SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 22

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

18 de maio de 2018

Sistemas Não Homogêneos

Vamos agora determinar a *solução particular* $\vec{x}_P(t)$ de

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{g}(t),$$

com $A(t)$, uma matriz $m \times m$, e $\vec{g}(t)$, sendo $m \times 1$, contínuas num intervalo J.

Teorema: Sejam $\vec{u}(t)$ e $\vec{v}(t)$ duas soluções de $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{g}(t)$. Então a sua diferença $\vec{\varphi}(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}(t)$ é solução de $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

Teorema: Seja $X(t) = \left[\vec{x}^1(t) \quad \cdots \quad \vec{x}^m(t)\right]$ uma MF do sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Seja $\vec{x}_P(t)$ uma solução particular do sistema não homogêneo. Então

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + \vec{x}_P(t)$$

é a solução geral do sistema não homogêneo, com $\vec{c} = \left[c_1 \quad \cdots \quad c_m\right]^T$ vetor de constantes arbitrárias.

Aula Passada

Sistemas de EDs

Sistemas Lineares Homogêneos: $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$

- Autovalores reais (individuais):
$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$$
- Autovalores complexos ($\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, $\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1}$):
$$\vec{z}^1(t) = \overline{\vec{z}^2(t)} = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = \vec{u}^R(t) + i\,\vec{u}^I(t), \quad \vec{z}^1(t) \in \mathbb{C}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{x}^1(t) = \vec{u}^R(t) \in \mathbb{R}, \quad \vec{x}^2(t) = \vec{u}^I(t) \in \mathbb{R}.$$
- Autovalores com multiplicidade k:
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \lambda,$$
$$\vec{x}^j(t) = e^{\lambda t}\vec{v}_j(t), \quad j = 1, \ldots, k$$
- Solução geral: $\vec{x}(t) = \sum_j C_j \vec{x}^j(t), \quad C_j \in \mathbb{R}.$

Sistemas Não Homogêneos (cont.)

Para determinar uma solução particular do sistema não homogêneo

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{g}(t),$$

onde a matriz $A(t)$ pode ser constante ou função contínua de t em J, podemos aplicar dois métodos:

- **Método dos Coeficientes a Determinar (MCD)**, se A é constante e $\vec{g}(t)$ é composta por funções da forma *polinomial*, *exponencial* ou *trigonométrica* (seno ou cosseno), ou suas combinações.
- **Método da Variação dos Parâmetros (MVP)**, mais geral, se $A(t)$ e $\vec{g}(t)$ são quaisquer.

Sistemas Não Homogêneos: MCD

A aplicação do *Método dos Coeficientes a Determinar* é semelhante à aplicação para EDs de ordem n, com apenas algumas pequenas modificações para sistemas lineares.

Vamos **Observar**, **Deduzir** e **Calcular** a solução particular $\vec{x}_P(t)$ do sistema não homogêneo.

Para o caso onde o vetor $\vec{g}(t)$ é da forma *polinomial*,

$$\vec{g}(t) = t^n \vec{z},$$

de grau n, onde $\vec{z}$ é um vetor constante, vamos deduzir que a solução particular é um vetor polinomial, e seu grau vai depender do *determinante* da matriz A e da *multiplicidade* dos autovalores iguais de A.

MCD (cont.)

Similarmente aos casos de EDOs de ordem n, com vetor $\vec{z}$ constante:

- se $\vec{g}(t) = e^{\alpha t}\vec{z}$ (caso *exponencial*), deduzimos que $\vec{x}_P(t) = e^{\alpha t}\vec{v}(t)$ e calculamos $\vec{v}(t)$ pelo caso polinomial;
- se $\vec{g}(t) = \cos(\beta t)\vec{z}$ ou $\vec{g}(t) = \mathrm{sen}(\beta t)\vec{z}$ (caso *trigonométrico*), modificamos o sistema para o caso *exponencial*, tomando a parte *real* ou *imaginária* correspondente da solução particular do sistema modificado;
- se $\vec{g}(t)$ é um caso *misto*, adaptamos para um sistema equivalente com caso misto composto por produto de casos polinomial e exponencial;
- se $\vec{g}(t)$ é composta pela *combinação linear vetorial* de casos anteriores, podemos aplicar o **Princípio da Superposição** para sistemas.

MCD (cont.)

A solução particular $\vec{x}_P(t)$ do sistema não homogêneo, quando $\vec{g}(t)$ é da forma *polinomial* de grau n, pode ser deduzida considerando o *determinante* da matriz A (se é nulo ou não nulo) e, se necessário, a *multiplicidade dos autovalores* e autovetores LI correspondentes:

- Se $\det(A) \neq 0$, então $\vec{x}_P(t) = t^n \vec{u}^{\,n} + \ldots + t\,\vec{u}^{\,1} + \vec{u}^{\,0}$, com $\vec{u}^{\,i}$ constantes;
- Se $\det(A) = 0$ e $\lambda = 0$ é *autovalor simples* de A, então $\vec{x}_P(t)$ é vetor polinomial de grau $n+1$ $\vec{x}_P(t) = t^{n+1}\vec{u}^{\,n+1} + t^n \vec{u}^{\,n} + \ldots + t\,\vec{u}^{\,1} + \vec{u}^{\,0}$;
- Se $\det(A) = 0$ e $\lambda = 0$ é *autovalor múltiplo* de A, então $\vec{x}_P(t)$ é vetor polinomial de grau: $n+1$ mais a diferença entre a multiplicidade de λ e o número de autovetores.

Notas: 1) $\lambda = \alpha$ é autovalor de $A \Leftrightarrow \det(A - \alpha I) = 0$.
2) $\det(A - \alpha I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ é autovalor de $A - \alpha I$.

MCD (cont.)

Exemplo: Determine a solução particular $\vec{x}_P(t)$ de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} -8 + 7e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sabendo que a matriz A possui autovalores $\lambda = 0$ (multiplicidade 2) com autovetor $\vec{v} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}^T$, $a_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda = 8$ com autovetor $\vec{v} = a_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$, $a_2 \in \mathbb{R}$.

Solução: (partes na lousa) Vamos separar

$$\vec{g}(t) = \vec{g}_1(t) + \vec{g}_2(t) = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\,\vec{z}^{\,1} + e^t \vec{z}^{\,2}$$

e aplicar o *Princípio da Superposição*. Como $\vec{g}_1(t)$ é da forma polinomial de grau 0, e como $\det(A) = 0$ com $\lambda = 0$ de mult. 2 e 1 autovetor, então deduzimos que

$$\vec{x}_{P1}(t) = t^2 \vec{u}^{\,2} + t\,\vec{u}^{\,1} + \vec{u}^{\,0}.$$

MCD (cont.)

Calculando $\vec{u}^{\,i}$: como $\dot{\vec{x}}_{P1}(t) = 2t\,\vec{u}^{\,2} + \vec{u}^{\,1}$,

$$\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x} + \vec{g}_1(t) \quad \Rightarrow$$

$$2t\,\vec{u}^{\,2} + \vec{u}^{\,1} = t^2 A\,\vec{u}^{\,2} + tA\,\vec{u}^{\,1} + A\,\vec{u}^{\,0} + 1\,\vec{z}^{\,1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\,\vec{u}^{\,2} = \vec{0} \\ A\,\vec{u}^{\,1} = 2\,\vec{u}^{\,2} \\ A\,\vec{u}^{\,0} = \vec{u}^{\,1} - \vec{z}^{\,1} \end{cases}$$

$$\det(A) = 0\ (?): \quad A\,\vec{u}^{\,2} = \vec{0} \ \Rightarrow\ \vec{u}^{\,2} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{u}^{\,1} = \begin{bmatrix} 2a \\ 4a \\ 16a \end{bmatrix} \quad \cdots\ \vec{u}^{\,1} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 8a + 2b \\ 14a + 8b \end{bmatrix},$$

$b \in \mathbb{R}$.

MCD (cont.)

Para $\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x} + \vec{g}_2(t)$, vamos determinar $\vec{x}_{P2}(t)$.
Sendo $\vec{g}_2(t) = e^t\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = e^t\,\vec{z}^{\,2}$ da forma *exponencial*, então $\vec{x}_{P2}(t) = e^t\,\vec{v}(t)$ e assim

$$\dot{\vec{x}}_{P2}(t) = \left(\dot{\vec{v}} + \vec{v}\right)e^t \Rightarrow \left(\dot{\vec{v}} + \vec{v}\right)e^t = A\,\vec{v}\,e^t + \vec{z}^{\,2}e^t$$

$$\Rightarrow\ \dot{\vec{v}} + \vec{v} = A\,\vec{v} + \vec{z}^{\,2} \Rightarrow\ \dot{\vec{v}} = (A - I)\,\vec{v} + \vec{z}^{\,2}$$

Forma *polinomial* de grau 0. Como $\lambda = 1$ **não é** autovalor de A, $\det(A - I) \neq 0$ e então $\vec{v}(t) = \vec{u}^{\,0}$.

$$\Rightarrow\ \dot{\vec{v}}(t) = \vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{0} = (A - I)\,\vec{u}^{\,0} + \vec{z}^{\,2}$$

$$\Rightarrow\ (A - I)\,\vec{u}^{\,0} = -\vec{z}^{\,2}: \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{u}^{\,0} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cdots \quad \vec{u}^{\,0} = -\begin{bmatrix} 1 & 16 & 28 \end{bmatrix}^T = \vec{v}(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore \quad \vec{x}_{P2}(t) = -e^t\begin{bmatrix} 1 & 16 & 28 \end{bmatrix}^T,\ t \in \mathbb{R}.$$

MCD (cont.)

$$\vec{u}^{\,2} = \begin{bmatrix} a & 2a & 8a \end{bmatrix}^T;\ \vec{u}^{\,1} = \begin{bmatrix} b & 8a + 2b & 14a + 8b \end{bmatrix}^T,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

$$A\,\vec{u}^{\,0} = \vec{u}^{\,1} - \vec{z}^{\,1}: \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{u}^{\,0} = \begin{bmatrix} b + 8 \\ 8a + 2b \\ 14a + 8b \end{bmatrix}$$

$$\cdots \quad a = 2; \quad \vec{u}^{\,0} = \begin{bmatrix} f \\ h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 14 + 4b + 2f \\ 20 + 7b + 8f \end{bmatrix},\ b, f \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x}_{P1}(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 + bt + f \\ 4t^2 + (2b + 16)t + (14 + 4b + 2f) \\ 16t^2 + (8b + 28)t + (20 + 7b + 8f) \end{bmatrix},\ b, f \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad (b = f = 0) \quad \vec{x}_{P1}(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ 4t^2 + 16t + 14 \\ 16t^2 + 28t + 20 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

MCD (cont.)

Então, sendo

$$\vec{x}_{P1}(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ 4t^2 + 16t + 14 \\ 16t^2 + 28t + 20 \end{bmatrix},\ \vec{x}_{P2}(t) = -e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 16 \\ 28 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R},$$

a solução particular de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} -8 + 7e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é dada por

$$\vec{x}_P(t) = \vec{x}_{P1}(t) + \vec{x}_{P2}(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 - e^t \\ 4t^2 + 16t + 14 - 16e^t \\ 16t^2 + 28t + 20 - 28e^t \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Observação: Ao aplicar o Método dos Coeficientes a Determinar, se $\overrightarrow{g}(t)$ é escrito como, por exemplo,

$$\overrightarrow{g}(t) = \begin{bmatrix} 3\,e^{t} + 2\,e^{-t} \\ -\cos(2\,t) \\ 4\,t - e^{t} \end{bmatrix},$$

então é necessário separar os tipos distintos

$$\overrightarrow{g}(t) = e^{t}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos(2\,t)\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e aplicar o Princípio da Superposição.