Solução da 1ª Avaliação de Cálculo I – SMA0353

Engenharia Ambiental – USP São Carlos
Prof. Fernando Manfio

1. (a) Suponha, por absurdo, que $z = x+y \in \mathbb{Q}$. Como o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é fechado em relação à soma, decorre que $z - x = y \in \mathbb{Q}$, o que é uma contradição. Portanto, se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \notin \mathbb{Q}$, provamos que $x + y \notin \mathbb{Q}$.

(b) Considere duas funções $f, g : I \to \mathbb{R}$ tais que f é uma função par e g é uma função ímpar, ou seja,

$$f(-x) = f(x) \quad \text{e} \quad g(-x) = -g(x),$$

para todo $x \in I$. Para a função produto $f \cdot g$, temos:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(-x) &= f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x) \\ &= -(f \cdot g)(x), \end{aligned}$$

provando que $f \cdot g$ é uma função ímpar.

2. Basta observar que:

$$\begin{aligned} |1 - 3x| < 7 \quad &\Leftrightarrow \quad -7 < 1 - 3x < 7 \Leftrightarrow -8 < -3x < 6 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 < x < \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Assim, o conjunto solução S da inequação $|1 - 3x| < 7$ é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : -2 < x < \frac{8}{3} \right\}.$$

3. Note que:

$$\begin{aligned} x \in Dom(f) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x \geq 0 & \text{e} & 1 - x > 0 \\ & \text{ou} & \\ x \leq 0 & \text{e} & 1 - x < 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x \geq 0 & \text{e} & x < 1 \\ & \text{ou} & \\ x \leq 0 & \text{e} & x > 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow 0 \leq x < 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}.$$

4. Suponha, por absurdo, que f não seja identicamente nula. Assim, existe $x_0 \notin \mathbb{Q}$ tal que $f(x_0 \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $f(x_0) > 0$. Como f é contínua em x_0, segue da lei de conservação do sinal que existe $r > 0$ tal que

$$f(x) > 0, \ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

No entanto, no intervalo aberto $(x_0 - r, x_0 + r)$ existe, pelo menos, um número racional, digamos p_0. Para tal ponto, teremos $f(p_0) > 0$, o que é uma contradição pois, por hipótese, f é nula nos racionais.

5. Note que

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(x^2-1)}{x-2} = x^2 - 1,$$

para $x \neq 2$. Assim,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 4 - 1 = 3.$$

Portanto, para que f seja contínua em $x = 2$, devemos ter

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3 = f(2),$$

ou seja, $L = f(2) = 3$.

6. (a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} \\ &= 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

(b) Lembre que $|\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)| \leq 1$, ou seja,

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1.$$

Multiplicando por $x^2 \geq 0$, obtemos

$$-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, decorre do teorema do confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

(c)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x+3}}{2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \sqrt{\frac{x+3}{x^2}}\right)}{x\left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$