

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 12

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa@icmc.usp.br
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

13 de abril de 2018



Aula Passada (cont.)



A ideia do **Método Geral** é decompor a ED linear de segunda ordem em duas EDs de primeira ordem, tal que, ao resolver o conjunto de equações, obtém-se a solução geral da EDO de segunda ordem.

Como fazer isso?

Se a, b constantes reais em

$$y'' + ay' + by = 0,$$

conseguimos achar constantes r_1, r_2 tal que escrevemos a ED como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} - r_1 y \right) - r_2 \left(\frac{dy}{dt} - r_1 y \right) = 0.$$

Separamos em duas EDs lineares de ordem 1.

Aula Passada



EDs de Segunda Ordem

- ▶ EDs Lineares Homogêneas:
Método Geral para Coeficientes Constantes

$$y'' + ay' + by = 0$$

- ▶ Revisão de Números Complexos.

Aula Passada (cont.)



Proposição: Se $z(t) = u(t) + iv(t)$ é uma solução a valores complexos da ED linear homogênea

$$y'' + ay' + by = 0,$$

então $u(t)$ e $v(t)$ são soluções reais da ED homogênea.

Quando resolvemos uma ED linear homogênea de segunda ordem com r_1, r_2 complexos, encontraremos uma *solução geral complexa* para a ED, mas desejamos uma *solução geral real*.

Para obtê-la, usamos a Proposição: basta *desenvolver* uma solução complexa para a forma $u(t) + iv(t)$ e tomar $y_1(t) = u(t)$ e $y_2(t) = v(t)$ como as duas soluções reais LI da ED linear homogênea:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad y(t) \in \mathbb{R}.$$

Método Geral (cont.)



Exemplo: Determine a solução geral de

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Solução: (na lousa)

(Aula passada) Solução *complexa* (com $i = \sqrt{-1}$):

$$w(t) = K_1 e^{(1+2i)t} + K_2 e^{(1-2i)t}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Escolhemos *uma* solução *não nula* – por exemplo, com $K_1 = 1, K_2 = 0$:

$$w_1(t) = e^{(1+2i)t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

e expandimos na *forma padrão de função complexa*, usando a *Fórmula de Euler*:

$$w_1(t) = e^t \cos(2t) + i e^t \sin(2t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Pela Proposição:

$$y(t) = C_1 e^t \cos(2t) + C_2 e^t \sin(2t), \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Método Geral (cont.)



Exercício: Determine a solução geral de

$$y'' - 18y = 0.$$

Solução:

$$y(t) = C_1 e^{3\sqrt{2}t} + C_2 e^{-3\sqrt{2}t}, \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Método Geral (cont.)



Exemplo: Determine a solução $y(t)$ de

$$\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Solução: (na lousa)

$$w(t) = K_1 e^{(3i)t} + K_2 e^{(-3i)t}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$e^{\pm i(3t)} = \cos(3t) \pm i \sin(3t)$$

Por Proposição:

$$y(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t), \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Solução do PVI: $y(t) = \cos(3t) - \sin(3t), \quad t \in \mathbb{R}.$

Método Geral (cont.)



A partir de agora, podemos usar a seguinte afirmação:

Afirmção A:

Considerando a ED $\left[\frac{dw}{dt} + rw = g(t) \right]$ com $w = w(t)$, e sendo r uma constante (real ou complexa), podemos reescrever a ED como

$$\frac{d}{dt} [w(t) e^{rt}] = g(t) e^{rt}$$

após multiplicar por e^{rt} , pois $\frac{d}{dt} (e^{rt}) = r e^{rt}$.