SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 4

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

8 de março de 2018

ED Linear Homogênea (cont.)

Exemplo:

$$y' + 3y = 0 \qquad \color{blue}{(t \in \mathbb{R})}$$

Qual é a função $u(t)$ que multiplicamos por toda a ED tal que o lado esquerdo possa ser escrito como a *derivada em t* de função de t e y? $[u(t)\,y' + 3\,u(t)\,y = 0\,u(t) = 0]$.

Como

$$u'(t) = 3\,u(t) \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3t}\right) = 3\left(\mathrm{e}^{3t}\right),$$

então $u(t) = \mathrm{e}^{3t}$ e

$$\mathrm{e}^{3t}y' + 3\,\mathrm{e}^{3t}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3t}y\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{3t}y\right)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int 0\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{3t}y = C$$

$$\therefore \quad y(t) = C\,\mathrm{e}^{-3t}, \qquad C \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

Aula Passada

EDs de Ordem 1:

- Definições;
- EDs Lineares

$$y' + a(t)\,y = b(t)$$

  - Homogêneas ($b(t) = 0,\ t \in J$);

ED Linear Homogênea (cont.)

Exemplo: Resolver

$$t^3\,y' + 3\,t^2\,y = 0$$

Solução: (na lousa)

$$y(t) = \frac{C}{t^3}, \quad C \in \mathbb{R},\ t \neq 0.$$

Obs.: Note que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^3\right) = 3\,t^2$$

ED Linear Não Homogênea

Vamos agora definir o método para resolver EDs lineares não homogêneas,

$$y' + a(t)\,y = b(t),$$

onde $a(t), b(t)$ são contínuas num intervalo J de t.

Como vimos, podemos determinar uma função contínua $u(t) \neq 0$ tal que, multiplicando a ED, o lado esquerdo se transforma no resultado da *regra do produto* da derivada em t de y e uma função de t:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\,y) = u(t)\,y' + u(t)\,a(t)\,y = b(t)\,u(t)$$

ED Linear Não Homogênea (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$y' + 3\,y = \mathrm{e}^t.$$

Solução: Precisamos reescrever o lado esquerdo tal que esteja na forma da *regra do produto* de duas funções. Procuramos $p(t), u(t) \neq 0$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\,y) = u(t)\,y' + 3\,u(t)\,y = \mathrm{e}^t\,u(t), \quad (t \in \mathbb{R})$$

ou seja,

$$p'(t) = u'(t) = 3\,u(t) \;\Rightarrow\; \text{(ex. anterior)} \;\Rightarrow\; p(t) = u(t) = \mathrm{e}^{3t}.$$

Então,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{3t}\,y\right) = \mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{3t} = \mathrm{e}^{4t} \quad\Rightarrow\quad \int \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{3t}\,y\right)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{3t}\,y = \frac{\mathrm{e}^{4t}}{4} + C \quad\Rightarrow\quad y(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{4} + C\,\mathrm{e}^{-3t},\; t, C \in \mathbb{R}.$$

ED Linear Não Homogênea (cont.)

Com $p(t)$ determinado, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\,y) = b(t)\,u(t).$$

Integrando em t os dois lados da equação, podemos determinar a *solução geral* da ED não homogênea.

Para PVIs da forma

$$\begin{cases} y' + a(t)\,y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

determinamos primeiro a solução geral da ED e, em seguida, aplicamos a *condição inicial* para calcular a *solução única* do PVI.

ED Linear Não Homogênea (cont.)

Observação: Mostramos que a solução geral de

$$y' + 3\,y = \mathrm{e}^t$$

é

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{\mathrm{e}^t}{4}, \quad t, C \in \mathbb{R}.$$

Note que o primeiro termo da solução é a solução geral da ED linear *homogênea* correspondente,

$$y' + 3\,y = 0,$$

enquanto o segundo termo da solução geral depende da função $b(t)$ aplicada (nesse caso, e^t).

Toda solução geral de ED linear não homogênea poderá ser escrita como a soma de duas partes: a *solução geral* da ED homogênea correspondente e a *solução particular* da ED não homogênea.

Exercício

Exercício: Determine a solução geral $y(t)$ de

$$y' + 6\,t\,y = -6\,t.$$

Solução:

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{-3\,t^2} - 1, \quad t, C \in \mathbb{R}$$

Casos Especiais (cont.)

EDs não lineares de primeira ordem que podem ser transformadas em lineares:

- **Equação de Ricatti:**

$$y' + p(t)\,y + q(t)\,y^2 = f(t),$$

com $p(t), q(t), f(t)$ contínuas em J.

Se $q(t) \neq 0$ e $y_1(t)$ é uma solução particular *conhecida* da ED, com a mudança de variável

$$y = y_1 + 1/z\,,$$

temos:

$$y' = y_1' - z'/z^2\,; \quad y^2 = y_1^2 + 2\,y_1/z + 1/z^2$$

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + p(t)\left[y_1 + \frac{1}{z}\right] + q(t)\left[y_1^2 + 2\frac{y_1}{z} + \frac{1}{z^2}\right] = f(t)$$

$$\Rightarrow \quad z' - [p(t) + 2\,q(t)\,y_1]\,z = q(t)$$

Casos Especiais

EDs não lineares de primeira ordem que podem ser transformadas em lineares:

- **Equação de Bernoulli:**

$$y' + p(t)\,y = q(t)\,y^n,$$

com $p(t), q(t)$ contínuas em J e $n \in \mathbb{R}$.

Se $n \neq 0$ e $n \neq 1$, multiplicando a ED por y^{-n}, temos

$$y'\,y^{-n} + p(t)\,y^{1-n} = q(t).$$

Com a *mudança de variável* $z(t) = [y(t)]^{1-n}$,

$$z'(t) = (1-n)\,y^{-n}\,y'(t) \quad \Rightarrow \quad y'\,y^{-n} = \frac{z'}{(1-n)}$$

$$\frac{z'}{(1-n)} + p(t)\,z = q(t)$$

$$\Rightarrow \quad z' + (1-n)\,p(t)\,z = (1-n)\,q(t)$$

Casos Especiais (cont.)

Exemplo (Equação de Bernoulli): Resolver

$$y' - 2\,y = \frac{\mathrm{e}^{2\,x}}{y}, \quad y \neq 0$$

Solução: (parcial)
Multiplicar por y:

$$y\,y' - 2\,y^2 = \mathrm{e}^{2\,x}$$

Substituir

$$z(x) = y^2(x), \quad z'(x) = 2\,y(x)\,y'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$z' - 4\,z = 2\,\mathrm{e}^{2\,x}$$

$$\therefore \quad y(x) = \pm\sqrt{C\,\mathrm{e}^{4\,x} - \mathrm{e}^{2\,x}},$$

$$C \in \mathbb{R},\ x \in \left\{t \in \mathbb{R} \mid C\,\mathrm{e}^{4\,t} - \mathrm{e}^{2\,t} > 0\right\}.$$

Provinha #1

Provinha 1 – dia 15/03 – 1 hora de duração

Conteúdo:

- Introdução
  - Definições;
  - Lema e Teorema.
- EDs de Ordem 1
  - Definições;
  - EDs Lineares, homogêneas e não homogêneas;
  - Casos especiais.