SME0340 Equações Diferenciais Ordinárias Aula 27

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

13 de junho de 2018

TL em Solução de EDs

Como utilizar Transformada de Laplace para determinar a solução $y(t)$ de PVIs com EDOs de ordem n?
Com o PVI de ordem 2 com coeficientes constantes

$$\begin{cases} y'' + a\,y' + b\,y = g(t) \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = z_0 \end{cases},$$

se aplicarmos a Transformada de Laplace e a Propriedade 4 sobre a ED, e definirmos $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, para $t \geq 0$, temos

$$\mathcal{L}\left[y'' + a\,y' + b\,y\right] = \mathcal{L}[g(t)] \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\left[y''\right] + a\,\mathcal{L}\left[y'\right] + b\,\mathcal{L}[y] = G(s);$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s); \quad \mathcal{L}\left[y'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[y(t)] - y(0) = s\,Y(s) - y_0;$$

$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right] = s\,\mathcal{L}\left[y'(t)\right] - y'(0) = s^2\,Y(s) - s\,y_0 - z_0.$$

Substituímos na equação e isolamos $Y(s)$.
Finalmente calculamos $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$, para $t \geq 0$.

Aula Passada

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s},\ s > 0; \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0; \quad \mathcal{L}\left[e^{ct}\right] = \frac{1}{s-c},\ s > c;$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{sen}(w\,t)] = \frac{w}{s^2 + w^2},\ s > 0; \quad \mathcal{L}[\cos(w\,t)] = \frac{s}{s^2 + w^2},\ s > 0;$$

Com $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$:

$$\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,\mathcal{L}[f(t)] + b\,\mathcal{L}[g(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a),\ s > s_0 + a;$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s); \quad \mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Transformada Inversa $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$;
Frações Parciais.

TL em Solução de EDs (cont.)

Exemplo: Resolva o PVI $\begin{cases} y'' - 3\,y' + 2\,y = 6\,e^{-t} \\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1 \end{cases}$.

Solução: Aplicando TL,

$$\mathcal{L}\left[y'' - 3\,y' + 2\,y\right] = \mathcal{L}\left[6\,e^{-t}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\left[y''\right] - 3\mathcal{L}\left[y'\right] + 2\mathcal{L}[y] = 6\mathcal{L}\left[e^{-t}\right]$$

com

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s), \quad \mathcal{L}\left[y'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[y(t)] - y(0) = s\,Y(s) - 2,$$

$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right] = s\,\mathcal{L}\left[y'(t)\right] - y'(0) = s^2\,Y(s) - 2\,s + 1:$$

$$\left[s^2\,Y(s) - 2\,s + 1\right] - 3\,[s\,Y(s) - 2] + 2\,[Y(s)] = \frac{6}{s+1} \quad \Rightarrow$$

$$\left(s^2 - 3\,s + 2\right) Y(s) - (2\,s - 7) = \frac{6}{s+1} \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{6 + (2\,s - 7)\,(s+1)}{(s+1)\left(s^2 - 3\,s + 2\right)}$$

TL em Solução de EDs (cont.)

Exemplo (cont.):

$$Y(s) = \frac{6+(2s-7)(s+1)}{(s+1)(s^2-3s+2)} = \frac{2s^2-5s-1}{(s+1)(s-1)(s-2)} =$$
$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} =$$
$$= \frac{A(s-1)(s-2)+B(s+1)(s-2)+C(s+1)(s-1)}{(s+1)(s-1)(s-2)}$$

$$A(s-1)(s-2)+B(s+1)(s-2)+C(s+1)(s-1) = 2s^2-5s-1$$

$$s=-1: \quad 6A=6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A=1}$$
$$s=1: \quad -2B=-4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B=2}$$
$$s=2: \quad 3C=-3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C=-1}$$

$$\therefore \quad Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2}$$

TL em Solução de EDs (cont.)

E como determinar a **solução geral** de uma ED linear com coeficientes constantes

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(t)$$

aplicando Transformada de Laplace?

Resolver o PVI

$$\begin{cases} y'' + a\,y' + b\,y = g(t) \\ y(0) = c_1, \; y'(0) = c_2 \end{cases}$$

com c_1, c_2 sendo constantes reais arbitrárias.

TL em Solução de EDs (cont.)

Exemplo (cont.): $Y(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{2}{s-1} - \dfrac{1}{s-2}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$\therefore \quad y(t) = e^{-t} + 2\,e^{t} - e^{2t}, \quad t \geq 0.$$

TL em Solução de EDs (cont.)

Exemplo: Determinar a solução geral de

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 6\,e^{-t}$$

usando Transformada de Laplace.

Solução: (partes na lousa)

Para resolver a ED, devemos resolver o PVI

$$\begin{cases} y'' - 3\,y' + 2\,y = 6\,e^{-t} \\ y(0) = c_1, \; y'(0) = c_2 \end{cases} .$$

Sendo

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s),$$
$$\mathcal{L}\left[y'(t)\right] = s\,Y(s) - y(0) = s\,Y(s) - c_1,$$
$$\mathcal{L}\left[y''(t)\right] = s\,[s\,Y(s) - c_1] - y'(0) = s^2\,Y(s) - s\,c_1 - c_2,$$

temos $\quad \mathcal{L}[y'' - 3\,y' + 2\,y] = \mathcal{L}\left[6\,e^{-t}\right].$

TL em Solução de EDs (cont.)

Exemplo (cont.): $\mathcal{L}[y''-3y'+2y]=\mathcal{L}[6e^{-t}]$

$$[s^2Y(s)-sc_1-c_2]-3[sY(s)-c_1]+2[Y(s)]=\frac{6}{s+1}$$

$$(s^2-3s+2)Y(s)-(c_1s-3c_1+c_2)=\frac{6}{s+1}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s)=\frac{6}{(s+1)(s^2-3s+2)}+\frac{c_1s-3c_1+c_2}{s^2-3s+2}=$$

$$=\frac{6}{(s+1)(s-1)(s-2)}+\frac{c_1s-3c_1+c_2}{(s-1)(s-2)}=$$

$$=\frac{1}{s+1}+\frac{k_1}{s-1}+\frac{k_2}{s-2}.$$

$$\therefore \quad y(t)=k_1e^t+k_2e^{2t}+e^{-t}, \quad t\geq 0, \; k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

TL em Solução de EDs (cont.)

Exercício: Resolva o PVI

$$\begin{cases} y''-2y'-3y=4e^{-t} \\ y(0)=1, \; y'(0)=2 \end{cases}.$$

Solução:

$$y(t)=-te^{-t}+e^{3t}, \quad t\geq 0.$$

TL em Solução de EDs (cont.)

Como resolver um PVI da forma

$$\begin{cases} y''+ay'+by=g(t) \\ y(t_1)=y_0, \; y'(t_1)=z_0 \end{cases}$$

onde $t_1\neq 0$?

Fazer uma **mudança de variável** $\tau=t-t_1$, aplicar a Transformada de Laplace e resolver o PVI definido para τ, e finalmente fazer a mudança de variável inversa $t=\tau+t_1$ para obter a solução do PVI em t.

PVI definido para τ:

$$\begin{cases} z''(\tau)+az'(\tau)+bz(\tau)=f(\tau) \\ z(0)=y_0, \; z'(0)=z_0 \end{cases}$$

com $z(\tau)=y(\tau+t_1)$ e $f(\tau)=g(\tau+t_1)$.