

# SME0340

## Equações Diferenciais Ordinárias

### Aula 5

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira  
marialuisa@icmc.usp.br  
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

14 de março de 2018



## EDs Não Lineares



Estudaremos agora equações diferenciais de primeira ordem

$$y' = f(t, y)$$

**não lineares**, que podem ser escritas na forma

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0,$$

tal que  $N(t, y) \neq 0$  em uma região  $A \subset \mathbb{R}^2$ .

**Obs.:** As EDs *lineares* de primeira ordem são um subconjunto destas, com  $N(t, y) = 1$  e  $M(t, y) = a(t)y - b(t)$ .

Tipos especiais de EDs não lineares:

- ▶ EDs com variáveis separáveis;
- ▶ EDs exatas;
- ▶ EDs homogêneas.

## Aula Passada



### EDs Lineares de Ordem 1:

$$y' + a(t)y = b(t),$$

$a(t), b(t)$  contínuas para  $t \in J$

- ▶ Não Homogêneas.
- ▶ Casos Especiais: transformar EDs não lineares em EDs lineares.

- ▶ Equação de Bernoulli:

$$y' + p(t)y = q(t)y^n$$

Dividir por  $y^n$  e substituir  $z(t) = [y(t)]^{1-n}$ .

- ▶ Equação de Riccati:

$$y' + p(t)y + q(t)y^2 = f(t)$$

Com solução  $y_1$  conhecida, substituir  $y(t) = y_1(t) + \frac{1}{z(t)}$ .

## Variáveis Separáveis



Para uma ED de primeira ordem na forma

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0$$

se podemos escrever

$$M(t, y) = P(t)Q(y), \quad N(t, y) = R(t)S(y),$$

então

$$P(t)Q(y) + R(t)S(y)y' = 0$$

é uma **ED com Variáveis Separáveis**.

Resolvemos a ED por *separação de variáveis*, se  $R(t) \neq 0$  e  $Q(y) \neq 0$ :

$$P(t)Q(y) dt + R(t)S(y) dy = 0 \quad dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{S(y)}{Q(y)} dy = -\frac{P(t)}{R(t)} dt$$

## Variáveis Separáveis (cont.)



**Exemplo:** Determine a solução  $y(t)$  do PVI

$$\begin{cases} e^y t^2 + \frac{1}{3}y' = 0 \\ y(1) = -\ln(2) \end{cases}$$

**Solução:** Se rearranjarmos a ED, com  $y' = \frac{dy}{dt}$ , temos

$$e^y t^2 + \frac{1}{3} \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 3e^y t^2 dt + \frac{dy}{dt} dt = 0 \\ \Rightarrow -e^{-y} dy = 3t^2 dt$$

$$-\int e^{-y} dy = \int 3t^2 dt \Rightarrow e^{-y} = t^3 + C$$

$$\Rightarrow e^y = \frac{1}{t^3 + C} \Rightarrow y(t) = -\ln(t^3 + C), \quad t^3 + C > 0$$

$$y(1) = -\ln((1)^3 + C) = -\ln(2) \Rightarrow C = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore y(t) = -\ln(t^3 + 1), \quad t > -1.$$

## EDs Exatas



Observemos, agora, EDs na forma

$$M(t, y) + N(t, y) y' = 0 \quad \text{ou} \quad M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0.$$

A ED acima é uma **equação diferencial exata** se, para  $(t, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$ , for possível encontrar uma função  $V = V(t, y) : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t, y) = M(t, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} V(t, y) = N(t, y).$$

**Exemplo 1:** A ED  $2ty + t^2 y' = 0$  é exata.

**Exemplo 2:**  $t^2 y' + 2ty = 2t$  é exata, e  $t^2 y' + 2ty = 3t$  também é.

**Obs.:** Se a ED é exata,  $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$ .

## Variáveis Separáveis (cont.)



**Exemplo:** Resolva  $y' + y^2 \cos(t) = 0$ .

**Solução:** (na lousa)

$$y(t) = \frac{1}{\sin(t) + C}, \quad C \in \mathbb{R}, \{t \in \mathbb{R} : \sin(t) + C \neq 0\}.$$

$y \equiv 0, t \in \mathbb{R}$  também é solução.

## EDs Exatas (cont.)



A função  $V(t, y)$  é chamada uma **integral primeira** da ED exata e as *curvas* definidas pela equação  $V(t, y) = C$  são chamadas **curvas integrais** da ED exata.

As soluções da ED exata são dadas *implicitamente* por  $V(t, y) = C$ .

**Exemplo:** A ED  $t^2 y' + 2ty = 4t$  é exata, pois existe  $V(t, y) = t^2(y - 2)$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} [t^2(y - 2)] = 2t(y - 2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} [t^2(y - 2)] = t^2.$$

Então  $V(t, y) = t^2(y - 2)$  é uma integral primeira da ED e  $t^2(y - 2) = C$  são as curvas integrais (solução geral da ED).

## EDs Exatas (cont.)



Dada uma ED

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0,$$

como encontrar uma integral primeira  $V(t, y)$ ?

Primeiro precisamos determinar se a ED é exata.

**Teorema:** Suponhamos que  $M, M_y, M_t, N, N_y, N_t$  sejam contínuas num retângulo

$$\mathcal{R} = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : a < t < b, c < y < d\}.$$

Então a ED é uma ED exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

para todo  $(t, y) \in \mathcal{R}$ . (Prova por Teorema de Schwarz).

## EDs Exatas (cont.)



**Exemplo:** Resolva a ED  $(t^2 + y^2) dt + 2ty dy = 0$ .

**Solução:** (na lousa)

Verificar se é ED exata. Se for, determinar  $V(t, y)$  e depois igualar a uma constante para obter a solução geral da ED.

$$t^3 + 3ty^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Obs.:** A solução nesse caso é *implícita*, então não incluímos o intervalo de  $t$ .

## EDs Exatas (cont.)



Então, se a ED é exata, podemos determinar  $V(t, y)$  através do seguinte procedimento:

Como  $\frac{\partial}{\partial t} V(t, y) = M(t, y)$  e  $\frac{\partial}{\partial y} V(t, y) = N(t, y)$ , então

$$V(t, y) = \int M(t, y) dt + h(y)$$

com  $h(y)$  sendo uma função arbitrária de  $y$ . Se derivamos com relação a  $y$ ,

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(t, y) dt + \frac{d}{dy} h(y) = N(t, y),$$

e assim determinamos  $h(y)$  e conseqüentemente  $V(t, y)$ .