SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 21

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

16 de maio de 2018

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}(t).$$

Solução: (na lousa)

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix},$$

$$c_1, c_2, c_3, t \in \mathbb{R}.$$

Aulas Passadas

Sistemas de EDs

- Sistemas Lineares Homogêneos:
$$\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$$
- Autovalores λ e autovetores corresp. $\vec{v}$;
- Autovalores reais (individuais):
$$\vec{x}^{\,j}(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j$$
- Autovalores complexos (pares):
$$\vec{z}^{\,1}(t) = \overline{\vec{z}^{\,2}(t)} = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = \vec{u}^{R}(t) + i\,\vec{u}^{I}(t), \quad \vec{z}^{\,1}(t) \in \mathbb{C}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{x}^{\,1}(t) = \vec{u}^{R}(t) \in \mathbb{R}, \quad \vec{x}^{\,2}(t) = \vec{u}^{I}(t) \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Baseado em Forma Canônica de Jordan, Autovetores Generalizados e Exponenciais de Matrizes:

Se há autovalores **repetidos**, com **multiplicidade k**, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$, precisamos encontrar k soluções LI da forma geral

$$\vec{x}^{\,j}(t) = e^{\lambda_j t}\,\vec{v}_j(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se encontrarmos k autovetores correspondentes $\vec{v}_j$, $j = 1, \ldots, k$ linearmente independentes, então eles serão *constantes* (não dependendo de t).

Se o número de autovetores LI (n) for menor que k, então precisamos encontrar outras $k - n$ soluções linearmente independentes tais que $\vec{v}_j(t), j = n+1, \ldots, k$ são *vetores polinomiais* em t com grau maior ou igual a 1.

Fazemos isso aumentando *gradativamente* o grau de $\vec{v}_j(t)$ até encontrarmos as k soluções LI. **Como?**

Tentamos encontrar as $r = k - n$ soluções LI restantes da forma

$$\vec{x}^{j}(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{com } \vec{v}_j(t) = t\,\vec{u}_0 + \vec{u}_1, \quad j = 1, \ldots, r$$

tais que $\dot{\vec{x}}^{j}(t) = A\,\vec{x}^{j}(t)$, ou seja,

$$\left[\lambda_j \vec{v}_j(t) + \dot{\vec{v}}_j(t)\right] e^{\lambda_j t} = A\,\vec{v}_j(t)\, e^{\lambda_j t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{v}}_j(t) = (A - \lambda_j I)\,\vec{v}_j(t)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (A - \lambda_j I)\,\vec{u}_0 = \vec{0} \\ (A - \lambda_j I)\,\vec{u}_1 = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Obs.: Note que $\vec{u}_0$ é o conjunto de autovetores obtidos no passo anterior.

Forma Geral das k soluções LI para **autovalores repetidos λ com multiplicidade k**:

$$\vec{x}^{j}(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{com } \vec{v}_j(t) = \frac{t^n}{n!}\vec{u}_0 + \ldots + \frac{t^2}{2}\vec{u}_{n-2} + t\,\vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n$$

$$\text{tais que } \begin{cases} (A - \lambda_j I)\,\vec{u}_0 = \vec{0} \\ (A - \lambda_j I)\,\vec{u}_1 = \vec{u}_0 \\ \vdots \\ (A - \lambda_j I)\,\vec{u}_{n-1} = \vec{u}_{n-2} \\ (A - \lambda_j I)\,\vec{u}_n = \vec{u}_{n-1} \end{cases},$$

aplicando a partir de $n = 0$ ($\vec{v}_j(t)$ constante) e aumentando n *unitariamente* até encontrar as k soluções LI.

Se não encontramos todas as k soluções LI, tentamos encontrar as p soluções LI restantes da forma

$$\vec{x}^{j}(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{com } \vec{v}_j(t) = \frac{t^2}{2}\vec{u}_0 + t\,\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad j = 1, \ldots, p$$

$$\text{tais que } \begin{cases} (A - \lambda_j I)\,\vec{u}_0 = \vec{0} \\ (A - \lambda_j I)\,\vec{u}_1 = \vec{u}_0 \\ (A - \lambda_j I)\,\vec{u}_2 = \vec{u}_1 \end{cases}.$$

Obs.: Note que $\vec{u}_0$ e $\vec{u}_1$ foram obtidos no passo anterior.

E assim sucessivamente, aumentando o grau do polinômio de $\vec{v}_j(t)$ até encontrar todas as k soluções LI para os k autovalores iguais λ_j.

Exemplo: Determine a solução geral $\vec{x}(t)$ de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\vec{x} = A\,\vec{x}.$$

Solução: Vamos determinar os autovalores $\lambda_{1,2}$ e os autovetores correspondentes $\vec{v}_{1,2}$ da matriz A.

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(6-\lambda) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

$$\lambda_{1,2} = 4: \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T, \; a, b \in \mathbb{R}$$

$$(A - 4I)\,\vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2a - 2b = 0 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b = -a \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; a \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo (cont.): $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\vec{v} = a\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$, $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}^1(t) \overset{(a=1)}{=} e^{4t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Vamos encontrar uma $\vec{x}^2(t)$ que seja **LI** de $\vec{x}^1(t)$:
Sendo $\vec{x}^2(t) = e^{4t}\vec{v}_2(t)$ com $\vec{v}_2(t) = t\,\vec{u}_0 + \vec{u}_1$, temos

$$\begin{cases}(A-4I)\,\vec{u}_0 = \vec{0}\\(A-4I)\,\vec{u}_1 = \vec{u}_0\end{cases} \qquad \vec{u}_0 = \vec{v} = a\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R}.$$

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix},\ c, d \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \begin{cases}-2c-2d = a\\2c+2d = -a\end{cases} \quad \Rightarrow \quad d = -\frac{a}{2} - c$$

$$\Rightarrow \ \vec{u}_1 = \begin{bmatrix}c\\-\frac{a}{2}-c\end{bmatrix} = -\frac{a}{2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\ a, c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2(t) \overset{\substack{(a=-2,\\ c=0)}}{=} \begin{bmatrix}-2t\\2t+1\end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\vec{x}(t).$$

Solução: (na lousa)

$$\lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1;$$

$$\vec{v}_1 = a\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, a \in \mathbb{R};\ \vec{v}_2 = b\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, b \in \mathbb{R},\ \vec{v}_3 = c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix}c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}\\-c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}\\c_3 e^{t}\end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo (cont.):

Então, com

$$\vec{x}^1(t) = e^{4t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \quad \vec{x}^2(t) = e^{4t}\begin{bmatrix}-2t\\2t+1\end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

temos

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{4t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{bmatrix}-2t\\2t+1\end{bmatrix}, \quad c_1, c_2, t \in \mathbb{R}$$