# Programação Matemática

**Docentes: Ana Paula, Franklina e Maristela**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC
Universidade de São Paulo – USP

(Material Elaborado por Aline Leão modificado por Ana Paula)

2016

# Profa. Ana Paula

- Email: apmazzini@gmail.com
- Sala Provisória: 3-247 (Sala do professor Castelo)
- Horário de Atendimento: Quintas-feiras 13h às 15h (mandar e-mail antes)

# Introdução

- Pesquisa Operacional;
- Problemas de programação (linear, discreta, mista, não-linear) aparecem em larga escala na vida real e as aplicações ocorrem nas mais diversas áreas
- Modelagem de problemas e elaboração de modelos.

# Aula 6: Modelagem e Solução Gráfica

- **Solução factível e região factível**

- Dado um problema:

$$\text{Minimize } c^t x$$
$$\text{Sujeito a: } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

- Uma solução $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é dita factível se satisfaz todas as restrições $Ax = b, x \geq 0$

- O conjunto de todas as soluções factíveis S = $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax = b\}$ é chamado <u>região factível</u>

- **Solução Ótima**

- Uma solução particular $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ de um problema de otimização de <u>minimização</u> (min *f(x)* = $c^t x$) é ótima se:

$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right), \forall\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

- Dado um problema de otimização de <u>maximização</u> (max *f(x)* = $c^t x$), uma solução particular $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ é ótima se:

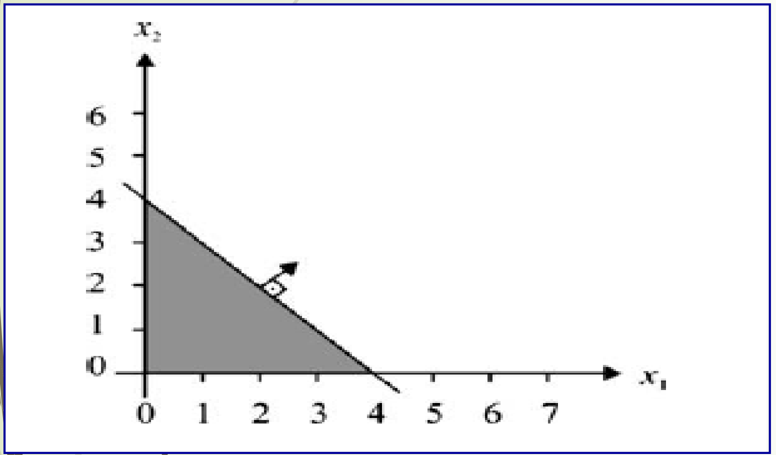
$$f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \geq f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right), \forall\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

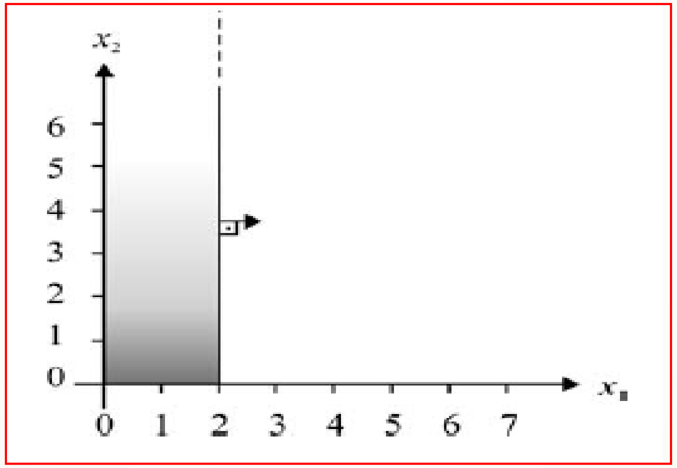
# Exemplo: Método Gráfico

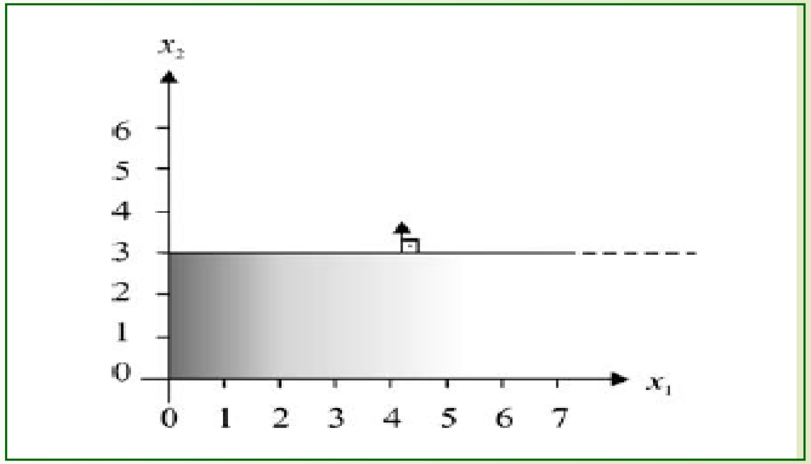
$$
\begin{array}{ll}
Maximizar & f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\
Sujeito\ a: & x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & x_1 \leq 2 \\
 & x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

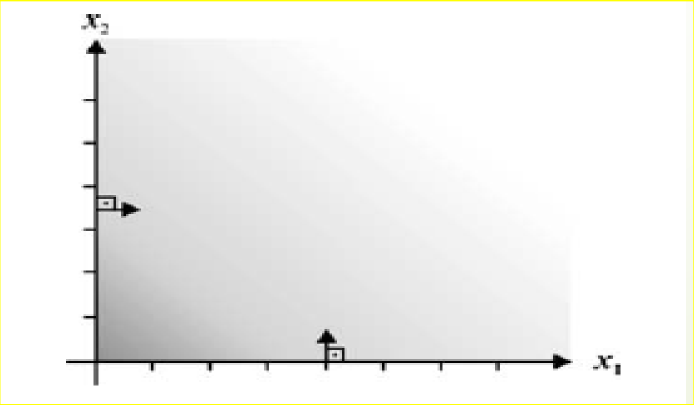
# Solução Gráfica - Região factível

$$\mathbf{S} = \{(x_1, x_2) \text{ tal que } x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1 \leq 2,\ x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$$



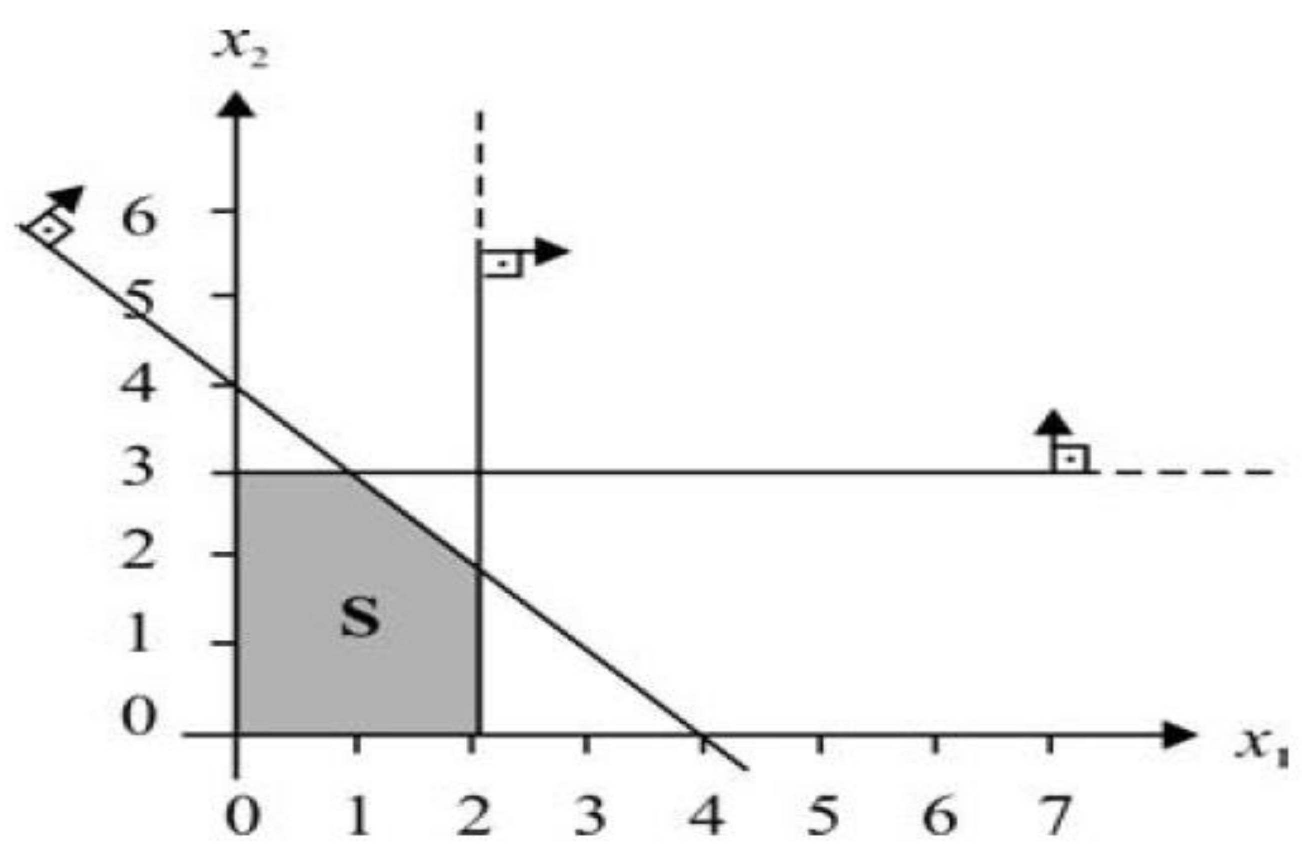



# Solução Gráfica – Região factível

$\mathbf{S} = \{(x_1, x_2) \text{ tal que } x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1 \leq 2,\ x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$




$$Max\ cx$$

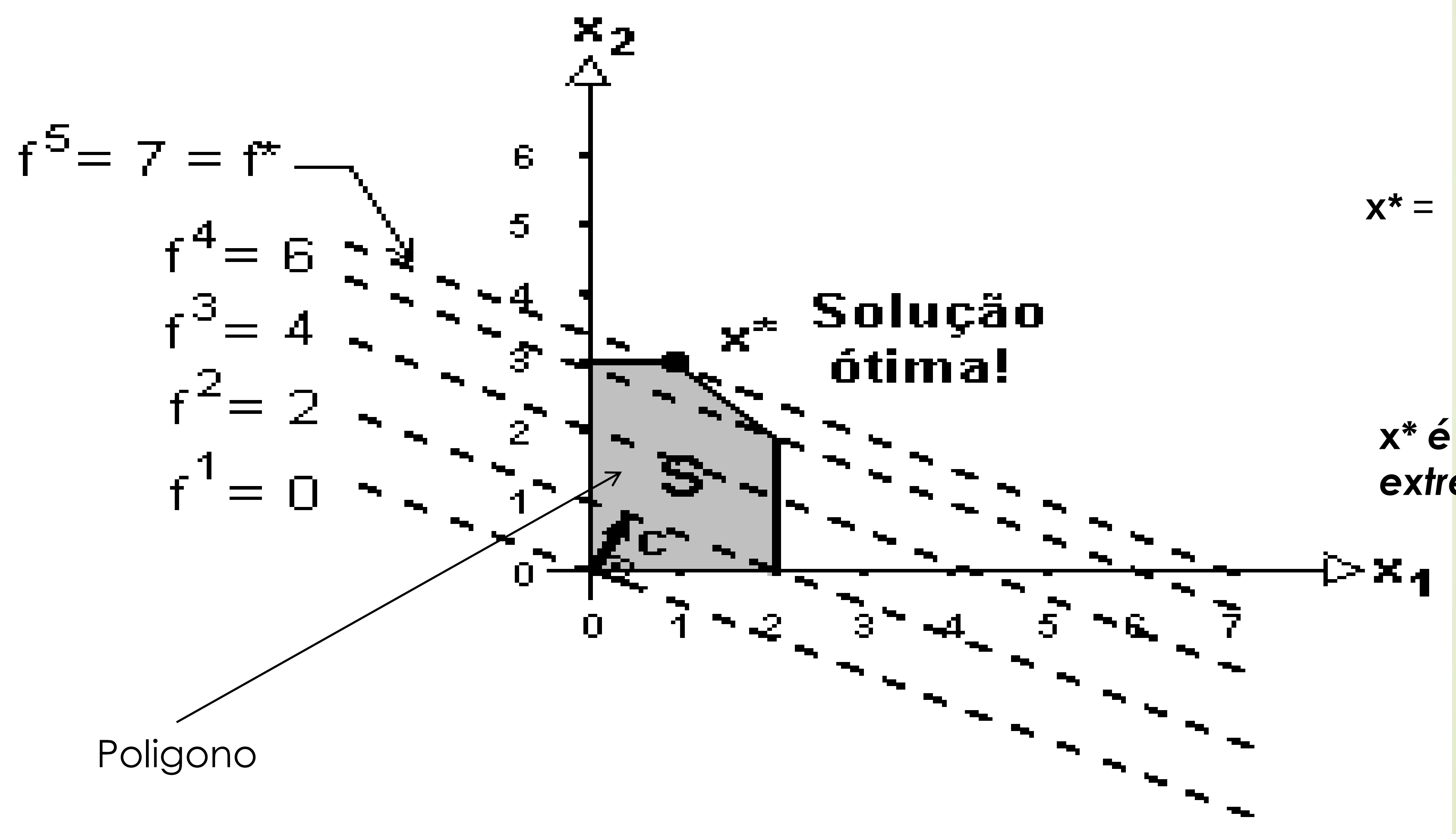
*Pontoscom mesmo z satisfazem*

$$c^T x = z \quad (\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z)$$

$$Max \quad z$$

*plano* $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z$ *movido em direção c*

# Resolução Gráfica - Exemplo




$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

***x* é um ponto extremo***

# Interpretação Gráfica: Tipos de região de factibilidade

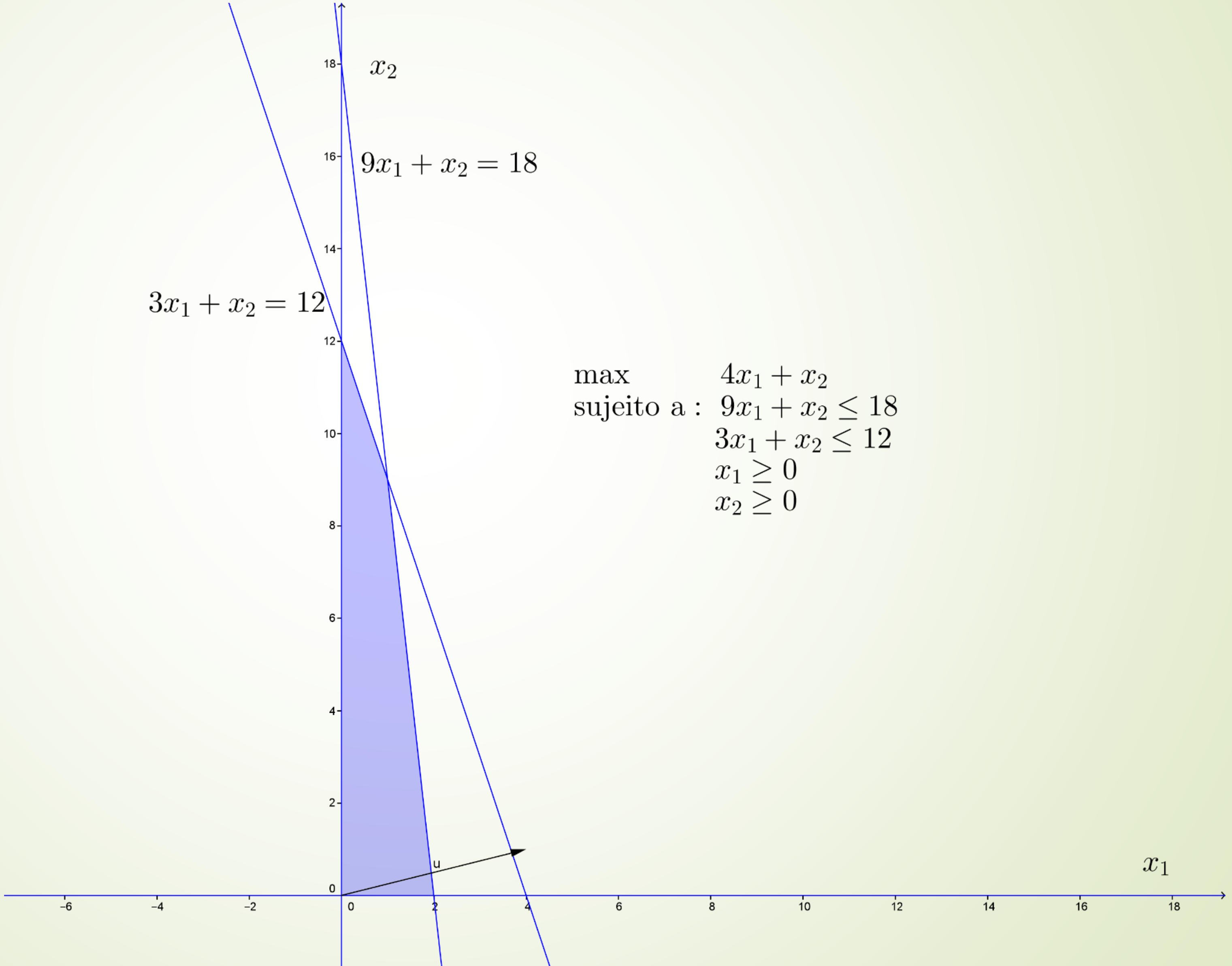
- A Região de factibilidade pode ser **limitada**;
- A Região de factibilidade pode ser **ilimitada;**

# Exemplos:

$$S_1 = \{(x_1, x_2)\ tal\ que\ -x_1 + 4x_2 \leq 4,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

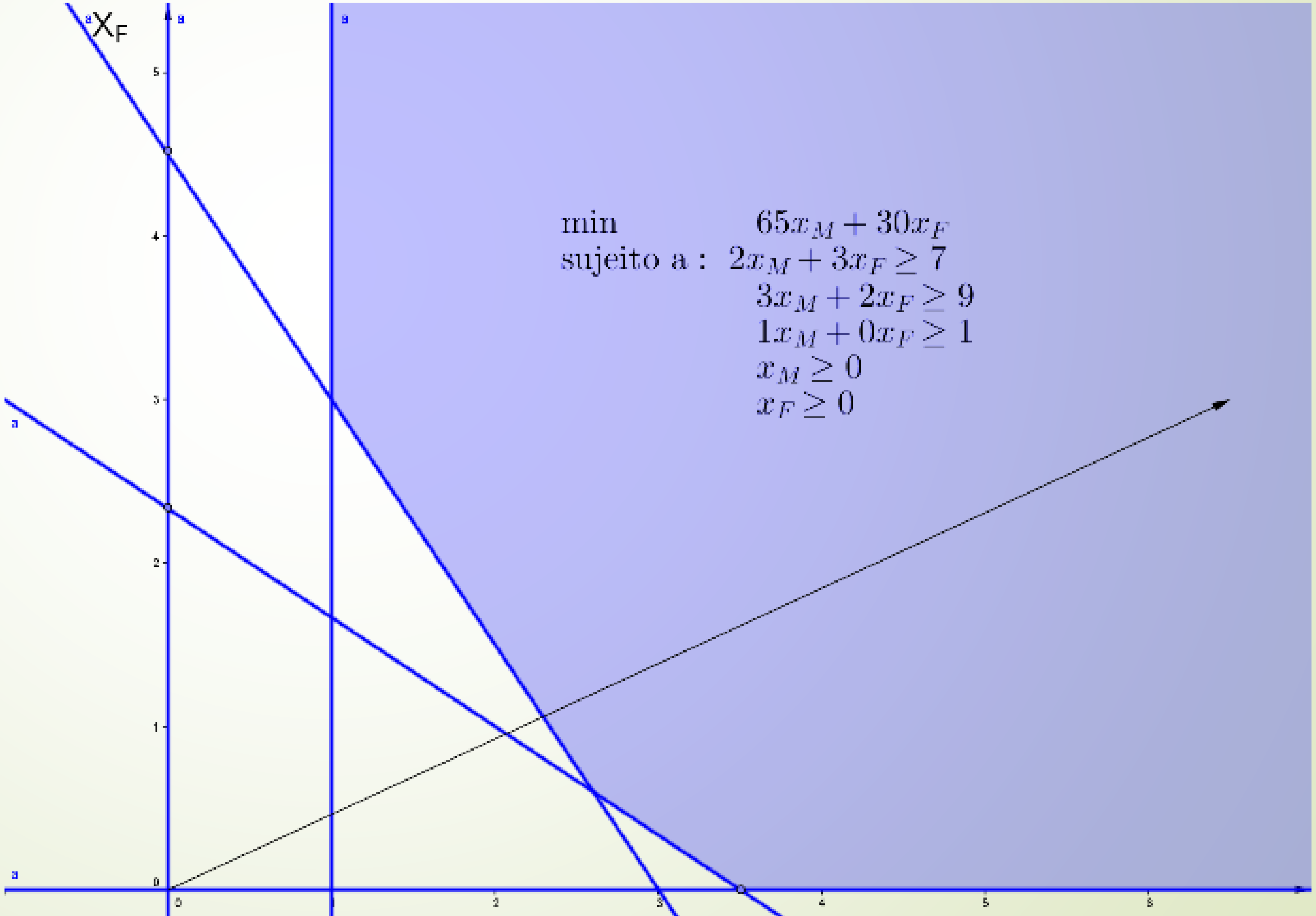
$$S_2 = \{(x_1, x_2)\ tal\ que\ -x_1 + 4x_2 \leq 4,\ x_1 + x_2 \leq 6,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

- A Região de factibilidade pode ser **limitada**:



- **Interpretação Gráfica: Tipos de região de factibilidade**

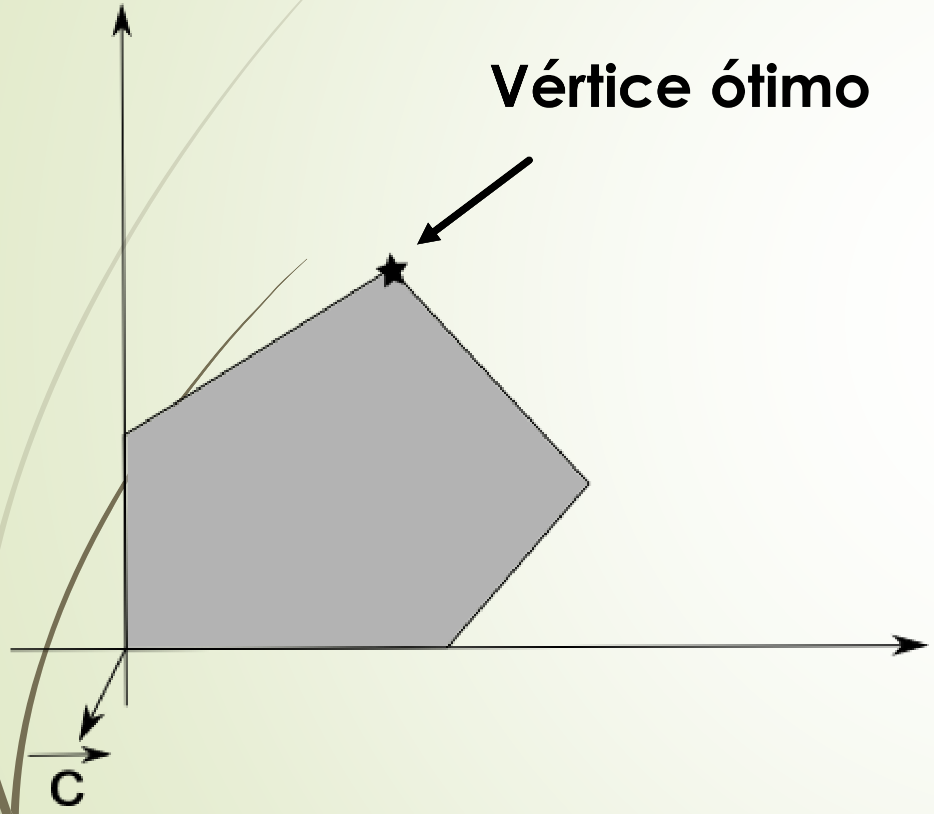
- A Região de factibilidade pode ser **ilimitada**



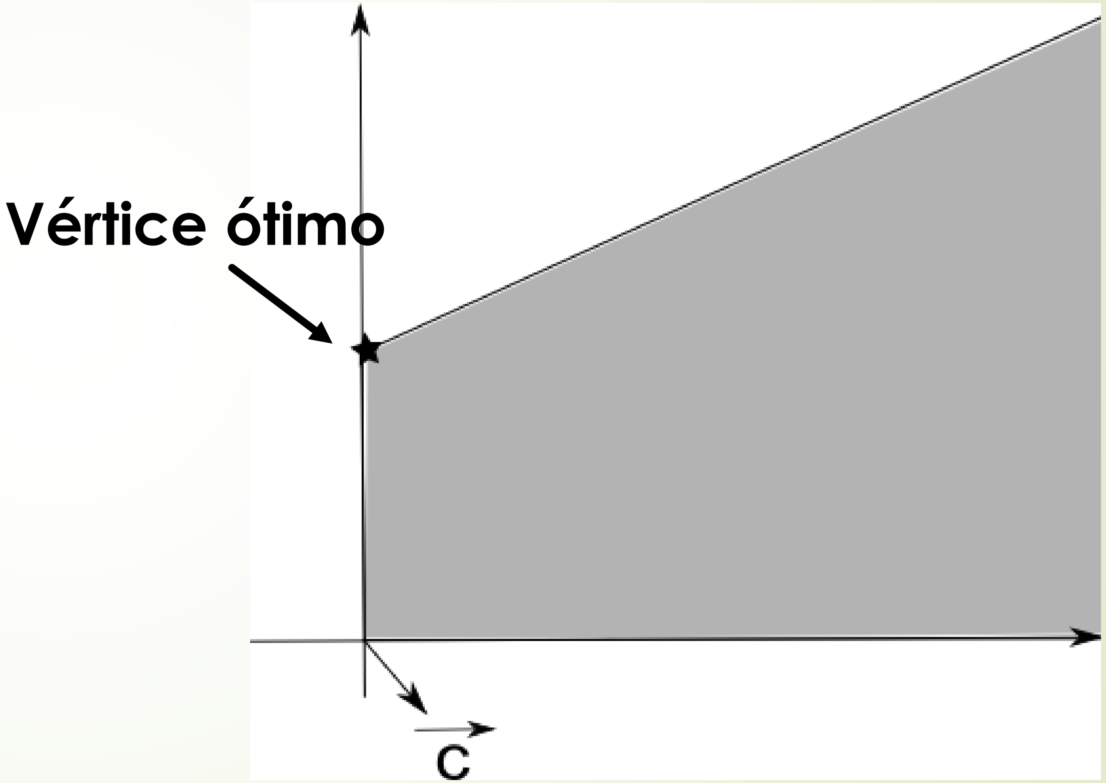
# Interpretação Gráfica: Tipos de solução encontradas em um PPL

- **Solução ótima única**: Se a solução ótima é única, então ela está num ponto extremo (vértice).
- **Soluções ótimas alternativas (Múltiplas soluções ótimas):** Note que $\nabla f(x)$ é múltiplo do gradiente de uma das retas que definem o espaço de solução.
- **Valor objetivo ótimo ilimitado:** Neste caso a região factível e o valor ótimo são ilimitados.
- **Problema infactível.**

- Dado que o problema é de minimização

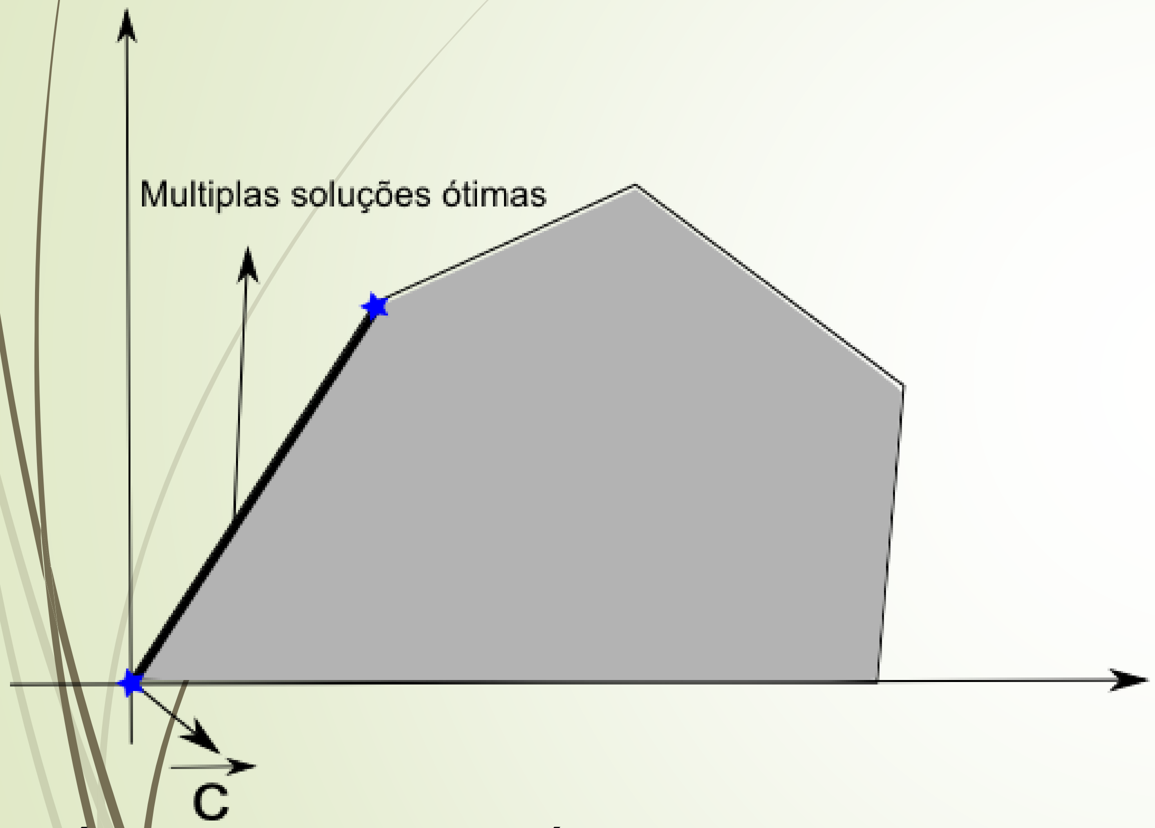



Região de factibilidade limitada

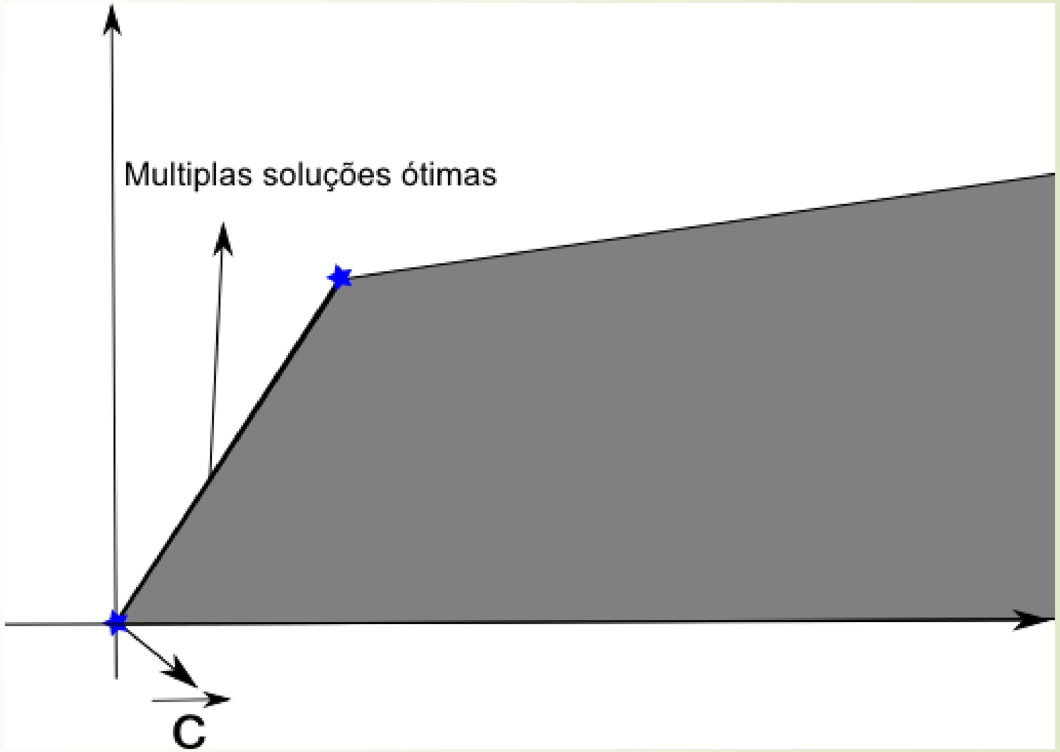



Região de factibilidade ilimitada

- **Dado que o problema é de minimização**

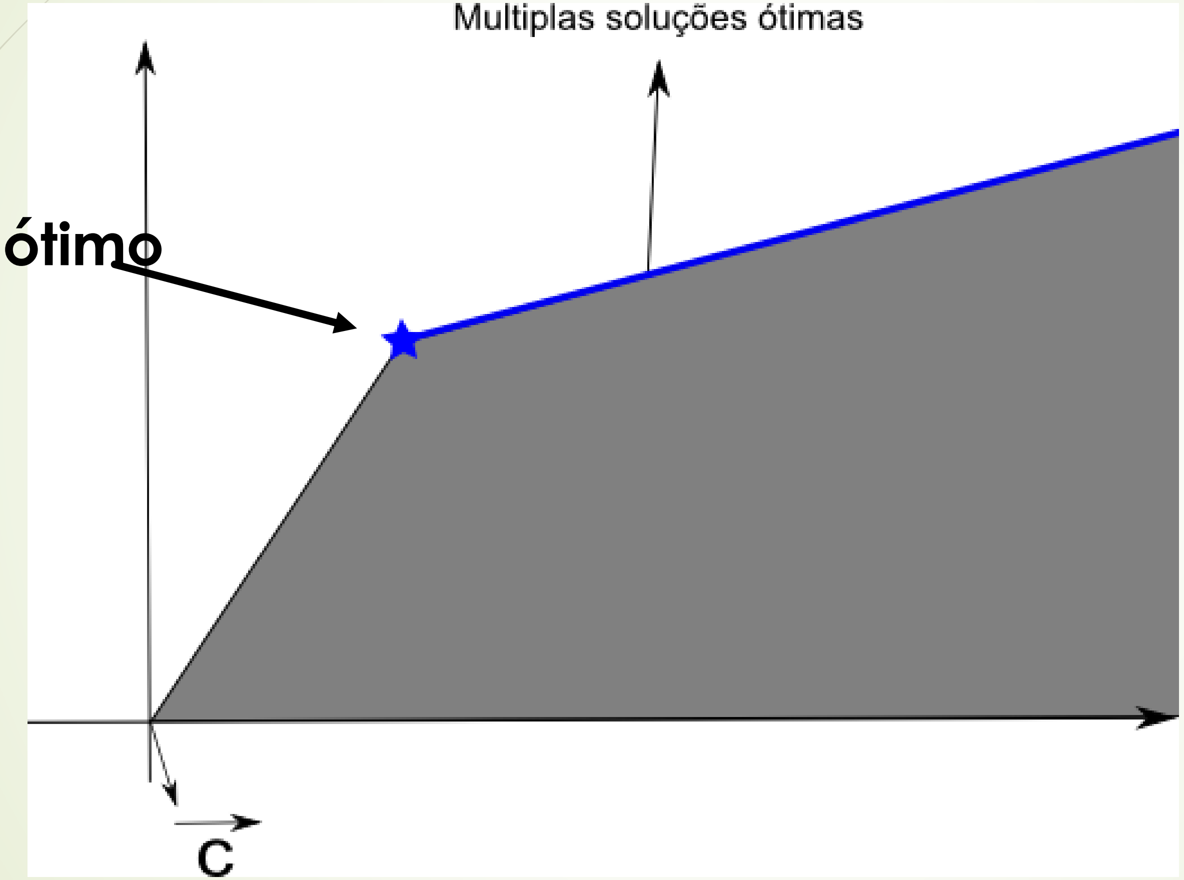



Múltiplas soluções ótimas.
Note que a região é limitada e existem dois vértices ótimos (★).




Múltiplas soluções ótimas.
Note que a região é ilimitada e existem dois vértices ótimos (★).

- **Dado que o problema é de minimização**

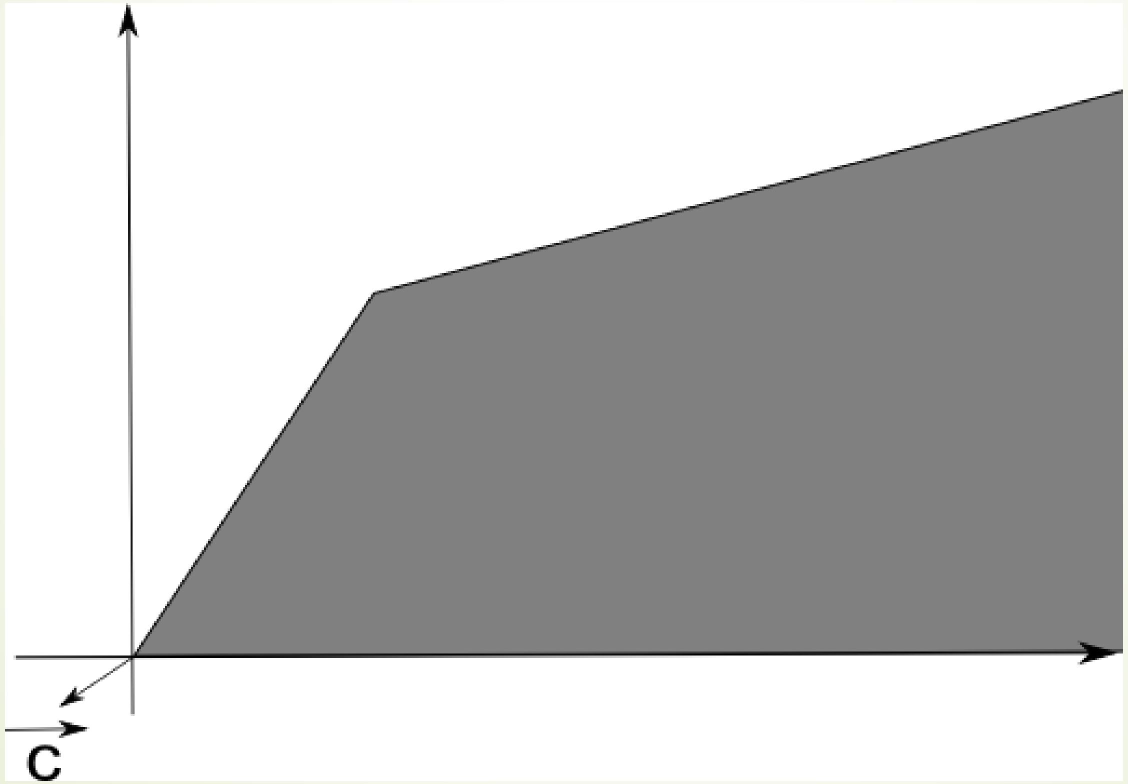



**Raio ótimo**

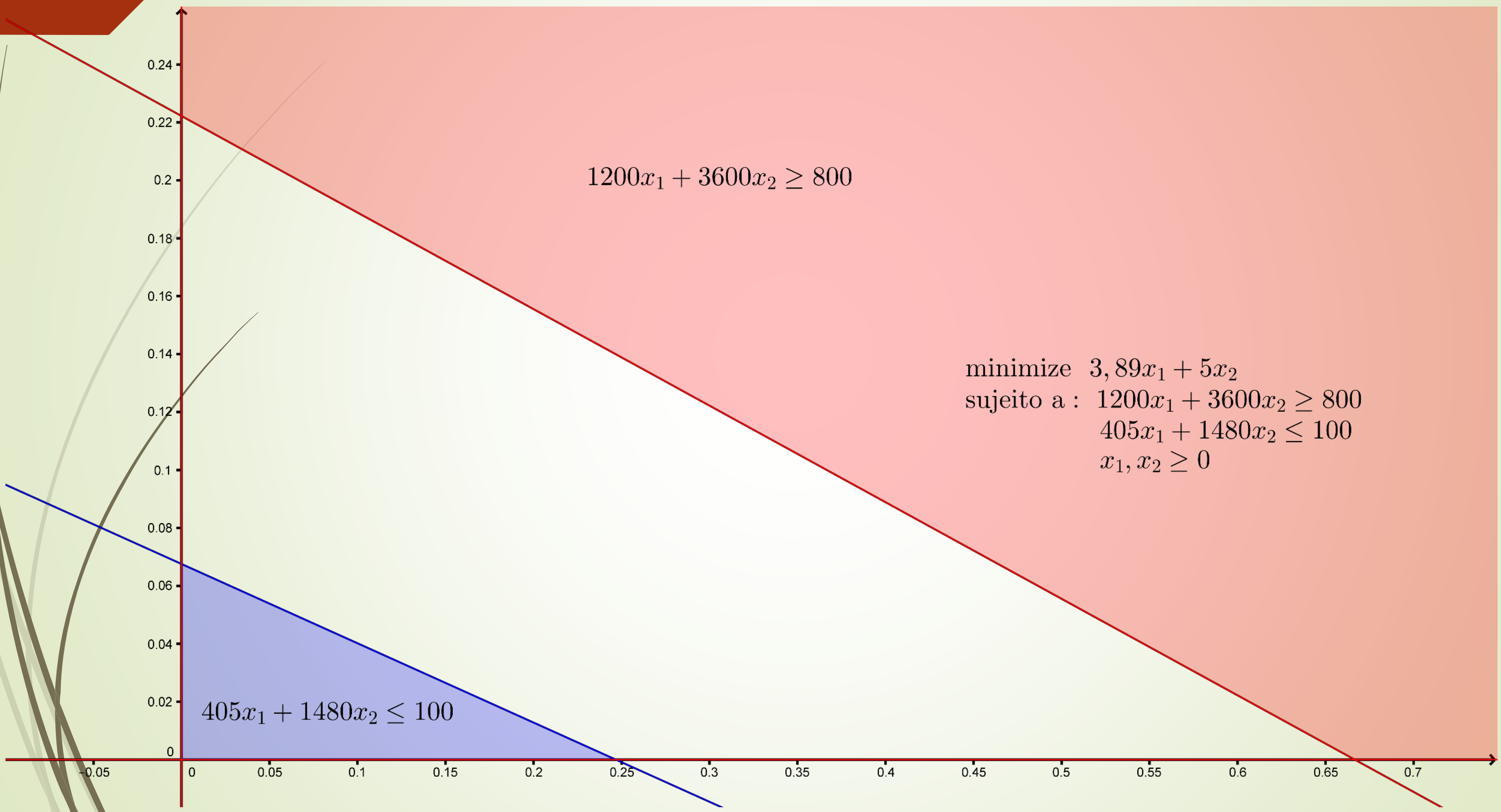
**Vértice ótimo**

Note que a região é ilimitada, o valor da função objetivo é limitado, existe um vértice ótimo, porém o conjunto de soluções ótimas é ilimitado

- **Dado que o problema é de minimização**



- Problema infactível



- **Resumindo:**
- O problema admite solução factível?
- A solução determinada é factível?
- A solução é ótima?
- O problema admite solução ótima limitada?
- A solução ótima é única?

- **Observação:** A interpretação gráfica servirá de apoio para a compreensão do método simplex.

- **Teorema:**
- Se um problema de otimização linear tem uma solução ótima, então existe um vértice ótimo.

- Observação: A afirmação é verdadeira?

  – *se uma solução é ótima, então ela é um vértice.*

- **Teorema:**
- Se um problema de otimização linear tem uma solução ótima, então existe um vértice ótimo.

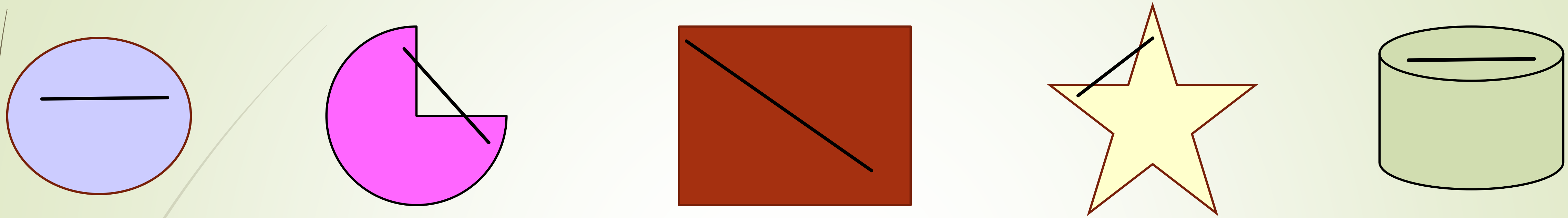
- Observação: A afirmação é verdadeira?

  *– se uma solução é ótima, então ela é um vértice.*
  *Resposta: NÃO!!!*

- Se existir mais de um vértice ótimo, então toda combinação convexa desses dois vértices será uma solução ótima.

- **Conjuntos Convexos**
- **Geometricamente:**

- **Conjuntos Convexos**
- **Geometricamente:**

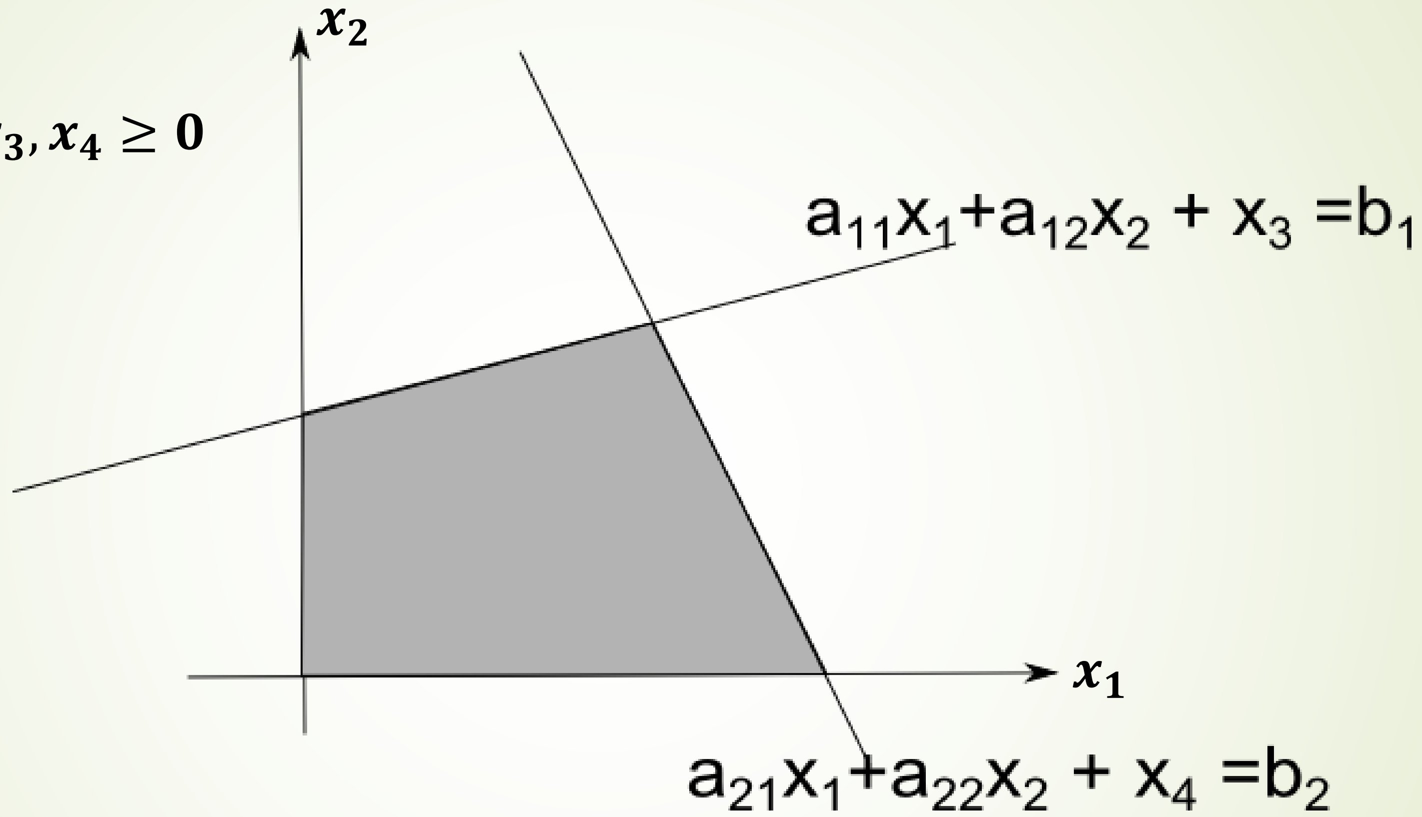


convexo | não-convexo | convexo | não convexo | convexo

- Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se para quaisquer $x_1$ e $x_2 \in X$ e para qualquer λ ∈ $[0, 1]$ temos que $\lambda x_1$ + (1 - $\lambda$) $x_2 \in X$.

- **Conjuntos Convexos**
- A <u>região de factibilidade</u> de um problema de programação linear é convexa.

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

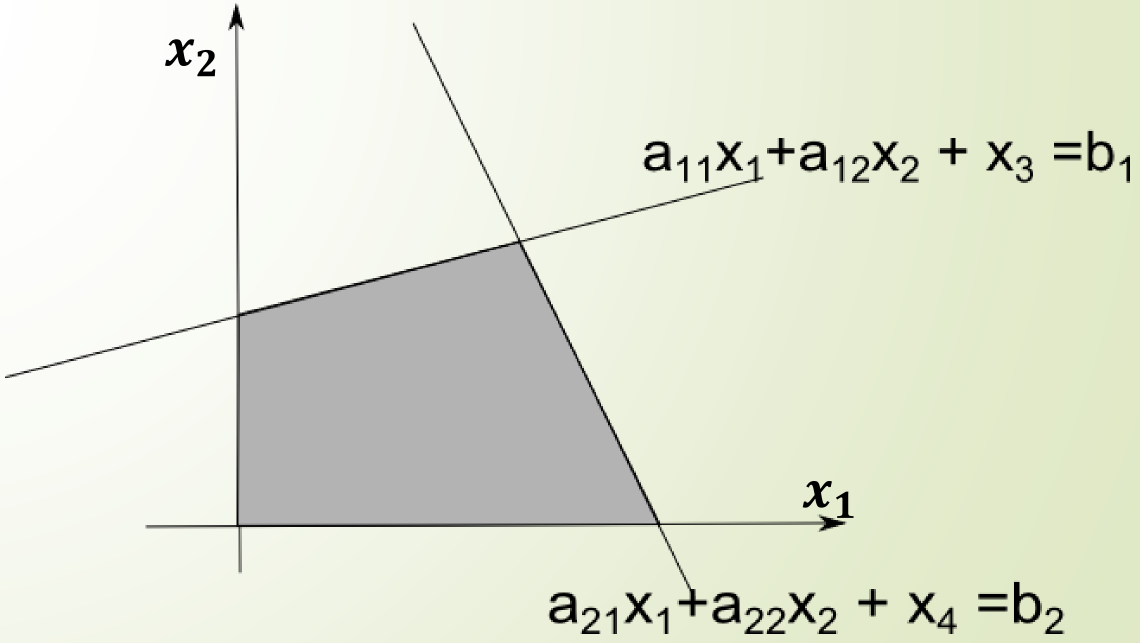



- Os conjuntos $S = \{x \,\epsilon\, \mathbb{R}^n_+ : Ax = b\}$ ou $S = \{x \,\epsilon\, \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$ ou $S = \{x \,\epsilon\, \mathbb{R}^n_+ : Ax \geq b\}$ (denominados poliedros) são convexos.

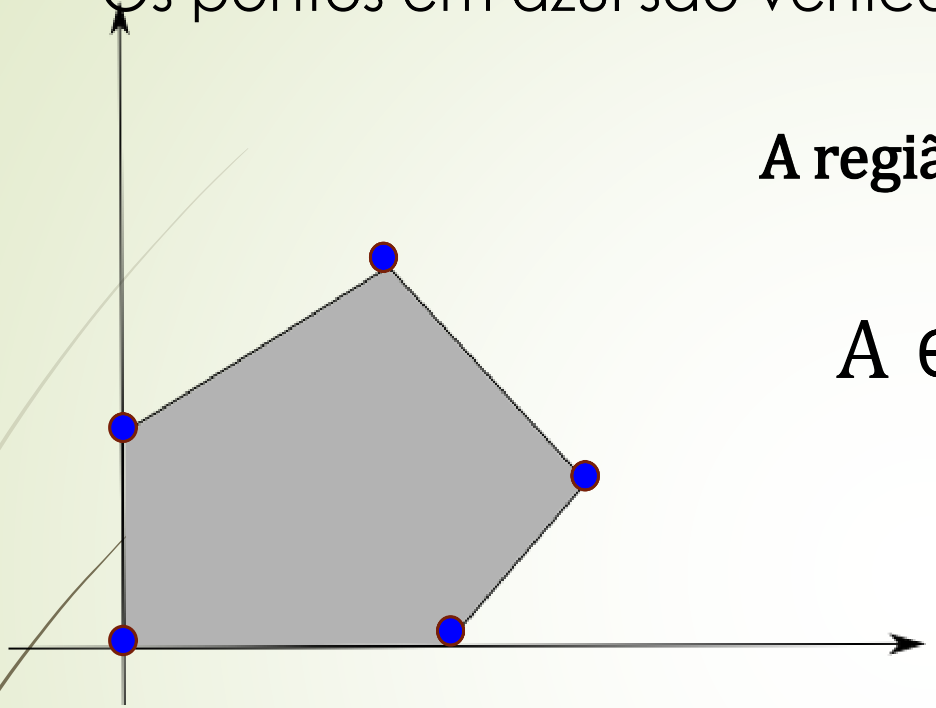
- **Desigualdade ativa**
- Dizemos que uma desigualdade está ativa se $a_i^t x = b_i$
- Na figura quando $x_3 = 0$, então a desigualdade $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ está ativa, isto é:

  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1.$
- O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\}$ é denominado <u>hiperplano</u>.
- O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1\}$ é denominado <u>semi-espaço</u>.

$$\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}$$



- **VÉRTICE**
- Os pontos em azul são vértices



**A região de factibilidade da Figura é:**

$$Ax \leq b, x \geq 0$$

$$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{3X2}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}^2$$

- Existem 5 semi-espaços que definem a região de factibilidade
- Em cada um dos vértices da figura existem duas restrições ativas, ou seja, dois hiperplanos (linearmente independentes) passando por eles.
- **<u>Portanto no $\mathbb{R}^2$ dizemos que um ponto é um vértice se existem pelo menos dois hiperplanos ativos em x.</u>**

- **VÉRTICE no $\mathbb{R}^n$**

- Seja o problema de programação linear dado por:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize } c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{sujeito a: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \leq b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n \leq b_2 \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n \leq b_m \\
&\qquad x_j \geq 0, j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

- A região de factibilidade é definida por *m*+ *n* semi-espaços.
- **Então: Um ponto $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}\colon \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}\}$ é um vértice se existem pelo menos *n* hiperplanos ativos em x.**

- **VÉRTICE no $\mathbb{R}^n$**

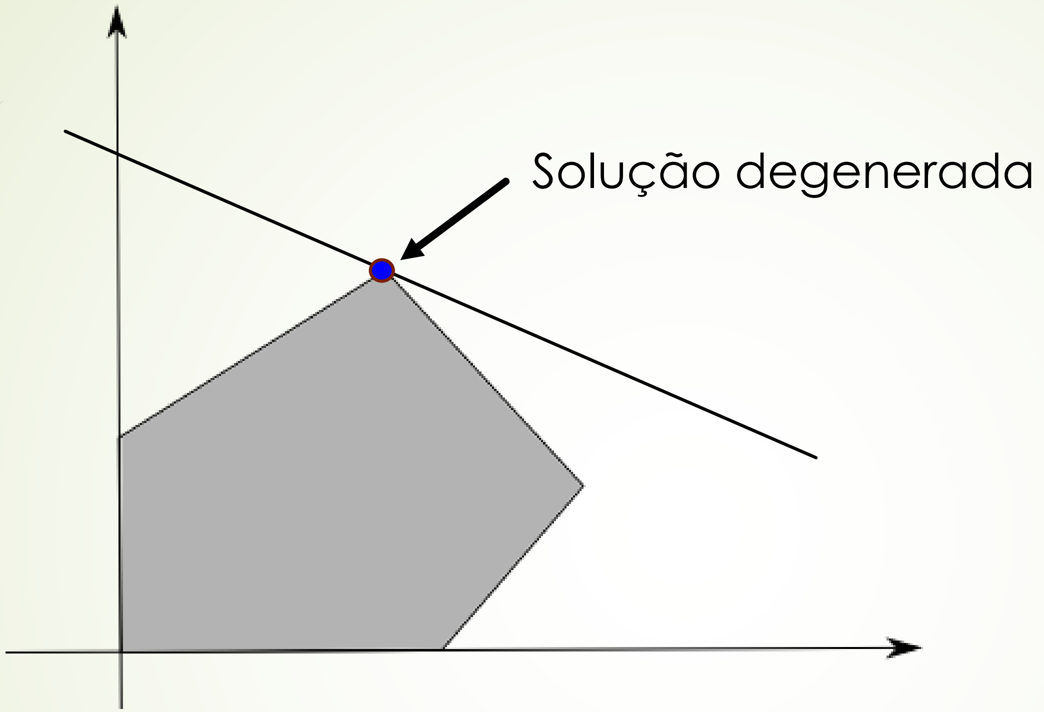
- Dizemos que $x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \colon Ax \leq b\}$ é um vértice de $S$ se não existem dois pontos distintos de $x$ em $S$ tal que $x$ seja escrito como combinação convexa destes pontos, i.e., se $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$, com $0 < \lambda < 1$, com $x^1$, $x^2 \in S$ então $x = x^1$ ou $x = x^2$.

- Lembrando que:
  - Uma <u>combinação convexa</u> de *k* vetores do $\mathbb{R}^n$: $x^1, x^2, \ldots, x^k$ é definida por:

$$x = \lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \text{ e } \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, k$$

- **Vértice degenerado:**




Considerando $S = \{x \in \mathbb{R}_+^n \colon Ax \leq b\}$

Se mais que *n* hiperplanos $(a_i^t x = b_i)$ passam por um ponto $x \in S$, então este ponto é uma solução degenerada.

- **Vértice degenerado:**
- Exemplo:

Maximize $x_1 + 3x_2$

sujeito a: $x_1 + x_2 \leq 6$

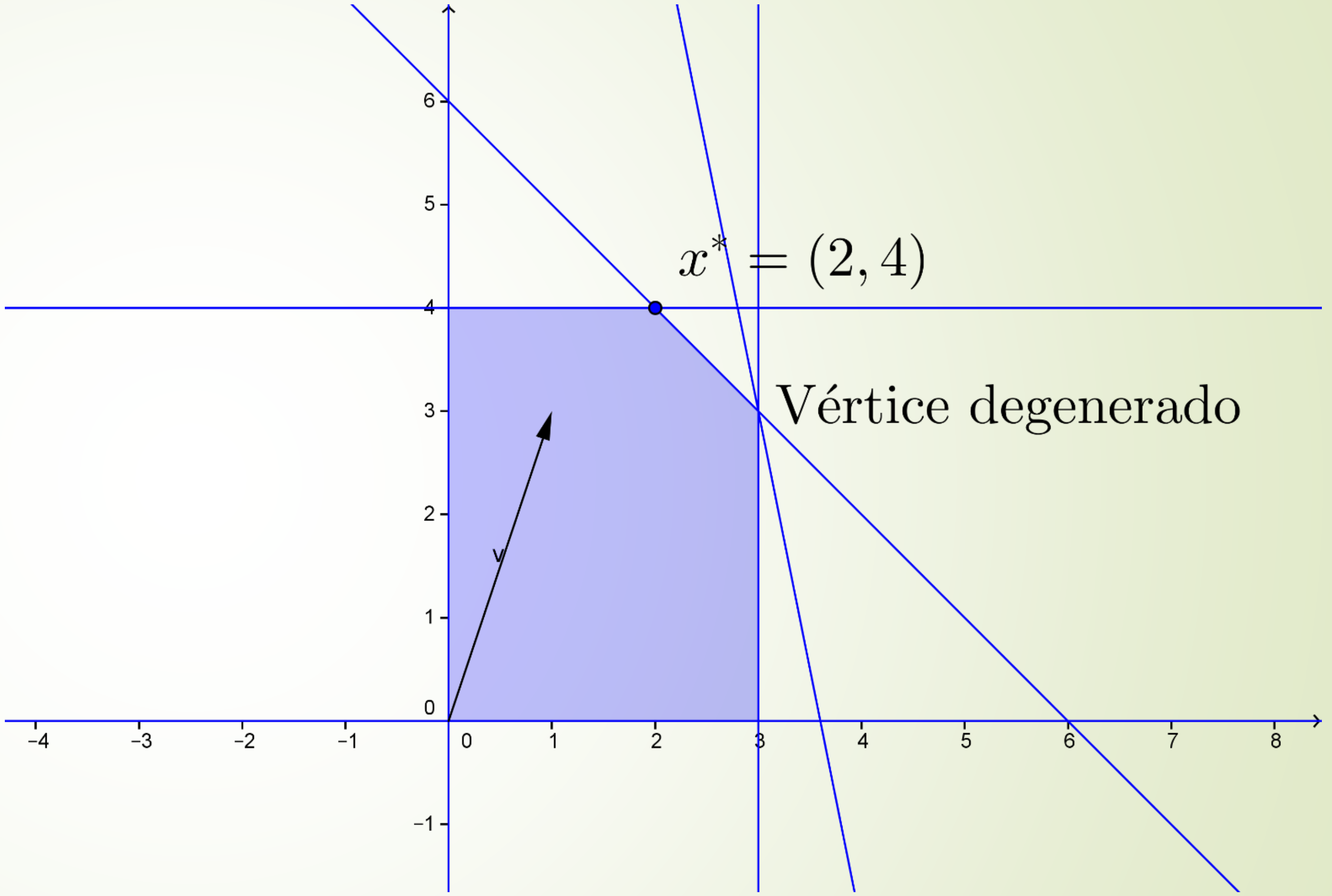
$5x_1 + x_2 \leq 18$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 4$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



# Exercícios

1) Considere o seguinte problema:

***Minimizar f($x_1$, $x_2$) = $-x_1 - x_2$***

Sujeito a: $-x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

a) Resolva o problema graficamente (isto é, desenhe a região factível e a(s) solução(ões) ótima(s) ).

b) A solução $x_1 = x_2 = 0$ é um vértice da região factível?
Identifique todos os vértices da região factível.

c) Desenhe as soluções $\mathbf{x}^1$=( )=(1 1) e $\mathbf{x}^2$=( )=(5, 1).
Estas soluções são factíveis? Por que?

d) Considere agora uma outra função objetivo:

***Minimizar f($x_1$, $x_2$) = $x_1 - x_2$***

Verifique se a solução ótima obtida no item (a) é também ótima considerando esta nova função objetivo.
Há múltiplas soluções ótimas? Identifique no gráfico.

# Exercícios

2. Considere o seguinte problema:

***Minimizar*** $\boldsymbol{f(x_1, x_2) = x_1 + x_2}$

Sujeito a:

$-x_1 + x_2 \geq 2$

$2x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$

a)Resolva o problema graficamente.

b) Considere agora: ***Maximizar*** $\boldsymbol{f(x_1, x_2) = x_1 + x_2}$ sujeito às mesmas restrições. O que mudou?

c) Construa uma nova função objetivo de modo que o problema tenha: **i)** um segmento de soluções ótimas; **ii)** uma semi-reta de solução ótimas.

d) considere o problema do item (a) e inclua a terceira restrição $X_1 + X_2 \leq 1$. Resolva o problema resultante

# Bibliografia


- Arenales, M., Armentano, V., Morabito, R. Yanasse, H. *Pesquisa operacional*, Editora Campus, Rio de Janeiro, 2007.
- Bazaraa, M. S. Jarvis J. J. , Sherali, H. D. Linear Programming and Network Flows. John Wiley & Sons, 2010.