SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 3

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

6 de março de 2018

EDs de Ordem 1

Uma ED de primeira ordem pode ser escrita na **forma geral**

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t,y),$$

com f sendo uma função real definida em $A \subset \mathbb{R}^2$.

Se f depende apenas de t e é integrável,

$$y' = f(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int f(t)\,dt = F(t) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = f(t).$$

A forma mais simples de ED com f dependendo de t e y é a **ED linear**.

Aula Passada

Introdução:
Existência e Unicidade Local de Soluções de

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- $f(t,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ contínuas em retângulo $\mathcal{R}$,
$$\mathcal{R} = \left\{(t,y) \ : \ t_0 \le t \le t_0 + a; \ |y - y_0| \le b\right\}$$
- $M = \max_{(t,y)\in\mathcal{R}} |f(t,y)|$.
- Então existe solução única para PVI em $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$, $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

ED Linear

Definição: Uma **ED linear de primeira ordem** é uma equação da forma

$$y' + a(t)\,y = b(t),$$

com $a(t)$, $b(t)$ sendo funções contínuas em um intervalo J de t.

O PVI

$$\begin{cases} y' + a(t)\,y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possui solução única, definida no intervalo J que contém t_0 (por Teorema).

Exemplos: Quais são EDs lineares de ordem 1?

(a) $y' - 2\,t\,y^2 = 0$ **(c)** $y'' + t\,y' = 3\,t^3$
(b) $y' + 3\,t^2\,y = t^3$ **(d)** $y' = 2\,t\,e^y - t^2$

ED Linear (cont.)

$$y' + a(t)\,y = b(t)$$

Definição: Se $b(t) \equiv 0$, temos uma **ED linear homogênea** associada,

$$y' + a(t)\,y = 0.$$

Senão, temos uma **ED linear não homogênea**.

Como determinar *todas* as soluções $y(t)$ de

$$y' + a(t)\,y = 0,$$

com $a(t)$ contínua em um intervalo J?

ED Linear Homogênea

Para resolver

$$y' + a(t)\,y = 0,$$

sendo $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, temos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -a(t)\,y.$$

Então, através da propriedade de diferenciais,

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \neq 0.$$

Integrando dos dois lados, e sabendo que

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C_1, \quad \ln|a| = b \iff |a| = \mathrm{e}^b,$$

determinamos $y(t)$, a **solução geral**, válida em um intervalo J.

ED Linear Homogênea (cont.)

Exemplo 1: Determine a solução geral $y(x)$ de

$$y' - 3\,y = 0.$$

Solução: Como $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, temos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3\,y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = 3\,y\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\,\mathrm{d}x, \quad y \neq 0$$

($y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, também é solução da ED)

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 3\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| + C_1 = 3\,x + C_2$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = 3\,x + K, \quad K = C_2 - C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad |y| = \mathrm{e}^{3\,x+K} = \mathrm{e}^K\,\mathrm{e}^{3\,x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \pm\mathrm{e}^K\,\mathrm{e}^{3\,x}$$

p/ todo $K \in \mathbb{R}$: $\left\{+\mathrm{e}^K,\ -\mathrm{e}^K,\ 0\right\} \quad = \mathbb{R}$

$$\therefore \quad y(x) = C\,\mathrm{e}^{3\,x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

ED Linear Homogênea (cont.)

Exemplo 2: Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} y' - \frac{2}{t}y = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}.$$

Solução: (na lousa)

$$y(t) = 2\,t^2, \quad t > 0.$$

Obs. 1: O intervalo $t > 0$ foi determinado sabendo-se que a solução de um PVI deve ser definida em um intervalo *J contínuo* de t (sem "buracos") que contém o valor inicial $t_0 = 1$.

Obs. 2: O conjunto das soluções de $y' + a(t)\,y = 0$ é um *espaço vetorial* com dimensão 1.

ED Linear Homogênea (cont.)

Outro modo de resolver

$$y' + a(t)\,y = 0\,:$$

reescrever equação tal que temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g(t,y)\right) = 0.$$

Se multiplicarmos toda a ED por uma função $u(t) \not\equiv 0$, com $u(t)$ diferenciável em J, a solução não muda. Então "escolhemos" um $u(t)$ *conveniente* para multiplicar.

No caso de EDs *lineares na forma acima*, notamos que há dois termos no lado esquerdo, um com y' e outro com y.

Procuramos um $u(t)$ tal que, multiplicando toda a equação por $u(t)$, o lado esquerdo se torna uma *regra do produto*.

ED Linear Homogênea (cont.)

Exemplo:

$$y' + 3\,y = 0$$

Qual é a função $u(t)$ que multiplicamos por toda a ED tal que o lado esquerdo possa ser escrito como a *derivada em t* de função de t e y? $[u(t)\,y' + 3\,u(t)\,y = 0\,u(t) = 0]$.