Programação Matemática e Pesquisa Operacional

Professoras Franklina e Maristela

.

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC
Universidade de São Paulo - USP

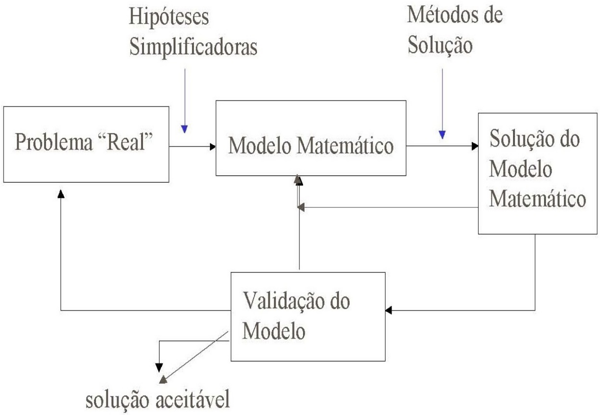
.

Aula preparada com apoio de pesquisadores do Lab. de Otimização - ICMC/USP

Revisão aula passada

Modelagem

Resolução de um problema utilizando PO segue as seguintes fases



Construindo um modelo matemático

- Passo Fundamental: Ouvir aquele que lida com o problema real.
- Passo 1: Descobrir o que deve ser determinado (variáveis do problema).
- Passo 2: Descobrir o que está disponível (dados do problema).
- Passo 3: Reproduzir os caminhos que levam a uma solução (equações).

Classificação dos problemas de programação matemática

Problemas de Programação Linear

$$
\begin{aligned}
\text{min (ou max)} \quad & c^t x \\
\text{sujeito a :} \quad & Ax = b \\
& x \in \mathbb{R}^n_+
\end{aligned}
$$

Problemas de Programação Linear Inteira

$$
\begin{aligned}
\text{min (ou max)} \quad & c^t x \\
\text{sujeito a :} \quad & Ax = b \\
& x \in \mathbb{Z}^n_+
\end{aligned}
$$

Problemas de Programação Linear Inteira-Mista

$$\begin{aligned} \text{min (ou max)} \quad & c^t x + d^t y \\ \text{sujeito a :} \quad & Ax + By = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \text{ e } y \in \mathbb{Z}^p_+ \end{aligned}$$

Modelos Lineares

Hipóteses de Linearidade

Nos modelos de programação linear são admitidas algumas hipóteses que as grandezas envolvidas precisam obedecer:

- aditividade,
- proporcionalidade, e
- fracionamento (ou divisibilidade).

Exemplo da primeira aula: Problema da dieta

Um estudante deseja balancear os alimentos que consome no café da manhã, de modo que minimize o custo. Para isso, ele pretende se alimentar de modo que consuma no mínimo 130mg de cálcio e no máximo 480 kcal. O valor nutritivo e o preço por porção dos alimentos a serem considerados são dados por:

Tipo de alimento	Porção	Cálcio (mg)	Energia (kcal)	Preço (R$)
Leite Achocolatado	100 ml	70	83	0,90
Pão de forma	100 g	2,5	343	0,10

Quanto de cada alimento ele deve consumir?

Exemplo da primeira aula: Problema da dieta

Variáveis:

x_L: porção a ser consumida de leite achocolatado (100ml);
x_P: porção a ser consumida de pão de forma (100g);

$$
\begin{array}{rrl}
\min & 0,9x_L + 0,1x_P & \leftarrow \text{custo dos alimentos (R\$)} \\
\text{sujeito a :} & 70x_L + 2,5x_P \geq 130 & \leftarrow \text{quantidade míminima de cálcio (mg)} \\
& 83x_L + 343x_P \leq 480 & \leftarrow \text{quantidade máxima de calorias (kcal)} \\
& x_L, x_P \in \mathbb{R}_+ &
\end{array}
$$

Hipótese de aditividade

Esta hipótese pressupõe que o todo é igual à soma das partes.

Por exemplo, se em 100ml de leite achocolatado encontramos 70mg de cálcio e, em 100g de pão de forma encontramos 2,5mg do mesmo componente, então na refeição composta por 100ml de leite achocolatado e 100g de pão de forma ingerimos 72,5mg de cálcio.

Nota: em alguns casos isso não ocorre como, por exemplo, quando temos reações químicas.

Hipótese de proporcionalidade

- Esta hipótese pressupõe que se a_{ij} é a quantidade do componente i em uma unidade do ingrediente j, então $a_{ij}x_j$ será a quantidade do componente i em x_j unidades.
- Por exemplo, se 100ml de leite achocolatado contém 70mg de cálcio, então 200ml de leite achocolatado contém 140mg do mesmo componente, assim como 300ml contém 210mg.

Hipótese de fracionamento

- Valores fracionários para as variáveis são aceitáveis.
- Por exemplo, tanto podemos utilizar 1 porção de leite achocolatado (100ml), como também, 0,5 porção de leite (50ml).

Hipóteses de Linearidade

- Embora as hipóteses de linearidade possam sugerir que modelos de otimização linear têm utilização limitada, os exemplos de aplicações nas mais diversas áreas de conhecimento e situações práticas indicam o contrário.
- Existem inúmeros outros exemplos de aplicações de modelos de otimização linear em diversas áreas, como por exemplo, em engenharia (naval, produção, química, metarlúgica, elétrica, eletrônica, computação, florestal, alimentos, mecânica, mecatrônica, civil, controle e automação, aeronáutica, minas, etc.), em economia e finanças, medicina, física, ciências sociais, ecologia e esportes.

Aplicações

Pesquisa Operacional - Aplicações

- indústria de petróleo: extração, refinamento, mistura e distribuição.
- indústria de alimentos: ração animal (problema da mistura).
- planejamento da produção: dimensionamento de lotes (o que, quando e quanto produzir?).
- indústria siderúrgica: ligas metálicas (problema da mistura).
- indústria de papel: otimização do processo de cortagem de bobinas.
- indústrias de móveis: otimização do processo de cortagem de placas retangulares.
- aplicações financeiras: otimização do fluxo de caixa, análise de carteiras de investimento.

Um exemplo

- Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional 2011 - Ubatuba SP
- Modelo para o planejamento tático integrado da produção e distribuição de papel e celulose (Silva et al. 2011)
- 3,3 milhões de variáveis de decisão
- 500 mil restrições
- Resolvido em 30 minutos (pacote CPLEX - IBM ILOG CPLEX Optimize)

- Solvers que resolvem problemas lineares
- CPLEX / IBM ILOG
- http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/
- XPRESS: www.dashoptimization.com/
- Gurobi : http://www.gurobi.com/
- General Algebraic Modeling System (GAMS) www.gams.com/
- Programas livres: GLPK / Gnu: www.gnu.org/software/glpk
- Symphony: http://www.cs.stonybrook.edu/ algorith/implement/spp/implement.shtml

Problema da Mistura

O PROBLEMA DA MISTURA

Problema da mistura

- Materiais disponíveis são combinados para gerar novos produtos com características convenientes.
- Um dos primeiros problemas de otimização linear implementados com sucesso na prática.
- Abordagens:
  - ração;
  - ligas metálicas;
  - composição de filtros de areia.

Problema da mistura - Ração

- Queremos saber quais as quantidades ideais de cada ingrediente para fazer uma quantidade de ração, com as necessidades nutricionais atendidas e o custo total dos ingredientes seja o menor possível.
- Temos os ingredientes e seus custos.
- Para fazer uma certa quantidade de ração para aves, é necessário uma certa quantidade nutrientes: vitamina A (V_A), vitamina B (V_B) e proteína (V_P).

Problema da mistura - Ração

- Deseja-se prepara uma ração que contenha no mínimo 7 unidades de V_A, 9 unidades de V_B e 1 unidade de V_P.

Nutrientes	Ingredientes Milho (M)	F. Osso (F)	Qtde Mínima
Vitamina A (V_A)	2	3	7
Vitamina B (V_B)	3	2	9
Proteína (V_C)	1	0	1
Custos (R$/kg)	65	30	

- Como misturar (as quantidades) dos ingredientes de modo que atenda as necessidades nutricionais e produza uma ração de menor custo possível?

Problema da mistura - O que decidir?

- Quantidades dos ingredientes presentes na mistura?
- Decisões: Denominadas Variáveis de decisão.
- Definindo:
  - x_M =quantidade de milho presente na mistura (kg).
  - x_F =quantidade de farinha de osso presente na mistura (kg).

Problema da mistura - Decidir para que?

- O custo mínimo seria nulo se não fosse as quantidades mínimas de nutrientes a serem atendidas (Vitamina A, Vitamina B e Proteína)(os custos são positivos).
- Objetivo: minimizar o custo total da mistura, que é dado por: $f(x_M, x_F) = 65x_M + 30x_F$.
- Devemos determinar x_M e x_F tal que $f(x_M, x_F)$ seja o menor possível.

Modelagem do Exemplo 1

Considere que as composições de vitamina A, vitamina B e proteína na ração sejam satisfeitas.

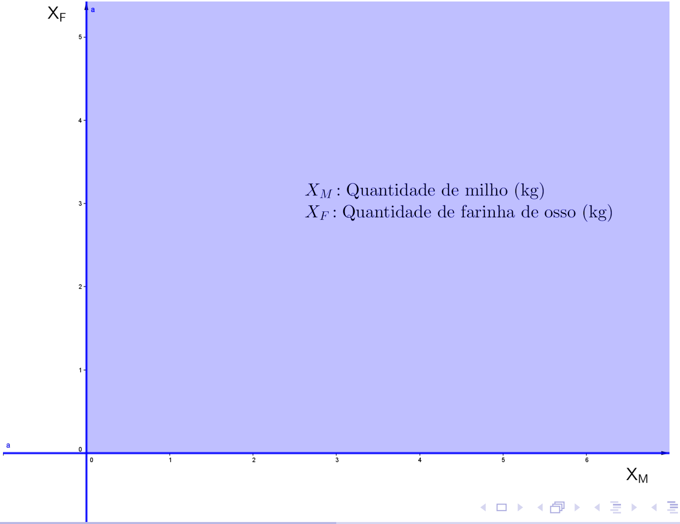
Modelo Matemático:

$$min\ f(x_M, x_F) = 65x_M + 30x_F$$

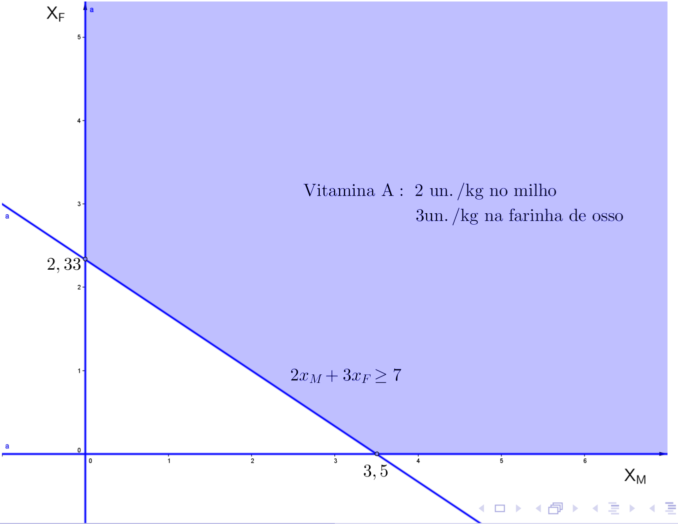
Sujeito a:

$$\begin{aligned} 2x_M + 3x_F &\geq 7 \\ 3x_M + 2x_F &\geq 9 \\ 1x_M + 0x_F &\geq 1 \\ x_M \geq 0, x_F &\geq 0. \end{aligned}$$

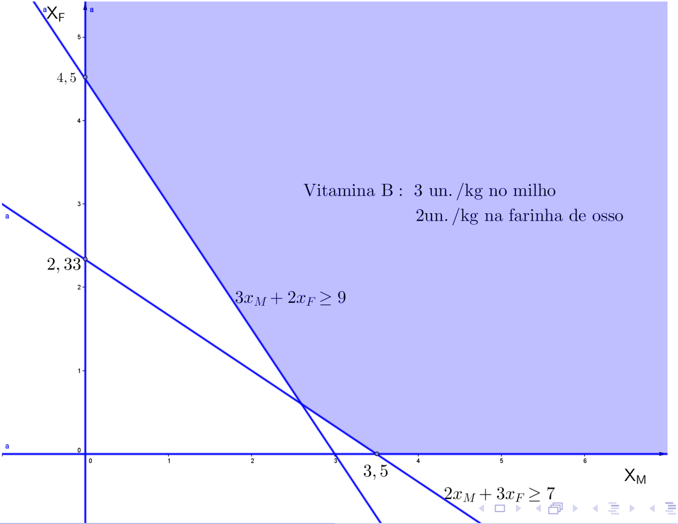
Problema da mistura - Ração



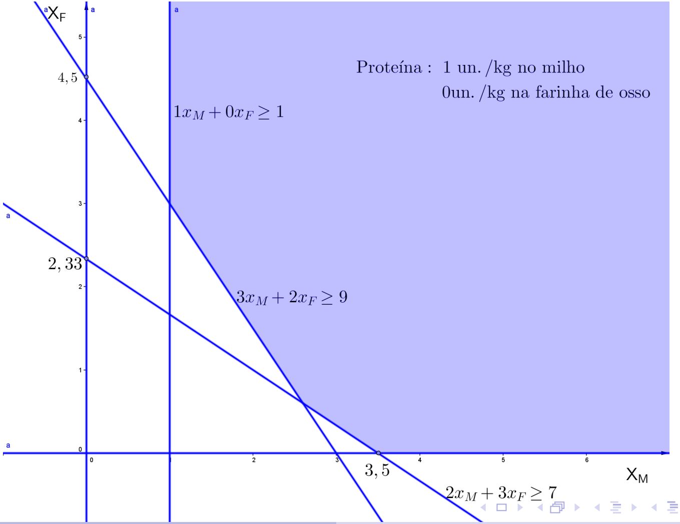
Problema da mistura - Ração



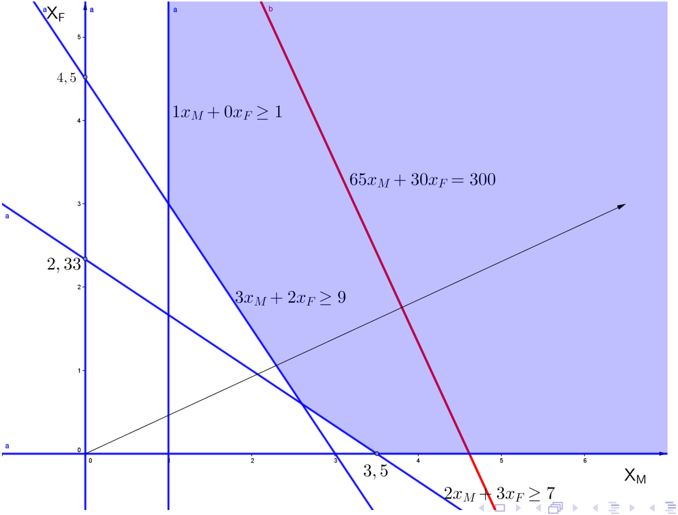
Problema da mistura - Ração



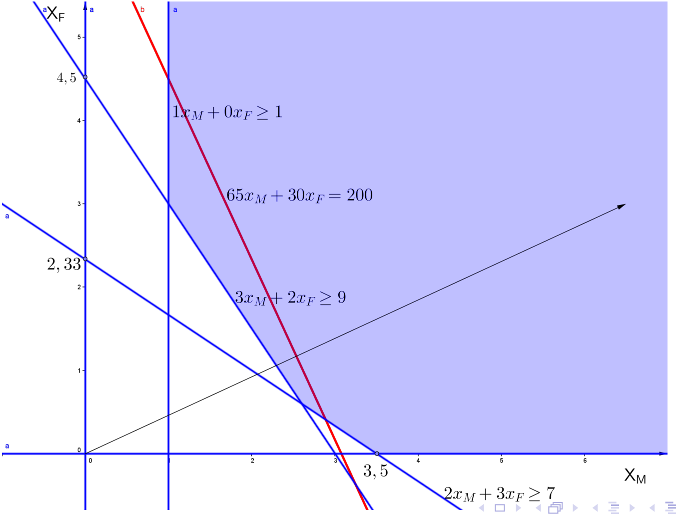
Problema da mistura - Ração



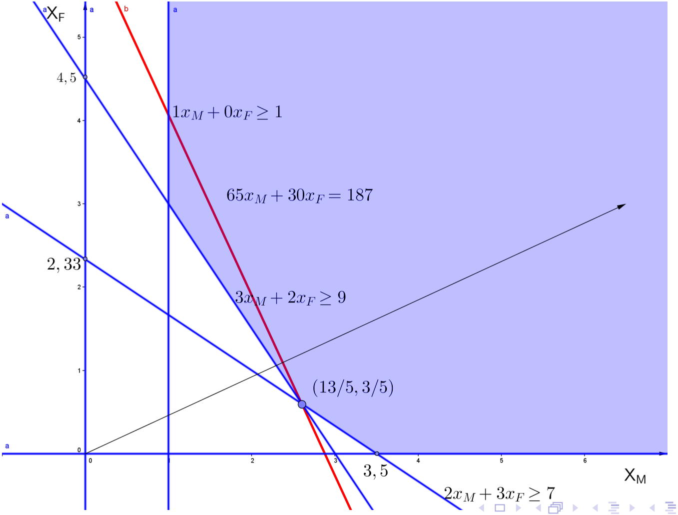
Problema da mistura - Ração



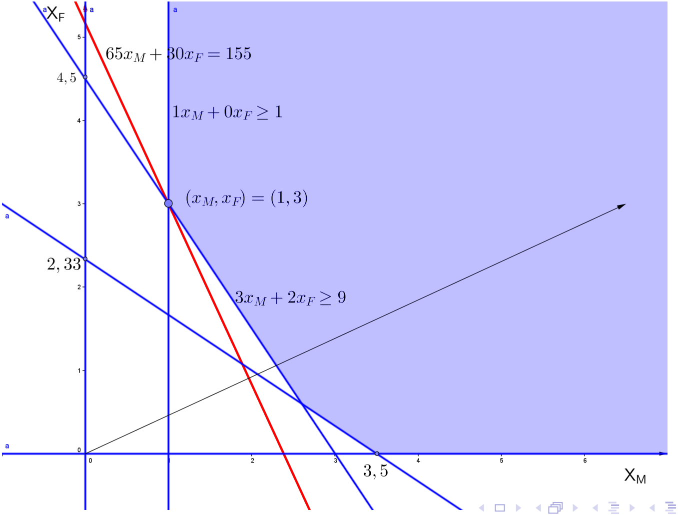
Problema da mistura - Ração



Problema da mistura - Ração

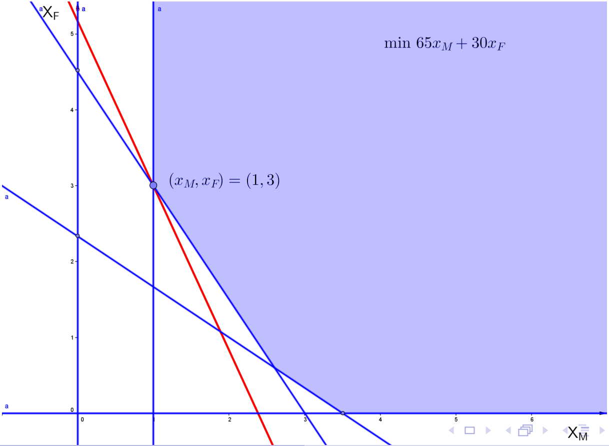


Problema da mistura - Ração



Problema da mistura - Ração

Custo Minimo da Mistura $f^* = 155$ e devemos misturar 1kg de milho e 3kg de farinha de osso.



Generalizando...

- Suponha que m componentes sejam relevantes para uma mistura e dispomos de n ingredientes. A fração de cada componente em cada ingrediente, a fração dos componentes da mistura e os custos unitários dos ingredientes são dados por:

		ingredientes				composição desejável da mistura
		1	2	...	n	
componentes	1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
	m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
		c_1	c_2	...	c_n	

- a_{ij}: fração do componente i em uma unidade do ingrediente j, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$;
- b_i: fração do componente i em uma unidade da mistura, $i = 1, \ldots, m$;
- c_j: custo de uma unidade do ingrediente j, $j = 1, \ldots, n$;

✓ Deseja-se determinar uma maneira de misturar os ingredientes de modo que se produza uma unidade da mistura, tenha os componentes conforme desejado e o custo seja o menor possível.

Variáveis: x_j = Quantidade do ingrediente j em uma unidade da mistura, $j = 1, ..., n$.

$$
\begin{array}{rcl}
\text{minimize} & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & \leftarrow \text{minimiza custo total} \\
\text{sujeito a:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & \leftarrow \text{qtde do componente 1 na mistura} \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & \leftarrow \text{qtde do componente 2 na mistura} \\
& \vdots & \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & \leftarrow \text{qtde do componente m na mistura} \\
& x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 & \leftarrow \text{uma unidade da mistura é produzida} \\
& x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n. &
\end{array}
$$

- Considere que deseja-se produzir 10 unidades, o que muda no modelo?

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimize} & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & & & \leftarrow \text{minimiza custo total} \\
\text{sujeito a:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 * 10 & \leftarrow \text{qtde do componente 1 em 10 un. da mistura} \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 * 10 & \leftarrow \text{qtde do componente 2 em 10 un. da mistura} \\
& & \vdots & & \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m * 10 & \leftarrow \text{qtde do componente m em 10 un. mistura} \\
& x_1 + x_2 + \ldots + x_n & = & 10 & \leftarrow \text{10 unidades da mistura são produzidas} \\
& x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n. & & &
\end{array}
$$

- Ao invés de considerarmos que uma unidade da mistura deva conter uma fração b_i do componente i, é considerado uma fração mínima (r_i) e uma fração máxima (p_i), como é o novo modelo?

$$
\begin{array}{lcl}
\text{minimize} & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & \leftarrow \text{minimiza custo total} \\
\text{sujeito a:} & r_1 \leq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq p_1 & \leftarrow \text{qtde do componente 1 na mistura} \\
 & r_2 \leq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq p_2 & \leftarrow \text{qtde do componente 2 na mistura} \\
 & \vdots & \\
 & r_m \leq a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq p_m & \leftarrow \text{qtde do componente m na mistura} \\
 & x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 & \leftarrow \text{uma unidade da mistura é produzida} \\
 & x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n. &
\end{array}
$$

- Ao invés de considerarmos que uma unidade da mistura deva conter exatamente uma fração b_i do componente i, é aceitável uma tolerância mínima (t_i^-) e máxima (t_i^+) para b_i, $i = 1, ..., m$, por exemplo, é aceitável ter 5% a menos de b_i e 5% a mais de b_i, como é o novo modelo?

$\star$ Fazendo $r_i = 1 - t_i^-$ e $p_i = 1 + t_i^+$, por exemplo, $r_i = 0.95$ e $p_i = 1.05$, para $i = 1, ..., m$

$$
\begin{array}{lcl}
\text{minimize} & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & \leftarrow \text{minimiza custo total} \\
\text{sujeito a:} & r_1 * b_1 \leq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq p_1 * b_1 & \leftarrow \text{qtde do componente 1 na mistura} \\
 & r_2 * b_2 \leq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq p_2 * b_2 & \leftarrow \text{qtde do componente 2 na mistura} \\
 & \vdots & \\
 & r_m * b_m \leq a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq p_m * b_m & \leftarrow \text{qtde do componente m na mistura} \\
 & x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 & \leftarrow \text{uma unidade da mistura é produzida} \\
 & x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n. &
\end{array}
$$

OUTRAS APLICAÇÕES - Ligas metálicas

- Ligas metálicas são produzidas a partir de vários insumos (lingotes de ferro, grafite, sucatas industriais, entre outros).
- Cada insumo tem uma composição (quantidades de carbono, silício, manganês etc) e custo conhecidos.
- A composição da liga é determinada por normas técnicas da metalurgia (quantidades de carbono, silício, manganês etc).
- Deseja-se determinar as quantidades de cada insumo a serem fundidas, satisfazendo as normas técnicas da metalurgia com o menor preço final possível.

OUTRAS APLICAÇÕES - Composição de areias para filtro

- Areias são usadas na constituição de filtros de Estações de Tratamento de Águas de abastecimento;
- Diferentes tipos de areias com composições granulométricas distintas estão disponíveis em vários locais;
- Custos de dragagem, transporte, seleção e preparo para utilização de cada areia variam;
- Areias devem ser dispostas em camadas que devem obedecer composições granulométricas estabelecidas por norma;
- O problema consiste em combinar os volumes de areia provenientes de cada local de modo a atender às especificações da norma, com o menor custo possível.

Tarefa (em sala):

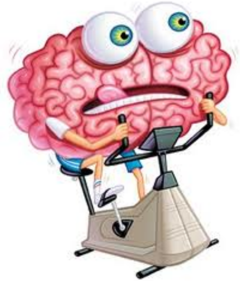


Figura : Fonte:http://vivendoavidabemfeliz.blogspot.com.br/2013/04/atividades-fisicas-que-fazem-bem-ao-seu.html

Tarefa (em sala):

Um amigo seu decidiu aplicar R$2.000 de suas economias em projetos inovadores. Para isso consultou vários artigos da internet e selecionou quatro projetos que achou promissor.

Projeto	Valor Max.	Retorno Esperado (ano)	Risco (ano)
CAASO Go	R$ 700,00	10,0%	10%
Treino Saudável Cia.	R$ 500,00	8,5%	5%
Festa Digital	R$ 500,00	12,5%	15%
Software App	R$ 1.500,00	10,5%	9%

Seu amigo ouviu falar que você está cursando Programação Matemática e que esta tal de otimização pode ajudá-lo. Ai ... ele te procurou para você fazer um modelo matemático que maximize o retorno do capital investido. Como seu amigo deve investir o dinheiro?

Tarefa (em sala):

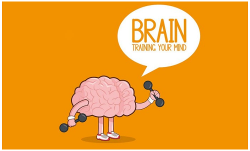


Figura :
Fonte:http://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/guiaenem/ginastica-cerebral-ajuda-na-preparacao-para-enem-19673569

Seu amigo está meio desconfiado das informações que obteve sobre o retorno e o risco. Então pediu para você reavaliar a situação, impondo que o risco máximo do investimento seja de 7%.
Você consegue adaptar o modelo?

Referências Bibliográficas

- ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Campus/elsevier, 2007. 523 p. ISBN 10-85-352-145-1454-2.
- GOLDBARG, M.; LUNA, H. P. L.; **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Campus, 2000.
- MACHADO, A. **Notas de Aula do Prof. Alysson Machado Costa do Curso Introdução a Pesquisa Operacional**, 2008.
- NASCIMENTO, M.C.V.; ALÉM JUNIOR, D.J; CHERRI, L.H.; MASSAMITSU,F. **Apresentações para aulas de modelagem matemática**. São Carlos: ICMC-USP, 2008.
- PERIN, C. **Introdução à Programação Linear**. Coleção Imecc - Textos Didáticos. V.2. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2001. 177p.
- Silva, M.S., Ferreira, L.P., Reis, M.L. e Aragão, M.V.S.P. **Modelo para o planejamento tático integrado da produção e distribuição de papel e celulose**, Anais SBPO, 2011.