

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 29

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa@icmc.usp.br
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

20 de junho de 2018



Outras Propriedades



Produto de Convolução: Sejam $f(t)$ e $g(t)$ definidas para $t \geq 0$. Então o Produto de Convolução de f por g , indicado por $f * g$, é definido por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau.$$

Propriedades do Produto de Convolução:

- (a) $f * g = g * f$,
- (b) $(f * g) * h = f * (g * h)$,
- (c) $f * 0 = 0$,
- (d) $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Propriedade 5: $\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \mathcal{L}[g(t)]$.

Aula Passada



Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, s > 0; \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0; \quad \mathcal{L}[e^{ct}] = \frac{1}{s-c}, s > c;$$

$$\mathcal{L}[\text{sen}(wt)] = \frac{w}{s^2 + w^2}, s > 0; \quad \mathcal{L}[\text{cos}(wt)] = \frac{s}{s^2 + w^2}, s > 0;$$

Com $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a), s > s_0 + a;$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s); \quad \mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Aplicação em Sistemas de EDs.

Outras Propriedades (cont.)



Exemplo: Calcule $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, $F(s) = \frac{1}{s(s-1)}$.

Solução:

$$F_1(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = e^t, t \geq 0;$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = 1, t \geq 0;$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = (f_1 * f_2)(t) =$$

$$= \int_0^t (e^\tau)(1) d\tau = e^\tau \Big|_0^t = e^t - 1, t \geq 0.$$

Outras Propriedades (cont.)



Seja a função **degrau unitário** ou função de **Heaviside**

$$\mu_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < c, \\ 1, & \text{se } t \geq c. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mu_c(t)] &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \mu_c(t) dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Outras Propriedades (cont.)



Função Periódica: a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *periódica* se $f(t+p) = f(t)$, para qualquer t .

Propriedade 7: Se f é função contínua por partes, de ordem exponencial e periódica de período p , então

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt$$

Nota: Para $A = (k+1)p$:

$$\int_0^A e^{-st} f(t) dt = \sum_{n=0}^k \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt = \quad (t = u + np)$$

$$= \sum_{n=0}^k e^{-snp} \int_0^p e^{-su} f(u) du.$$

$$\sum_{n=0}^k e^{-snp} = \frac{1 - e^{-s(k+1)p}}{1 - e^{-sp}}$$

Outras Propriedades (cont.)



Se temos uma função $f(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, então

$$\mu_c(t) f(t-c) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < c; \\ f(t-c), & \text{se } t \geq c. \end{cases}$$

Propriedade 6:

$$\mathcal{L}[\mu_c(t) f(t-c)] = e^{-cs} \mathcal{L}[f(t)].$$

Propriedade útil no cálculo de PVIs quando um sinal é *ligado* após um tempo $t = c$.

Função pulso quadrado: $q_a(t) = \mu_a(t) - \mu_{a+c}(t)$.

$$\mathcal{L}[q_a(t)] = \mathcal{L}[\mu_a(t)] - \mathcal{L}[\mu_{a+c}(t)]$$

Exemplo: Resposta a Impulso



Exemplo: Um corpo de massa $m = 2$ kg está preso a uma mola com constante $k = 8$ kg/s² e em repouso. Determine a resposta do sistema massa-mola a um impulso causado por uma força (praticamente) instantânea de amplitude $F = 4$ N no tempo $t = \pi$.

Este problema pode ser descrito pelo modelo

$$\begin{cases} m y'' + k y = F \delta(t - \pi) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

onde $y(t)$ é a posição do corpo em relação à sua posição em repouso e $\delta(t)$ representa a aplicação "instantânea" da força:

$$\delta(t-c) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\mu_c(t) - \mu_{c+\epsilon}(t)}{\epsilon} \right]$$

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\mathcal{L}[\mu_c(t)] - \mathcal{L}[\mu_{c+\epsilon}(t)]}{\epsilon} \right]$$

Outras Propriedades (cont.)



Exercício: Solução $y(t)$ do PVI

$$\begin{cases} y'' + 4y = 2\delta(t - \pi) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{com } \delta(t - c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\mu_c(t) - \mu_{c+\varepsilon}(t)}{\varepsilon} \right] \quad (\text{Delta de Dirac}).$$

Esboce o gráfico de $y(t)$.

Dica: $\lim_{m \rightarrow 0} \left[\frac{1 - e^{-ms}}{m} \right] = s.$

Solução:

$$\begin{aligned} y(t) = \mu_{\pi}(t) \underset{p/(t \geq 0)}{\text{sen}}(2(t - \pi)) &= \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ \text{sen}(2(t - \pi)), & \text{se } t \geq \pi \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < \pi, \\ \text{sen}(2t), & \text{se } t \geq \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

AVISOS



- ▶ **NÃO** HAVERÁ AULA NO DIA 22/06 (Jogo do Brasil).
- ▶ Lista 7 está no site.
- ▶ Provinha 6 no dia 27/06 (quarta-feira), às 10:15.
- ▶ Será fornecida tabela com transformadas e propriedades durante a provinha.