X(p), Y(p) \in D(p)$, para todo $p \in M$. Como D é integrável segue que, para cada $p \in M$, existe uma subvariedade $N^k \subset M$, contendo p, tal que

$$D(i(x)) = \mathrm{d}i(x)(T_x N),$$

para todo $x \in N$. Como a inclusão $i : N \to M$ é, em particular, uma imersão, segue da Proposição 7.3.2, existem campos $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ tais que $\widetilde{X}$ é i-relacionado com X e $\widetilde{Y}$ é i-relacionado com Y. Pela Proposição 7.3.3, obtemos que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ e $[X, Y]$ são i-relacionados, i.e.,

$$[X, Y] \circ i = \mathrm{d}i \circ [\widetilde{X}, \widetilde{Y}].$$

Portanto,

$$[X, Y](p) = [X, Y](i(p)) = \mathrm{d}i(p) \cdot [\widetilde{X}, \widetilde{Y}](p) \in D(p).$$

Como $p \in M$ foi escolhido de forma arbitrária, a proposição está provada. $\square$

Provemos agora o seguinte lema auxiliar.

Lema 7.4.12. Seja D uma distribuição diferenciável, involutiva e de posto k em M^n. Então, para cada ponto $p \in M$, existem um aberto V em M, com $p \in V$, e campos vetoriais $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(V)$ tais que vale (7.21) no aberto V e $[X_i, X_j] = 0$, para quaisquer $1 \leq i, j, \leq k$.

Demonstração. Dado um ponto $p \in M$, considere uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$. Como D é diferenciável, existem campos $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{X}(U)$ tais que

$$D(q) = \mathrm{span}\{Y_1(q), \ldots, Y_k(q)\},$$

para todo $q \in U$. No aberto U podemos escrever

$$Y_i(q) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q) \frac{\partial}{\partial x_j}(q),$$

onde $b_{ij} \in C^\infty(U)$. Como $Y_1, \ldots Y_k$ são linearmente independentes em U, a matriz $B(q) = (b_{ij}(q))$ tem posto igual a k, para todo $q \in U$. Reordenando as coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ de U, podemos assumir que a submatriz $B' = (b_{ij})$, com $1 \leq i, j \leq k$, é inversível num aberto V, com $p \in V \subset U$. Seja $(\beta_{ij}(q))$ a inversa da matriz $B'(q)$ e defina uma nova base para D em V pondo

$$X_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} Y_j = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\gamma=k+1}^{n} a_{i\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\gamma},$$

onde

$$a_{i\gamma} = \sum_{l=1}^{k} \beta_{il} b_{l\gamma},$$

com $1 \leq i \leq k$ e $k+1 \leq \gamma \leq n$. Como

$$[X_i, X_j] \in \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\},$$

segue que $[X_i, X_j] = 0$, para $1 \leq i, j \leq k$, pois D é involutiva. $\square$

Teorema 7.4.13 (Frobenius)**.** *Toda distribuição diferenciável, involutiva e de posto k em M^n é integrável. Mais precisamente, para cada ponto $p \in M$, existe uma carta local (U, φ) em M, com $p \in U$, tal que para cada $b \in \mathbb{R}^{n-k}$, os subconjuntos*

$$S^b = (\pi \circ \varphi)^{-1}(b) = \{q \in U : \varphi_i(q) = b_i, k+1 \leq i \leq n\}$$

são subvariedades da distribuição D, onde $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}$ é a projeção canônica e $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$. Além disso, se N^k é uma subvariedade integral de D, com N conexa, então $N \subset S^b$, para algum $b \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Demonstração. Dado um ponto $p \in M$, segue do Lema 7.4.12 que existem um aberto V em M, com $p \in V$, e campos $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(V)$ tais que

$$D(q) = \operatorname{span}\{X_1(q), \ldots, X_k(q)\}$$

e

$$[X_i, X_j](q) = 0,$$

para todo $q \in V$. Como os campos $X_1, \ldots, X_k$ são linearmente independentes em V, segue do Teorema 7.3.12 que existe uma carta (U, φ) em M, com $p \in U \subset V$, tal que

$$X_i(q) = \frac{\partial}{\partial x_i}(q),$$

para quaisquer $q \in U$ e $1 \leq i \leq k$. Assim,

$$D(q) = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(q), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}(q)\right\},$$

para todo $q \in U$. Dado $b \in \mathbb{R}^{n-k}$, defina $S^b = (\pi \circ \varphi)^{-1}(b)$. Como b é valor regular para $\pi \circ \varphi$, segue que S^b é subvariedade de M. Além disso, temos

$$T_q S^b = \ker \mathrm{d}(\pi \circ \varphi)(q), \tag{7.22}$$

para todo $q \in S^b$. Mostremos que $T_q S^b = D(q)$. Como $\ker \mathrm{d}(\pi \circ \varphi)(q)$ tem dimensão k, basta provar que $D(q) \subset \ker \mathrm{d}(\pi \circ \varphi)(q)$. Temos:

$$\mathrm{d}(\pi \circ \varphi)(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(q) = \pi\left(\mathrm{d}\varphi(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(q)\right) = \pi(e_i) = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq k$. Isso mostra que $D(q) \subset \ker \mathrm{d}(\pi \circ \varphi)(q)$, para todo $q \in S^b$. Segue então de (7.22) que $D(q) = T_q S^b$, para todo $q \in S^b$. Provamos assim que, para cada $p \in M$, existe uma subvariedade S^b de M, com $p \in S^b$, tal que

$$\mathrm{d}i(q)(T_q S^b) = T_q S^b = D(q),$$

para todo $q \in S^b$, onde $i : S^b \to M$ denota a inclusão canônica. Isso mostra que D é uma distribuição integrável. Finalmente, seja N^k uma subvariedade integral de D, com N conexa. Então, como

$$\mathrm{d}i(x)(T_x N) = D(i(x)),$$

para todo $x \in N$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\pi \circ \varphi \circ i)(x)(T_x N) &= \pi\big(\mathrm{d}\varphi(i(x)) \cdot \mathrm{d}i(x)(T_x N)\big) \\
&= \pi\big(\mathrm{d}\varphi(i(x))(D(i(x)))\big) \\
&= \mathrm{d}(\pi \circ \varphi)(i(x))(D(i(x))) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $x \in N$. Como N é conexa, segue que $(\pi \circ \varphi \circ i)(x) = b \in \mathbb{R}^{n-k}$, para todo $x \in N$ e para algum $b \in \mathbb{R}^{n-k}$, logo $N \subset S^b$. □

Uma *subvariedade integral maximal* N de uma distribuição D numa variedade diferenciável M^n é uma subvariedade integral conexa de D que não é um subconjunto próprio de qualquer outra subvariedade integral conexa de D. O teorema seguinte é uma versão do Teorema 7.4.13 no contexto maximal. O leitor interessado pode conferir [19, Theorem 1.64].

Teorema 7.4.14. *Seja D uma distribuição involutiva de posto k numa variedade diferenciável M. Então, por cada ponto $p \in M$, passa uma única subvariedade integral maximal de D, e qualquer outra subvariedade integral conexa de D, contendo p, está contida nesta maximal.*

7.5 Exercícios

7.1

1. Sejam $D : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ uma derivação em $p \in M$ e $f, g \in C^\infty(M)$ tais que $f \equiv g$ em um aberto $U \subset M$ contendo p. Prove que $D(f) = D(g)$.

7.2

1. Prove que $[X, X] = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

2. Dado uma carta local (U, φ) em uma variedade diferenciável M^n, considere os campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, associados a φ. Prove que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0,$$

para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$.

3. Dado um aberto U de uma variedade diferenciável M, considere um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(f) = 0$, para toda função $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$. Prove que $X|_U = 0$.

7.3

1. Sejam $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ campos vetoriais f-relacionados. Prove que qualquer curva integral de X é transformada por f numa curva integral de Y.

7.4

1. Prove que os seguintes campos vetoriais definem uma distribuição de posto 2 em $\mathbb{R}^3$ que não é involutiva:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

2. Verifique se a distribuição em $\mathbb{R}^3$, dada pelos campos vetoriais

$$X = x_1^3\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$$

é involutiva.

3. Prove que a distribuição em $\mathbb{R}^4$ dada pelos campos vetoriais

$$X = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial w},$$

onde (x, y, z, w) são as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^4$, não admitem subvariedades integrais.

4. Sejam $D_1, \ldots, D_r$ distribuições integráveis de posto $k_1, \ldots, k_r$, respectivamente, em uma variedade diferenciável M. Suponha que, para cada ponto $p \in M$,

$$T_pM = D_1(p) \oplus \ldots \oplus D_r(p).$$

Prove que existe uma carta local (U, φ) em M, em torno de cada ponto de M, tal que D_1 é gerada por $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{k_1}}$, etc.

5. Seja $f : M^m \to N^n$ uma submersão diferenciável. Prove que a aplicação D dada por

$$p \in M \mapsto D(p) = \ker \mathrm{d}f(p),$$

é uma distribuição integrável de posto $m - n$ em M.

6. Dado uma subvariedade M de uma variedade diferenciável N, considere campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ tais que $X(p), Y(p) \in T_pM$, para todo $p \in M$. Prove que $[X, Y](p) \in T_pM$, para todo $p \in M$.

Capítulo 8

Grupos de Lie

8.1 Grupos de Lie

A teoria dos grupos de Lie teve início no final do século XIX com os estudos de Sophus Lie, e constitui hoje uma das classes mais importantes de variedades diferenciáveis. Grupos de Lie são variedades diferenciáveis munidas de uma operação diferenciável de grupo. Nesta seção apresentaremos as definições básicas ilustrando com alguns exemplos conhecidos.

Definição 8.1.1. Um *grupo de Lie* é uma variedade diferenciável G, munida de uma estrutura de grupo, tal que a multiplicação

$$(g,h) \in G \times G \mapsto gh \in G \tag{8.1}$$

e a inversão

$$g \in G \mapsto g^{-1} \in G \tag{8.2}$$

são aplicações diferenciáveis.

Decorre da definição que, para cada $g \in G$, as *translações* $L_g : G \to G$ e $R_g : G \to G$, dadas por

$$L_g(h) = gh \quad \text{e} \quad R_g(h) = hg,$$

para todo $h \in G$, são difeomorfismos. De fato, sabemos que tais aplicações são bijeções, cujas inversas são dadas por

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}} \quad \text{e} \quad (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}.$$

Resta provar que tais aplicações são diferenciáveis. Considerando em $G\times G$ a estrutura de variedade produto (cf. Exemplo 6) segue que, para cada $g \in G$, as aplicações $i_g : G \to G \times G$ e $j_g : G \to G \times G$, dadas por

$$i_g(h) = (g, h) \quad \text{e} \quad j_g(h) = (h, g), \tag{8.3}$$

são mergulhos diferenciáveis. Como a translação à esquerda L_g é a composta da multiplicação (8.1) com i_g, segue que L_g é diferenciável. Analogamente, R_g é diferenciável, pois é a composta da multiplicação (8.1) com o mergulho j_g. Note que a inversão (8.2) também é um difeomorfismo.

Exemplo 8.1.2. Um exemplo simples de grupo de Lie é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido da operação usual de soma em $\mathbb{R}^n$. De forma análoga, qualquer espaço vetorial real é um grupo de Lie sob a operação de soma de vetores.

Exemplo 8.1.3. O conjunto $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, com a operação de multiplicação de números complexos, é um grupo de Lie. De fato, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ é uma variedade diferenciável, parametrizada por uma única carta $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \varphi)$, dada por

$$\varphi(z) = (x, y),$$

onde $z = x + iy$. Usando essas coordenadas, o produto é dado por

$$(z, z') \mapsto (xx' - yy', xy' + yx'),$$

e a inversão é dada por

$$z \mapsto z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

Exemplo 8.1.4. O círculo $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ é um grupo de Lie abeliano com a operação de multiplicação de números complexos.

Exemplo 8.1.5. No conjunto $M(n)$ das matrizes reais $n \times n$, considere o subconjunto $\mathrm{GL}(n)(n)$ formado pelas matrizes inversíveis. Como $\mathrm{GL}(n)(n)$ é aberto em $M(n)$, segue que $\mathrm{GL}(n)(n)$ é variedade diferenciável. Além disso, em relação à multiplicação de matrizes, $\mathrm{GL}(n)(n)$ é um grupo, chamado o *grupo linear*. A fim de provar que a aplicação

$$(A, B) \in \mathrm{GL}(n)(n) \times \mathrm{GL}(n)(n) \to AB^{-1} \in \mathrm{GL}(n)(n)$$

é diferenciável, considere a carta global $\varphi : M(n) \to \mathbb{R}^{n^2}$ em $M(n)$, cuja ij-ésima coordenada de $\varphi(A)$ é a ij-ésima entrada da matriz A. Ou seja, para cada matriz $A \in M(n)$, tem-se $\varphi_{ij}(A) = a_{ij}$. Assim, se $A, B \in \mathrm{GL}(n)(n)$ então $\varphi_{ij}(AB^{-1})$ é uma função racional de $\varphi_{ij}(A)$ e $\varphi_{ij}(B)$ com denominador não-nulo, mostrando que $\mathrm{GL}(n)(n)$ é um grupo de Lie.

Exemplo 8.1.6. Se G e H são grupos de Lie, então a variedade produto $G \times H$, munida da operação produto

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2),$$

também é um grupo de Lie, usualmente chamada de *grupo de Lie produto*. Um caso particular de grupo de Lie produto é *toro* $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Lema 8.1.7. Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo abstrato que também é uma subvariedade de G. Então, com sua estrutura diferenciável de subvariedade, H também é um grupo de Lie.

Demonstração. Como H é subvariedade de G, segue que $H \times H$ é subvariedade de $G \times G$, logo a aplicação inclusão $i : H \times H \to G \times G$ é um mergulho diferenciável. Se $m : G \times G \to G$ é a multiplicação em G, então a composta $\phi = m \circ i : H \times H \to G$ é uma aplicação diferenciável, com $\phi(H \times H) \subset H$. Novamente, como H é subvariedade de G, segue do Corolário 3.4.3 que a aplicação ϕ, com contra-domínio H, é diferenciável. Isso prova que a multiplicação em H é diferenciável. Analogamente se prova que a inversão em H também é diferenciável. $\square$

Exemplo 8.1.8. O grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)(n)$ é um subgrupo de $\mathrm{GL}(n)(n)$. Além disso, pelo Exemplo 1.2.3, $\mathrm{O}(n)(n)$ é subvariedade de $\mathrm{GL}(n)(n)$. Assim, pelo Lema 8.1.7, segue que $\mathrm{O}(n)(n)$ é um grupo de Lie.

Exemplo 8.1.9. Considere a restrição da função det ao grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)(n)$. Analogamente ao caso de $\mathrm{GL}(n)(n)$, obtemos que $\det : \mathrm{O}(n)(n) \to \mathbb{R}$ é uma submersão diferenciável. Ou seja, todo real não-nulo é valor regular de $\det|_{\mathrm{O}(n)(n)}$. Disso decorre que o conjunto

$$\mathrm{SO}(n) = \{X \in \mathrm{O}(n)(n) : \det X = 1\}$$

é uma subvariedade de $\mathrm{O}(n)(n)$, pois $\mathrm{SO}(n) = (\det)^{-1}(1)$. Além disso, $\mathrm{SO}(n)$ é um subgrupo de $\mathrm{O}(n)(n)$. Portanto, pelo Lema 8.1.7, decorre que $\mathrm{SO}(n)$ é um grupo de Lie, chamado o *grupo ortogonal especial*.

Definição 8.1.10. Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo algébrico entre os grupos de Lie G e H. Dizemos que ϕ é um *homomorfismo de grupos de Lie* se ϕ é uma aplicação diferenciável[1].

[1]Poderíamos supor, sem perda de generalidade, que ϕ fosse apenas contínuo pois todo homomorfismo algébrico entre grupos de Lie que é contínuo é automaticamente diferenciável (cf. [19, Teorema 3.39]).

Um homomorfismo $\phi : G \to G$, de G sobre si mesmo, é chamado um *automorfismo*. No caso em que $\phi : G \to H$ tem uma inversa que também é um homomorfismo de grupos de Lie, dizemos que ϕ é um *isomorfismo de grupos de Lie*. Se $\phi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos de Lie segue, por definição, que

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h),$$

para quaisquer $g, h \in G$. Assim, $\phi(e) = e$ e $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$, para todo $g \in G$.

Exemplo 8.1.11. A aplicação de inclusão $i : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{GL}(n)(n)$ é um homomorfismo de grupos de Lie.

Exemplo 8.1.12. A aplicação

$$e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1 \mapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n-2} \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(n)$$

é um homomorfismo de grupos de Lie, de $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathrm{SO}(n)$.

Exemplo 8.1.13. A aplicação $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, dada por $\phi(t) = e^{it}$, é um homomorfismo de grupos de Lie.

Proposição 8.1.14. Se $\phi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos de Lie, então ϕ tem posto constante. Em particular, $\ker(\phi)$ é uma subvariedade fechada de G, que também é um grupo de Lie.

Demonstração. Dado um elemento $g \in G$, temos:

$$\begin{aligned} \phi(g) &= \phi(hh^{-1}g) = \phi(h)\phi(h^{-1}g) \\ &= L_{\phi(h)}(\phi(h^{-1}g)) \\ &= \big(L_{\phi(h)} \circ \phi\big)(h^{-1}g). \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathrm{d}\phi(g) = \mathrm{d}L_{\phi(h)}(\phi(h^{-1}g)) \circ \mathrm{d}\phi(h^{-1}g).$$

Como $L_{\phi(h)}$ é um difeomorfismo, sua matriz jacobiana tem posto máximo em todo ponto, logo o posto de ϕ é o mesmo nos pontos g e $h^{-1}g$, para qualquer $h \in G$. Portanto, ϕ tem posto constante. Pelo Teorema 3.6.1, $\ker(\phi) = \phi^{-1}(e)$ é uma subvariedade fechada de G, com dimensão igual a $\dim G - \mathrm{rank}(\phi)$. Do Lema 8.1.7, concluimos que $\ker(\phi)$ é um grupo de Lie. $\square$

Exemplo 8.1.15. O grupo linear especial $\mathrm{SL}(n)(n)$ é um grupo de Lie. De fato, considere a aplicação $\phi : \mathrm{GL}(n)(n) \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ definida por

$$\phi(A) = \det(A),$$

para toda matriz $A \in \mathrm{GL}(n)(n)$. Temos que ϕ é um homomorfismo de grupos de Lie tal que $\mathrm{SL}(n)(n) = \phi^{-1}(1)$. Logo, pela Proposição 8.1.14, segue que $\mathrm{SL}(n)(n)$ é um grupo de Lie.

8.2 Álgebras de Lie

O ponto central da teoria desenvolvida por Lie é a relação existente entre um grupo de Lie e sua álgebra de Lie dos campos vetoriais invariantes à esquerda. A importância deste conceito é que existe uma álgebra de Lie especial de dimensão finita associada com cada grupo de Lie, e as propriedades do grupo são refletidas em propriedades de sua álgebra de Lie.

Dado uma variedade diferenciável M, lembremos que o colchete de Lie de dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ é o único campo vetorial $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$[X,Y] = -[Y,X] \tag{8.4}$$

e que, em virtude da Proposição 7.2.6, satisfaz a identidade de Jacobi

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0, \tag{8.5}$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Na realidade, o espaço vetorial real $\mathfrak{X}(M)$, munido da aplicação $\mathbb{R}$-bilinear

$$(X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto [X,Y] \in \mathfrak{X}(M),$$

é apenas um exemplo de uma estrutura algébrica abstrata extremamente importante, como veremos a seguir.

Definição 8.2.1. Uma *álgebra de Lie* é um espaço vetorial $\mathfrak{a}$ (sobre um corpo $\mathbb{K}$), munido de uma aplicação $\mathbb{K}$-bilinear $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, denotada usualmente por $(v,w) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \mapsto [v,w] \in \mathfrak{a}$, tal que

$$[v,w] = -[w,v]$$

e que satisfaz a identidade de Jacobi

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0,$$

para quaisquer $u, v, w \in \mathfrak{a}$.

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ é chamada *abeliana* se $[v, w] = 0$, para quaisquer $v, w \in \mathfrak{a}$. Um subespaço $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ é chamado uma *subálgebra de Lie* se $\mathfrak{b}$ é fechado sob a operação do colchete, i.e., $[u, v] \in \mathfrak{b}$, para quaisquer $u, v \in \mathfrak{b}$.

Exemplo 8.2.2. Em virtude de (8.4) e (8.5), o espaço vetorial $\mathfrak{X}(M)$, munido da operação do colchete de Lie, torna-se uma álgebra de Lie.

Exemplo 8.2.3. Qualquer espaço vetorial torna-se uma álgebra de Lie se todos os colchetes são definidos sendo iguais a zero. Neste caso, obtemos uma álgebra de Lie *abeliana*.

Exemplo 8.2.4. O espaço vetorial $M(n)$ das matrizes reais $n \times n$ torna-se uma álgebra de Lie pondo

$$[A, B] = AB - BA,$$

para quaisquer $A, B \in M(n)$.

Exemplo 8.2.5. O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, com a operação bilinear

$$[v, w] = v \times w,$$

onde $\times$ denota o produto vetorial de $\mathbb{R}^3$, é uma álgebra de Lie.

Definição 8.2.6. Sejam $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ álgebras de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $\sigma : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ é um *homomorfismo de álgebras de Lie* se

$$\sigma([v, w]) = [\sigma(v), \sigma(w)], \tag{8.6}$$

para quaisquer $v, w \in \mathfrak{a}$. Um *isomorfismo de álgebras de Lie* é um isomorfismo linear $\sigma : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ que satisfaz (8.6).

A álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ tem dimensão infinita, a menos que M tenha dimensão igual a zero. Estamos interessados agora em certas álgebras de Lie de dimensão finita que são subálgebras de $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 8.2.7. Dado um grupo de Lie G, dizemos que um campo vetorial X (não necessariamente diferenciável) em G é *invariante à esquerda* se, para cada $g \in G$, X é L_g-relacionado com X, i.e., $\mathrm{d}L_g \circ X = X \circ L_g$. Isso significa que $\mathrm{d}L_g(h) \cdot X(h) = X(gh)$, para quaisquer $g, h \in G$.

De forma análoga temos a noção de invariância à direita. Mais precisamente, um campo vetorial X em G é *invariante à direita* se, para cada $g \in G$, X é R_g-relacionado com X, i.e., $\mathrm{d}R_g \circ X = X \circ R_g$. O conjunto de todos os campos vetoriais invariantes à esquerda em um grupo de Lie G será denotado por $\mathfrak{g}$.

Para que um campo vetorial X em G seja invariante à esquerda, basta que $\mathrm{d}L_g(e) \cdot X(e) = X(g)$, para todo $g \in G$. De fato, dado $h \in G$, temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L_g(h) \cdot X(h) &= \mathrm{d}L_g(h) \cdot \mathrm{d}L_h(e) \cdot X(e) \\ &= \mathrm{d}(L_g \circ L_h)(e) \cdot X(e) = \mathrm{d}L_{gh}(e) \cdot X(e) \\ &= X(gh). \end{aligned} \tag{8.7}$$

Exemplo 8.2.8. Os campos invariantes à esquerda de $\mathbb{R}$ são simplesmente os campos vetoriais constantes $\lambda \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, onde o símbolo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ representa o vetor constante igual a 1 em $\mathbb{R}$. O colchete de tais campos é sempre nulo.

Com as operações usuais de soma de campos de vetores e multiplicação por escalar, o conjunto $\mathfrak{g}$ dos campos vetoriais invariantes à esquerda de um grupo de Lie G torna-se um espaço vetorial real.

Proposição 8.2.9. A aplicação $\phi : \mathfrak{g} \to T_eG$ definida por

$$\phi(X) = X(e), \tag{8.8}$$

é um isomorfismo linear. Consequentemente, $\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG = \dim G$.

Demonstração. A prova que $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial é simples e deixada à critério do leitor. Para ver que ϕ é injetora, sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$ tais que $\phi(X) = \phi(Y)$. Assim, dado $g \in G$, temos:

$$X(g) = \mathrm{d}L_g(e) \cdot X(e) = \mathrm{d}L_g(e) \cdot Y(e) = Y(g).$$

Como $g \in G$ é arbitrário, temos que $X = Y$. Além disso, ϕ é sobrejetora. De fato, dado $v \in T_eG$, considere o campo vetorial $X : G \to TG$ dado por $X(g) = \mathrm{d}L_g(e) \cdot v$, para todo $g \in G$. Segue de (8.7) que X é invariante à esquerda. Além disso, tem-se $\phi(X) = X(e) = v$. $\square$

Observe que na Definição 8.2.7 não exigimos que X seja diferenciável. Isso se justifica pela seguinte:

Proposição 8.2.10. Todo campo vetorial invariante à esquerda em um grupo de Lie G é diferenciável.

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{g}$. A fim de provar que $X \in \mathfrak{X}(G)$, basta mostrar que $X(f) \in C^\infty(G)$, para qualquer $f \in C^\infty(G)$. Como

$$X(f)(g) = X(g)(f) = \mathrm{d}L_g(e) \cdot X(e)(f) = X(e)(f \circ L_g),$$

para qualquer $g \in G$, basta mostrar que $g \in G \mapsto X(e)(f \circ L_g)$ é uma função diferenciável. Denote por $m : G \times G \to G$ a multiplicação em G e, para cada $g \in G$, considere os mergulhos i_g e j_g definidos em (8.3). Seja $Y \in \mathfrak{X}(G)$ tal que $Y(e) = X(e)$. Então, $(0, Y)$ é um campo vetorial diferenciável em $G \times G$, e $\big((0, Y)(f \circ m)\big) \circ j_e$ é uma função diferenciável em G que satisfaz:

$$\begin{aligned}\big((0,Y)(f \circ m)\big) \circ j_e(g) &= (0,Y)(g,e)(f \circ m) \\ &= 0(g)(f \circ m \circ j_e) + Y(e)(f \circ m \circ i_g) \\ &= X(e)(f \circ m \circ i_g) = X(e)(f \circ L_g).\end{aligned}$$

Assim, $g \in G \mapsto X(e)(f \circ L_g)$ é uma função diferenciável em G, provando a proposição. □

Proposição 8.2.11. O espaço vetorial $\mathfrak{g}$ é fechado sob a operação do colchete de Lie e, portanto, $\mathfrak{g}$ torna-se uma álgebra de Lie.

Demonstração. Segue da Proposição 8.2.10 que todo campo vetorial invariante à esquerda é diferenciável, logo o colchete de Lie de tais campos está definido. Assim, se $X, Y \in \mathfrak{g}$, segue da Proposição 7.3.3 que $[X, Y]$ é L_g-relacionado com $[X, Y]$, para todo $g \in G$, logo $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. O fato de que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie segue então da Proposição 7.2.6. □

A *álgebra de Lie* de um grupo de Lie G é definida como a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dos campos invariantes à esquerda em G. Alternativamente, poderíamos definir a álgebra de Lie de G como o espaço tangente T_eG, exigindo que o isomorfismo ϕ, definido em (8.8), seja um isomorfismo de álgebras de Lie.

Exemplo 8.2.12. O grupo linear $\mathrm{GL}(n)(n)$ é aberto em $M(n)$, assim tem-se que $T_e\mathrm{GL}(n)(n) = T_eM(n) = M(n)$. Denotando por $\mathfrak{gl}(n)$ a álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n)(n)$, definimos uma aplicação $\beta : \mathfrak{gl}(n) \to M(n)$ pondo

$$\beta(X) = X(e),$$

para todo $X \in \mathfrak{gl}$. A aplicação β é um isomorfismo de álgebras de Lie, logo podemos considerar $M(n)$ como a álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n)(n)$.

Exemplo 8.2.13. Consideremos o grupo linear especial $\mathrm{SL}(n)(n)$. O espaço tangente a $\mathrm{SL}(n)(n)$ no elemento identidade coincide com o subespaço de $M(n)$ das matrizes de traço nulo (cf. Exercício 1.1.**??**). Assim, a álgebra de Lie de $\mathrm{SL}(n)(n)$, denotada por $\mathrm{SL}(n)$, pode ser identificada com o subespaço das matrizes reais $n \times n$ de traço nulo.

Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Como ϕ transforma a identidade de G no elemento identidade de H, a diferencial $\mathrm{d}\phi(e)$ é uma aplicação linear de T_eG sobre T_eH. Através da identificação natural do espaço tangente à identidade com a álgebra de Lie do grupo, através do isomorfismo (8.8), esta aplicação linear $\mathrm{d}\phi(e)$ induz uma aplicação linear de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{h}$, que também denotaremos por $\mathrm{d}\phi$. Ou seja,

$$\mathrm{d}\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \tag{8.9}$$

é a aplicação linear que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{d}\phi"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\simeq"] \\ T_eG \arrow[r, "\mathrm{d}\phi(e)"'] & T_eH \end{tikzcd}$$

Mais precisamente, se $X \in \mathfrak{g}$, então $\mathrm{d}\phi(X)$ é o único campo invariante à esquerda em H tal que

$$\mathrm{d}\phi(X)(e) = \mathrm{d}\phi(e) \cdot X(e). \tag{8.10}$$

Com esta identificação, temos a seguinte:

Proposição 8.2.14. Sejam G, H grupos de Lie com respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, e $\phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Então

(a) X e $\mathrm{d}\phi(X)$ são ϕ-relacionados, para cada $X \in \mathfrak{g}$.

(b) $\mathrm{d}\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Demonstração. (a) Como $\mathrm{d}\phi(X) \in \mathfrak{h}$, temos $\mathrm{d}L_{\phi(g)} \circ \mathrm{d}\phi(X) = \mathrm{d}\phi(X) \circ L_{\phi(g)}$, para todo $g \in G$. Além disso, como ϕ é um homomorfismo, temos $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$, para quaisquer $g, h \in G$, i.e., $\phi \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi$, para todo $g \in G$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi(X)(\phi(g)) &= \big(\mathrm{d}\phi(X) \circ L_{\phi(g)}\big)(e) = \big(\mathrm{d}L_{\phi(g)} \circ \mathrm{d}\phi(X)\big)(e) \\ &= \mathrm{d}(L_{\phi(g)} \circ \phi)(e) \cdot X(e) = \mathrm{d}(\phi \circ L_g)(e) \cdot X(e) \\ &= \mathrm{d}\phi(g) \cdot X(g). \end{aligned}$$

Como $g \in G$ é arbitrário, segue que $\mathrm{d}\phi(X) \circ \phi = \mathrm{d}\phi \circ X$, i.e., X e $\mathrm{d}\phi(X)$ são ϕ-relacionados.
(b) Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, queremos provar que

$$\mathrm{d}\phi([X, Y]) = [\mathrm{d}\phi(X), \mathrm{d}\phi(Y)]. \tag{8.11}$$

Pela Proposição 7.3.3, temos que $[X, Y]$ é ϕ-relacionado com $[\mathrm{d}\phi(X), \mathrm{d}\phi(Y)]$. Em particular, temos que

$$[\mathrm{d}\phi(X), \mathrm{d}\phi(Y)](e) = \mathrm{d}\phi([X, Y](e)).$$

Porém, pela definição em (8.10), $\mathrm{d}\phi([X, Y])$ é o único campo vetorial invariante à esquerda em H cujo valor no elemento identidade é $\mathrm{d}\phi([X, Y](e))$. Assim, vale a igualdade (8.11) e a proposição está provada. $\square$

8.3 Subgrupos de Lie

Nesta seção veremos uma aplicação do teorema de Frobenius, estabelecendo uma correspondência entre subgrupos de Lie de um dado grupo de Lie G e subálgebras de sua álgebra de Lie.

Definição 8.3.1. Seja H um subgrupo abstrato de um grupo de Lie G. Se H é um grupo de Lie tal que a aplicação inclusão $i : H \to G$ é uma imersão, diremos que H é um *subgrupo de Lie de* G.

Proposição 8.3.2. Se H é um subgrupo abstrato de um grupo de Lie G, que também é uma subvariedade de G, então H é um subgrupo de Lie de G.

Demonstração. Em virtude do Lema 8.1.7, já sabemos que H é um grupo de Lie. Além disso, como H é subvariedade de G, a aplicação inclusão $i : H \to G$ é um mergulho, em particular uma imersão. $\square$

Nas condições da Proposição 8.3.2, pode-se provar, além disso, que H é um subconjunto fechado de G (cf. Exercício 8.3.1). Pode-se provar também, porém este é um fato não-trivial, que um subgrupo abstrato H de um grupo de Lie G é uma subvariedade se, e somente se, H é um subconjunto fechado de G (cf. [19, Theorem 5.81]).

Exemplo 8.3.3. O círculo $\mathbb{S}^1$, mergulhado no toro $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ como $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$, é um subgrupo fechado de T^2.

O lema seguinte diz essencialmente que qualquer vizinhança do elemento identidade gera um grupo de Lie conexo.

Lema 8.3.4. Sejam G um grupo de Lie conexo e U uma vizinhança do elemento identidade e. Então,

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n,$$

onde U^n consiste de todos os n-produtos de elementos de U.

Demonstração. Seja $V \subset U$ um subconjunto aberto contendo e tal que $V = V^{-1}$; por exemplo, considere $V = U \cap U^{-1}$. Seja

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n.$$

H é um subgrupo abstrato de G. De fato, por construção, temos que $e \in H$. Além disso, dados $g, h \in H$, tem-se $g = a^n$ e $h = b^m$, com $a, b \in V$, para alguns $m, n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$gh = a^n b^m \in a^n V^m \subset V^n V^m \subset H.$$

H também é um subconjunto aberto de G pois se $h \in H$ então $hV \subset H$ é um aberto contendo h. Finalmente, para cada $g \in G$, a classe lateral à esquerda gH é um aberto em G, pois H é aberto em G. Assim, como

$$G \backslash H = \bigcup_{g \notin H} gH$$

é um aberto em G, sendo união de abertos, segue que H é fechado em G. Como G é conexo e $H \neq \emptyset$, H deve ser todo o grupo G, provando o lema. $\square$

Teorema 8.3.5. *Sejam G um grupo de Lie, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Então, existe um único subgrupo de Lie conexo H de G, cuja álgebra de Lie coincide com $\mathfrak{h}$.*

Demonstração. Dado $g \in G$, denotemos por $D(g)$ o subespaço de $T_g G$ definido por

$$D(g) = \{X(g) : X \in \mathfrak{g} \text{ e } X(e) \in \mathfrak{h}\}.$$

Assim, $v_g \in D(g)$ se, e somente se, $v_g = \mathrm{d}L_g(e) \cdot v$, para algum $v \in \mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, temos:

$$[v_g, w_g] = [\mathrm{d}L_g(e) \cdot v, \mathrm{d}L_g(e) \cdot w] = \mathrm{d}L_g(e) \cdot [v, w] \in D(g),$$

para quaisquer $v_g, w_g \in D(g)$, onde $v, w \in \mathfrak{h}$. Assim,

$$g \in G \mapsto D(g) \subset T_g G$$

define uma distribuição involutiva D em G. Além disso, D é diferenciável, pois é gerada por campos diferenciáveis, e tem posto igual à dimensão de $\mathfrak{h}$. Assim, pelo Teorema 7.4.13, D é integrável. Seja H a subvariedade integral maximal conexa contendo o elemento identidade $e \in G$ (cf. Teorema 7.4.14). Observe que, para cada $h \in G$, temos

$$\mathrm{d}L_g(h)(D(h)) = D(gh),$$

i.e., D é invariante por translações à esquerda. Assim, L_g transforma a variedade integral maximal pelo ponto h difeomorficamente sobre aquela que passa pelo ponto gh. Em particular, se $g \in H$, então $L_{g^{-1}}$ transforma H sobre a variedade integral maximal contendo o ponto $L_{g^{-1}}(g) = e$. Assim, pela maximalidade, concluimos que $L_{g^{-1}}(H) = H$. Portanto, se $g, h \in H$, então também $g^{-1}h \in H$. Disso segue que H é um subgrupo abstrato de G. Como H é subvariedade de G, decorre da Proposição 8.3.2 que H é um subgrupo de Lie de G. Além disso, se $\widetilde{\mathfrak{h}}$ denota a álgebra de Lie de H, então $\mathrm{d}i(\widetilde{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{h}$, onde $i : H \to G$ é o homomorfismo inclusão, pois $T_eH = D(e) = \mathfrak{h}$. Quanto à unicidade, seja K outro subgrupo de Lie conexo de G com $\mathrm{d}j(\mathfrak{k}) = \mathfrak{h}$, onde $j : K \to G$ é a aplicação inclusão. Assim, K deve ser uma variedade integral de D contendo o elemento identidade $e \in G$ e, pela maximalidade de H, tem-se que $K \subset H$. Seja $\phi : K \to H$ a aplicação inclusão. Note que, como i é injetora, ϕ é a única aplicação diferenciável tal que $j = i \circ \phi$. Assim, ϕ é um homomorfismo de grupos de Lie injetor. Como $\mathrm{d}\phi(g)$ é injetora, para todo $g \in K$, segue que $\mathrm{d}\phi(g)$ é um isomorfismo linear, visto que K e H são variedades de mesma dimensão. Decorre então do teorema da aplicação inversa que existe uma vizinhança U de $e \in K$ tal que ϕ é um difeomorfismo de U sobre $\phi(U)$. Sendo $\phi(U)$ uma vizinhança de $e \in H$, decorre do Lema 8.3.4 que

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\phi(U))^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi(U^n) = \phi(K),$$

ou seja, ϕ é sobrejetora. Portanto, ϕ é um isomorfismo de grupos de Lie, e os subgrupos K e H são equivalentes. Isso prova a unicidade. $\square$

Corolário 8.3.6. Existe uma correspondência injetora entre subgrupos de Lie conexos de um grupo de Lie e subálgebras de sua álgebra de Lie.

Corolário 8.3.7. Sejam G, H grupos de Lie com respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$. Se $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então existe uma vizinhança U do elemento identidade $e \in G$ e uma aplicação diferencável $F : U \to H$ tal que

$$F(gh) = F(g)F(h),$$

para quaisquer $g, h \in U$, com $gh \in U$, e tal que

$$\mathrm{d}F(e) \cdot v = \phi(v),$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ definida por

$$\mathfrak{k} = \{(v, \phi(v)) : v \in \mathfrak{g}\}.$$

O fato que ϕ é um homomorfismo implica que $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Assim, pelo Teorema 8.3.5, existe um subrupo de Lie conexo K de $G \times H$ com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Considere a aplicação inclusão $i : K \to G \times H$ e defina um homomorfismo $\rho : K \to G$ pondo $\rho = \pi_G \circ i$, onde π_G e ϕ_H denotam as projeções sobre G e H, respectivamente. Dado $v \in \mathfrak{g}$, temos

$$\mathrm{d}\rho(v, \phi(v)) = v,$$

ou seja, $\mathrm{d}\rho(e, e) : T_{(e,e)}K \to T_eG$ é um isomorfismo linear. Assim, pelo teorema da aplicação inversa, existe uma vizinhança V de $(e, e) \in K$ tal que $\rho|_V$ é um difeomorfismo sobre uma vizinhança U de $e \in G$. Defina um homomorfismo $\psi : K \to H$ pondo $\psi = \pi_H \circ i$. Temos que

$$\mathrm{d}\psi(e, e) \cdot (v, \phi(v)) = \phi(v),$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$. Seja então

$$F = \psi \circ \rho|_V^{-1}.$$

Como F está definida unicamente em termos da inclusão e das projeções, segue que $F(gh) = F(g)F(h)$, para quaisquer $g, h \in U$, com $gh \in U$. Se $v \in \mathfrak{g}$, então $\mathrm{d}\rho(v, \phi(v)) = v$ implica que $\mathrm{d}(\rho|_V^{-1}) \cdot v = (v, \phi(v))$, logo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(e) \cdot v &= \mathrm{d}\psi(e, e) \circ \mathrm{d}(\rho|_V^{-1})(e) \cdot v = \mathrm{d}\psi(e, e)(v, \phi(v)) \\ &= \phi(v), \end{aligned}$$

como queríamos. □

8.4 A aplicação exponencial

Nesta seção estudaremos a aplicação fundamental que relaciona um grupo de Lie G com sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

Dado um grupo de Lie G, denotemos por $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Em virtude do Exercício 8.2.2, temos que todo campo invariante à esquerda $X \in \mathfrak{g}$ é completo. Disso decorre, em particular, que a curva integral γ_X de X, passando pelo elemento identidade $e \in G$, está definida em todo $\mathbb{R}$.

Definição 8.4.1. A *aplicação exponencial* de um grupo de Lie G é a aplicação $\exp : \mathfrak{g} \to G$ definida por

$$\exp(X) = \gamma_X(1),$$

onde $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ é a curva integral de X passando por $e \in G$.

A aplicação exponencial satisfaz várias propriedades interessantes.

Proposição 8.4.2. Para quaisquer $X \in \mathfrak{g}$ e $t \in \mathbb{R}$, tem-se:

(a) $\exp(tX) = \gamma_X(t)$.

(b) $\exp(-tX) = \exp(tX)^{-1}$.

(c) $\exp(t_1X + t_2X) = \exp(t_1X)\exp(t_2X)$.

(d) A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é diferenciável e é um difeomorfismo local sobre a origem $0 \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. A fim de provar o item (a), note que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma_X(ts)|_{s=s_0} = t\gamma'_X(ts_0) = tX(\gamma_X(ts_0)).$$

Isso implica que

$$\gamma_X(ts) = \gamma_{tX}(s),$$

para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$. Em particular, para $s = 1$, obtemos

$$\gamma_X(t) = \gamma_{tX}(1) = \exp(tX),$$

e isso prova o item (a). Os itens (b) e (c) são consequências de (a), levando em consideração que γ_X é um homomorfismo de grupos de Lie. A diferenciabilidade da aplicação exponencial segue de propriedades gerais do fluxo, mais precisamente, dependência diferenciável nos parâmetros das soluções de EDO's. Além disso, a diferencial

$$\mathrm{d}\exp(0) : T_0\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g} \to T_eG \simeq \mathfrak{g}$$

é a aplicação identidade, pois

$$\mathrm{d}\exp(0) \cdot X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tX)|_{t=0} = \gamma'_X(0) = X.$$

Assim, exp é um difeomorfismo de uma vizinhança da origem 0 em $\mathfrak{g}$ sobre uma vizinhança do elemento identidade $e \in G$ em virtude do teorema da aplicação inversa. $\square$

Exemplo 8.4.3. Consideremos novamente o grupo linear $\mathrm{GL}(n)(n)$. É natural esperar que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{gl}(n) \to \mathrm{GL}(n)(n)$ coincida com a exponencial usual de matrizes, a qual é dada por

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n. \tag{8.12}$$

A série em (8.12) é absolutamente convergente em todo espaço $M(n)$ e, quando $n = 1$, reobtemos a aplicação exponencial usual em $\mathbb{R}$. Usando a propriedade

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA}|_{t=t_0} = Ae^{t_0 A} = e^{t_0 A} A$$

da exponencial de matrizes (cf. [**?**]) concluímos, em virtude da unicidade das curvas integrais, que $t \mapsto e^{tA}$ é a curva integral de A passando pelo elemento identidade, logo $\exp(A) = \gamma_A(I) = e^A$, para toda matriz $A \in \mathfrak{gl}(n)$.

Um homomorfismo de grupos de Lie $\phi : \mathbb{R} \to G$ é usualmente chamado um *subgrupo a* 1*-parâmetro*. Observe que ϕ é a curva integral do campo $X = \mathrm{d}\phi(e) \in \mathfrak{g}$ e, em virtude da Proposição 8.4.2, tem-se que

$$\phi(t) = \exp(tX),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. De forma mais geral, se $\phi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos de Lie então, para um dado campo invariante à esquerda $X \in \mathfrak{g}$, a aplicação $\psi : \mathbb{R} \to H$ dada por

$$\psi(t) = \phi(\exp_G(tX))$$

é um subgrupo a 1-parâmetro, com

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \phi(\exp_G(tX))|_{t=0} = \mathrm{d}\phi(e) \cdot X(e) = \mathrm{d}\phi(X)(e).$$

Assim, pelo mesmo argumento acima, segue da Proposição 8.4.2 que

$$\psi(t) = \exp_H(t\mathrm{d}\phi(X)),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, i.e.,

$$\phi(\exp_G(tX)) = \exp_H(t\mathrm{d}\phi(X)),$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De forma simplificada, isso significa que

$$\phi \circ \exp_G = \exp_H \circ \mathrm{d}\phi. \tag{8.13}$$

A igualdade em (8.13) significa que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{d}\phi"] \arrow[d, "\exp_G"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp_H"] \\
G \arrow[r, "\phi"'] & H
\end{tikzcd}$$

O resultado seguinte reune três identidades conhecidas como *fórmulas de Campbell*, e cuja prova pode ser encontrada em [18].

Proposição 8.4.4. Dados um grupo de Lie G e campos invariantes à esquerda $X, Y \in \mathfrak{g}$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $|t| < \epsilon$, valem as seguintes identidades:

(a) $\exp(tX)\exp(tY) = \exp\Big(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\Big)$,

(b) $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX) = \exp(tY + t^2[X,Y] + O(t^3))$,

(c) $\exp(-tX)\exp(-tY)\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t^2[X,Y] + O(t^3))$,

onde $\frac{O(t^3)}{3}$ é limitado.

8.5 A representação adjunta

Nesta seção discutiremos a representação adjunta de um grupo de Lie G. A fim de introduzir tal aplicação, fixemos um elemento $g \in G$ e consideremos a *conjugação* $C_g : G \to G$ através de g dada por

$$C_g(h) = (L_g \circ R_{g^{-1}})(h) = ghg^{-1}, \tag{8.14}$$

para todo $h \in G$. A aplicação C_g é de fato um automorfismo de grupos de Lie, também chamado de *automorfismo interno*. Isso de fato nos dá um homomorfismo

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(n)(\mathfrak{g}) \tag{8.15}$$

que, a cada elemento $g \in G$, associa o elemento $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{GL}(n)(\mathfrak{g})$. O homomorfismo em (8.15) é chamado a *representação adjunta* de G em $\mathfrak{g}$. Vejamos como se comporta a diferencial do homomorfismo (8.15).

Inicialmente, a diferencial da conjugação C_g no elemento identidade e define um automorfismo $\mathrm{d}C_g(e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ na álgebra de Lie, que será denotado por Ad_g. Decorre de (8.14) que

$$\mathrm{Ad}_g(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\exp(tX)g^{-1})|_{t=0}, \tag{8.16}$$

para quaisquer $X \in \mathfrak{g}$ e $t \in \mathbb{R}$. Aplicando a equação (8.13) ao automorfismo C_g, segue que

$$\exp(t\mathrm{Ad}_g(X)) = C_g(\exp(tX)) = g\exp(tX)g^{-1}.$$

Em particular, para $t = 1$, obtemos:

$$g\exp(X)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_g(X)). \tag{8.17}$$

A diferencial da representação adjunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(n)(\mathfrak{g})$ no elemento identidade $e \in G$ será denotada por ad, e é a aplicação $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dada por

$$\mathrm{ad}(X)Y = \mathrm{dAd}_g(e) \cdot X(Y).$$

Segue da definição acima que

$$\mathrm{ad}(X)Y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y))|_{t=0}. \tag{8.18}$$

Usando a equação (8.13) novamente, temos

$$\mathrm{Ad}_{\exp(tX)} = \exp(t\mathrm{ad}(X)),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, i.e., o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exp"] \\
G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

Em particular, para $t = 1$, obtemos

$$\mathrm{Ad}_{\exp(X)} = \exp(\mathrm{ad}(X)). \tag{8.19}$$

Proposição 8.5.1. Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$, tem-se:

$$\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]. \tag{8.20}$$

Demonstração. Usando (8.17), com $g = \exp(tX)$, na fórmula (b) de Campbell, obtemos:

$$\exp(\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(tY)) = \exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3)).$$

Como exp é localmente injetora em torno de $0 \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(tY) = tY + t^2[X, Y] + O(t^3),$$

para t suficientemente pequeno. Dividindo por t, derivando em $t = 0$ e aplicando (8.18), obtemos a relação (8.20). $\square$

Lema 8.5.2. Se um grupo de Lie G é abeliano, sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ também é abeliana.

Demonstração. Como G é abeliano, segue que

$$\exp(sX)\exp(tY)\exp(-sX) = \exp(tY),$$

para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Derivando em $t = 0$, obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(sX)\exp(tY)\exp(-sX)|_{t=0} = Y.$$

Decorre de (8.16) que

$$\mathrm{Ad}_{\exp(sX)}(Y) = Y.$$

Derivando em $s = 0$, segue de (8.18) e da Proposição 8.5.1 que

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{Ad}_{\exp(sX)}(Y))|_{s=0} = \mathrm{ad}(X)Y = [X, Y],$$

mostrando que $\mathfrak{g}$ é abeliana. □

A recíproca do Lema 8.5.2 também é verdadeira, e o leitor pode conferir [**?**, Proposition 1.39]. Finalizamos a seção dando uma ideia da prova do resultado seguinte.

Teorema 8.5.3. *Todo grupo de Lie conexo abeliano é isomorfo a* $\mathbb{R}^{n-k} \times T^k$*, onde* $T^k = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ *é um toro k-dimensional. Em particular, um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo e abeliano é isomorfo a* $\mathbb{R}^n$*, e um grupo de Lie conexo, compacto e abeliano é isomorfo ao toro* T^n*.*

Demonstração. Decorre do Lema 8.5.2 que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é abeliana e a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é um homomorfismo, onde $\mathfrak{g}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ como grupo de Lie. Neste caso, exp é um recobrimento diferenciável e, assim, G é isomorfo ao quociente de $\mathbb{R}^n$ pelo grupo discreto $\ker \exp$. □

8.6 Exercícios

8.1

1. Dois exemplos importantes dos assim chamados *grupos de Lie clássicos* são o *grupo linear especial*

$$\mathrm{SL}(n)(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n)(n) : \det(A) = 1\}$$

e o *grupo ortogonal especial* $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n)(n) \cap \mathrm{SL}(n)(n)$.

(i) Mostre que, de fato, $\mathrm{SL}(n)(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ são grupos de Lie.

(ii) Prove que $\mathrm{SO}(2)$ é um grupo de Lie compacto, conexo e unidimensional, logo é difeomorfo ao círculo $\mathbb{S}^1$.

(iii) Mostre que

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Deduza, também daí, que $\mathrm{SO}(2)$ é difeomorfo ao círculo $\mathbb{S}^1$.

2. Verifique que a esfera tridimensional $\mathbb{S}^3$ é um grupo de Lie. Mais precisamente, $\mathbb{S}^3$ é o grupo de Lie dos quatérnios de norma unitária ($\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$ são as únicas esferas que admitem estrutura de grupo de Lie).

3. Dados um grupo de Lie G e um elemento $g \in G$, prove que a aplicação de *conjugação* $C_g : G \to G$, dada por $C_g(h) = ghg^{-1}$, para todo $h \in G$, é um isomorfismo de grupos de Lie, que satisfaz $C_g = L_g \circ R_g^{-1}$.

4. Sejam G um grupo de Lie conexo e $U \subset G$ um aberto contendo o elemento identidade $e \in G$. Prove que U gera G, i.e., todo elemento de G é um produto de elementos de U.

5. Sejam $\phi, \psi : G \to H$ homomorfismos de grupos de Lie que coincidem numa vizinhança da identidade. Se G é conexo prove que $\phi = \psi$.

6. Mostre que

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\overline{\omega} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \omega \in \mathbb{C},\ \|\alpha\|^2 + \|\omega\|^2 = 1 \right\}.$$

Deduza que $\mathrm{SU}(2)$ é difeomorfa à esfera $\mathbb{S}^3$.

8.2

1. Prove que se G e H são grupos de Lie, então a álgebra de Lie $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ é, a menos de identificações, a álgebra de Lie de $G \times H$.

2. Prove que todo campo invariante à esquerda $X \in \mathfrak{g}$ é completo.

3. Prove que a álgebra de Lie do grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)(n)$ coincide com o subespaço de $M(n)$ formado pelas matrizes anti-simétricas.

8.3

1. Seja H um subgrupo abstrato de um grupo de Lie G, que também é uma subvariedade de G. Prove que H é um subconjunto fechado de G.

8.4

1. Mostre que

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

2. O objetivo desse exercício é mostrar que a aplicação exponencial não tem a propriedade de ser sobrejetora (cf. [**?**]).

(a) Mostre que todo elemento $g \in G$ que pertence à imagem da aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ tem uma raiz quadrada, i.e., existe $h \in G$ tal que $h^2 = g$.

(b) Prove que trace $A^2 \geq -2$, para toda matriz $A \in \mathrm{SL}(n)(2)$.

(c) Conclua que $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ não está na imagem da aplicação exponencial $\exp : \mathrm{SL}(2) \to \mathrm{SL}(n)(2)$.

3. Mostre que o fluxo $\{\varphi_t\}$ de um campo invariante à esquerda X num grupo de Lie G é dado por $\varphi_t = R_{\exp tX}$.

Referências Bibliográficas

[1] Adachi, M., *Embeddings and Immersions*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, v. 124, 1993.

[2] M. Berger, B. Gostiaux, *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*, Springer-Verlag, 1088.

[3] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[4] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, 1960.

[5] Donaldson, S. K.; Kronheimer, P. B., *The geometry of four-manifolds*, Clarendon Press, New York, 1990.

[6] Freedman, M.; Quinn, F., *Topology of* 4*-manifolds*, Princeton University Press, Princeton, 1990.

[7] Guillemin, V., Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1974.

[8] Hirsch, M. W., *Differential Topology*, Springer-Verlag, New York, GTM 33, 1976.

[9] Kervaire, M. A., *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. **34** (1960) 257–270.

[10] Lee, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, GTM 218, 2006.

[11] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 2, Projeto Euclides, IMPA, 1999.

[12] Milnor, J., *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math., **64** (1956), 399–405.

[13] Moise, E. E., *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[14] A. P. Morse, *The behaviour of a function on its critical set*, Annals of Mathematics **40** (1), (1939), 62–70.

[15] Munkres, J. R., *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.

[16] Munkres, J. R., *Obstructions to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphisms*, Annals of Math., **72** (1960) 521–554.

[17] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bulletin of the American Mathematical Society **48** (12), (1942), 883–890.

[18] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. 1, Publish or Perish, Inc., 1999.

[19] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, 2000.

[20] Whitney, H., *Differentiable manifolds*, Ann. of Math, (2) **37** (1936), 645 – 680.