1ª Avaliação de Geometria Diferencial – SMA0175

Bacharelado em Matemática

Prof. Fernando Manfio

Nome: ______________________________________ **No USP:** ____________

1. Calcule o posto da aplicação $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y) = (x^2, y^2, (x+y)^2).$$

2. Considere a aplicação $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^3 + y^3, x^3 - y^3)$. Prove que f é diferenciável e calcule sua diferencial no ponto $p = (1,-1)$ na direção do vetor $v = (0,2)$.

3. Considere uma função diferenciável $f\colon U \to \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, e um ponto $x \in U$ tal que $df(x) \neq 0$. Prove que, dentre todos os vetores $v \in \mathbb{R}^3$, com $\|v\| = 1$, a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ atinge seu valor máximo quando $v = \nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$.

4. Sejam $f\colon V \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, definida no aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, e $c \in \mathbb{R}$ um valor regular para f. Prove que se $f^{-1}(c) \neq \emptyset$, então $M = f^{-1}(c)$ é uma superfície regular.

5. Prove que o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

6. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta. Dado um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^3$, prove que existe um ponto $p \in M$ tal que v é ortogonal a T_pM.

Pontuação:

1.	1,0
2.	1,0
3.	2,0
4.	2,0
5.	2,0
6.	2,0

Solução da 1^{a} Avaliação de Geometria Diferencial – SMA0175

1. A aplicação f é diferenciável pois cada uma de suas funções coordenadas é diferenciável. Além disso, para cada ponto $(x, y) \neq (0, 0)$, os vetores coluna da matriz jacobiana de f em (x, y) são $2(x, 0, x + y)$ e $2(0, y, x + y)$, e estes são L.I., visto que as duas primeiras coordenadas são sempre L.I. para $(x, y) \neq (0, 0)$. Logo, o posto de f é 2 em qualquer ponto $(x, y) \neq (0, 0)$.

2. A aplicação f é diferenciável pois cada uma de suas funções coordenadas é diferenciável. A diferencial de f num ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é dada, matricialmente, por

$$df(x, y) = 3 \begin{pmatrix} x^2 & y^2 \\ x^2 & -y^2 \end{pmatrix}.$$

Assim, no ponto $p = (1, -1)$, e considerando o vetor $v = (0, 2)$, temos

$$df(p) \cdot v = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot (0, 2) = (6, -6).$$

3. Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^3$, com $\|v\| = 1$, segue da definição de gradiente e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = df(x) \cdot v = \langle \nabla f(x), v \rangle \leq \|\nabla f(x)\| \cdot \|v\| = \|\nabla f(x)\|.$$

A igualdade acima ocorre se, e somente se, $v = \nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$, visto que $\nabla f(x) \neq 0$.

4. Vide notas de aula.

5. Note que M é o conjunto $f^{-1}(0)$, onde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a função dada por

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + z^2 - 1.$$

Em virtude do Exercício 4, basta verificar que $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular para f. De fato, f é diferenciável e suas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

Tais derivadas são nulas simultaneamente somente no ponto $(0, 0, 0)$, o qual não pertence ao conjunto $f^{-1}(0)$, pois $f(0, 0, 0) = -1 \neq 0$. Isso mostra que todo ponto de $M = f^{-1}(0)$ é ponto regular de f, logo M é superfície regular.

6. Considere a função altura $f\colon M \to \mathbb{R}$ relativa ao plano ortogonal a v, passando pela origem de $\mathbb{R}^3$, i.e., $f(p) = \langle p, v \rangle$, para todo $p \in M$. A função f é diferenciável e, para cada $p \in M$ e todo $w \in T_pM$, tem-se

$$df(p) \cdot w = \langle w, v \rangle.$$

Agora, como M é compacta e f é contínua, existe um ponto $p \in M$ que é ponto de mínimo (local) para f. Em particular, tem-se $df(p) = 0$. Ou seja, $df(p) \cdot w = 0$, para todo $w \in T_pM$. Disso decorre que v é ortogonal a T_pM.