

# SME0340

## Equações Diferenciais Ordinárias

### Aula 16

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira  
marialuisa @ icmc . usp . br  
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

27 de abril de 2018



## MCD: Exercício



**Exercício:** Determine a solução particular  $y_p(t)$  de  
$$y'' - 3y' + 2y = 2t^3 + 3t^2 - 30t$$

**Obs:** Não é necessário aplicar o Princípio da Superposição no tipo polinomial.

**Solução:**

$$y_p(t) = t^3 + 6t^2 - 6, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## Aulas Anteriores



### EDs de Segunda Ordem

- ▶ EDs Lineares Não Homogêneas:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = g(t)$$

- ▶ Método dos Coeficientes a Determinar (MCD):  
*Observar, Deduzir, Calcular*

$$y'' + ay' + by = g(t),$$

com  $g(t)$  polinomial, exponencial, trigonométrico, misto (poli, trig, exp), combinação linear

- ▶ Método de Variação dos Parâmetros (MVP): dadas soluções LI  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  da ED homogênea correspondente,

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t),$$

$$\begin{cases} u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0 \\ u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t) \end{cases}$$

## Aula Passada



**Exemplo:** Determinar a solução particular  $y_p(t)$  de

$$y'' - 3y' + 2y = e^t$$

sabendo que  $y_1(t) = e^t$ ,  $y_2(t) = e^{2t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , são soluções da ED homogênea correspondente.

**Solução:** (na lousa)

$$y_p(t) = -(t+1)e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## EDs de Ordem Superior



Para determinar a solução geral da equação diferencial linear de ordem  $n$

$$y^{(n)} + b_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + b_2(t)y'' + b_1(t)y' + b_0(t)y = g(t)$$

com funções contínuas  $b_j(t), j = 0, \dots, n-1, g(t)$  para  $t \in I$ , vamos *generalizar* os teoremas, as definições e os métodos de ordem 2 para casos com ordem  $n$ .

O teorema a seguir generaliza os teoremas necessários para obter a solução geral da ED.

## EDs de Ordem Superior (cont.)



Vamos somente trabalhar com EDs de ordem  $n, n \geq 2$ , que possuem *coeficientes constantes*.

Para determinar as soluções LI da ED homogênea

$$y^{(n)} + b_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + b_2y'' + b_1y' + b_0y = 0,$$

com  $b_0, \dots, b_{n-1}$  constantes, podemos aplicar o *Método Geral para coeficientes constantes*.

Adaptado para ordens superiores a 2, o método consiste em reescrever a ED de ordem  $n$  como um conjunto de  $n$  equações diferenciais de ordem um, que podem ser resolvidas em sequência para obter a solução geral  $y(t)$  da ED de ordem  $n$ .

**Exemplo:** Como reescrever a ED

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0?$$

## EDs de Ordem Superior (cont.)



**Teorema:** Para a ED

$$y^{(n)} + b_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + b_2(t)y'' + b_1(t)y' + b_0(t)y = g(t)$$

com  $b_0(t), \dots, b_{n-1}(t)$  e  $g(t)$  funções contínuas em  $I$ :

- ▶ O conjunto de todas as soluções da ED homogênea correspondente é um espaço vetorial de dimensão  $n$ , isto é, a ED possui  $n$  soluções LI.
- ▶ Sejam  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  soluções da ED homogênea. Estas funções são LI se e somente se o *Wronskiano* de  $y_1, \dots, y_n$  é não nulo para algum  $t_0 \in I$ .
- ▶ Se  $y_P(t)$  é uma solução particular da ED não homogênea e  $y_1, \dots, y_n$  são soluções LI da ED homogênea, então a solução geral  $y(t)$  é

$$y(t) = y_P(t) + \sum_{j=1}^n c_j y_j(t), \quad c_j \in \mathbb{R}.$$

## EDs de Ordem Superior (cont.)



Para aplicar o Método Geral, precisamos determinar *pele menos uma* raiz do polinômio

$$r^n + b_{n-1}r^{n-1} + \dots + b_1r + b_0 = 0,$$

que possui  $n$  raízes  $r_j$  (reais ou complexas):

$$(r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_{n-1})(r - r_n) = 0.$$

Métodos para obter raízes de polinômios:

- ▶ Se os coeficientes são *inteiros*, suas prováveis raízes são tais que:

$$b_{n-1} = -\sum_{j=1}^n r_j; \quad b_0 = (-1)^n \prod_{j=1}^n r_j;$$

- ▶ Algoritmo de Briot-Ruffini (com uma raiz  $r_1$ );
- ▶ Raiz  $n$ -ésima de um número complexo  $z = \alpha e^{i\theta}$ :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\alpha} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k = 0, \dots, n-1$$

## EDs de Ordem Superior (cont.)



**Exemplo:** Decompor a ED

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

pelo Método Geral.

**Solução:** (na lousa)

$$\begin{cases} w' - w = 0 \\ w(t) = z' - 2z \\ z(t) = y' - 3y \end{cases}; \begin{cases} w' - 3w = 0 \\ w(t) = z' - z \\ z(t) = y' - 2y \end{cases}; \begin{cases} w' - 3w = 0 \\ w(t) = z' - 2z \\ z(t) = y' - y \end{cases}; \dots$$

## EDs de Ordem Superior (cont.)



**Método dos Coeficientes a Determinar:** o método é aplicado similarmente aos casos para EDs de ordem 2. A modificação está no caso *polinomial*.

Com o aumento no número de derivadas de  $y$  (até ordem  $n$ ), se

$$g(t) = t^m,$$

o grau  $k$  do polinômio deduzido para  $y_p(t)$  pode variar de grau  $m$  até grau  $m + n$ , dependendo da ordem da *menor derivada* presente na ED.

**Exemplo:** Solução particular  $y_p(t)$  de

- ▶  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = -36t$ .
- ▶  $y^{(7)} - 2y^{(5)} = 2t^2$ .
- ▶  $y^{(4)} + 2y'' = 3e^t$ .

## EDs de Ordem Superior (cont.)



Para a ED não homogênea

$$y^{(n)} + b_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + b_2y'' + b_1y' + b_0y = g(t),$$

como a solução geral é dada por

$$y(t) = \sum_{j=1}^n c_j y_j(t) + y_p(t),$$

precisamos saber encontrar a solução particular  $y_p(t)$ .

Adaptamos os métodos vistos anteriormente: *Método dos Coeficientes a Determinar* e *Método da Variação dos Parâmetros*.

## EDs de Ordem Superior (cont.)



**Método da Variação dos Parâmetros:** modificamos tanto a definição de  $y_p(t)$  quanto o sistema a ser resolvido:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + \dots + u_n(t)y_n(t)$$

$$\begin{cases} u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) + \dots + u_n'(t)y_n(t) = 0 \\ u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) + \dots + u_n'(t)y_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ u_1'(t)y_1^{(n-2)}(t) + u_2'(t)y_2^{(n-2)}(t) + \dots + u_n'(t)y_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ u_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + u_2'(t)y_2^{(n-1)}(t) + \dots + u_n'(t)y_n^{(n-1)}(t) = g(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(t) \end{bmatrix}$$

**Exemplo:** Determine a solução geral de

$$y^{(3)} - 7y'' + 14y' - 8y = 9e^t + 8t + 2.$$

**Solução da homogênea correspondente:** (na lousa)

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{4t}, \quad C_1, C_2, C_3, t \in \mathbb{R}.$$

**LEMBRANDO:**

**Afirmção A:** Considerando a ED  $\left[ \frac{dw}{dt} + r w = g(t) \right]$  com  $w = w(t)$ , e sendo  $r$  uma constante (real ou complexa), podemos reescrever a ED como

$$\frac{d}{dt} [w(t) e^{rt}] = g(t) e^{rt}$$

após multiplicar por  $e^{rt}$ , pois  $\frac{d}{dt} (e^{rt}) = r e^{rt}$ .