SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 6

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

15 de março de 2018

Aula Passada (cont.)

Dada uma ED

$$M(t,y)\,\mathrm{d}t + N(t,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

como encontrar uma integral primeira $V(t,y)$?

Primeiro precisamos determinar se a ED é exata.

Teorema: Suponhamos que M, M_y, M_t, N, N_y, N_t sejam contínuas num retângulo

$$\mathcal{R} = \left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : \; a < t < b, \; c < y < d\right\}.$$

Então a ED é uma ED exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

para todo $(t,y) \in \mathcal{R}$. (Prova por Teorema de Schwarz).

Aula Passada

EDs Não Lineares

$$M(t,y) + N(t,y)\,y' = 0 \quad \text{ou} \quad M(t,y)\,\mathrm{d}t + N(t,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

- introdução;
- EDs com *variáveis separáveis*;
- EDs *exatas*: se $M_y(t,y) = N_t(t,y)$ (Teorema), encontrar $V(t,y)$ tal que

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial t} = M(t,y), \qquad \frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = N(t,y).$$

EDs Exatas (cont.)

Então, *se a ED é exata*, podemos determinar $V(t,y)$ atráves do seguinte procedimento:

Como $\frac{\partial}{\partial t}V(t,y) = M(t,y)$ e $\frac{\partial}{\partial y}V(t,y) = N(t,y)$, então

$$V(t,y) = \int M(t,y)\,\mathrm{d}t + h(y)$$

com $h(y)$ sendo uma função arbitrária de y. Se derivamos com relação a y,

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(t,y)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}h(y) = N(t,y),$$

e assim determinamos $h(y)$ e consequentemente $V(t,y)$.

EDs Exatas (cont.)

Exemplo: Resolva a ED $\left(t^2+y^2\right)\,dt+2\,t\,y\,dy=0$.

Solução: (na lousa)

Verificar se é ED exata. Se for, determinar $V(t,y)$ e depois igualar a uma constante para obter a solução geral da ED.

$$t^3+3\,t\,y^2=C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

Obs.: A solução nesse caso é *implícita*, então não incluímos o intervalo de t.

EDs Não Exatas

E se a ED

$$M(t,y)+N(t,y)\,y'=0$$

não é exata? Será que conseguimos *transformá-la* em uma ED exata para podermos resolver?

A ED pode ser transformada em uma ED exata se conseguimos encontrar uma função conveniente $u(t,y)$ (**fator integrante**) tal que

$$u(t,y)\,M(t,y)+u(t,y)\,N(t,y)\,y'=0\,u(t,y)=0$$

é exata, ou seja (por Teorema),

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u(t,y)\,M(t,y)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[u(t,y)\,N(t,y)\right].$$

Como calcular $u(t,y)$?

EDs Não Exatas (cont.)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u(t,y)\,M(t,y)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[u(t,y)\,N(t,y)\right]$$

$$\Rightarrow \quad u_y\,M+u\,M_y=u_t\,N+u\,N_t$$

Como resolver para $u(t,y)$? Equação é complicada de resolver...

Consideramos classe de EDs

$$M(t,y)+N(t,y)\,y'=0$$

cujo fator integrante $u(t,y)$ *pode* ser encontrado.

Vamos assumir que $u(t,y)$ é função *apenas* de t **ou** *apenas* de y.

EDs Não Exatas (cont.)

- Se $u(t,y)=u(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u(t)\,M(t,y)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[u(t)\,N(t,y)\right]$$

$$\Rightarrow \quad u(t)\,M_y(t,y)=u'(t)\,N(t,y)+u(t)\,N_t(t,y)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u'(t)=\frac{M_y(t,y)-N_t(t,y)}{N(t,y)}u(t)}$$

- Se $u(t,y)=u(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u(y)\,M(t,y)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[u(y)\,N(t,y)\right]$$

$$\Rightarrow \quad u'(y)\,M(t,y)+u(y)\,M_y(t,y)=u(y)\,N_t(t,y)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u'(y)=\frac{N_t(t,y)-M_y(t,y)}{M(t,y)}u(y)}$$

EDs Não Exatas (cont.)

Para

$$\boxed{u'(t) = \frac{M_y(t,y) - N_t(t,y)}{N(t,y)} u(t)}$$

ter solução, $\dfrac{M_y(t,y) - N_t(t,y)}{N(t,y)}$ deve ser função *apenas* de t.

Analogamente, para que

$$\boxed{u'(y) = \frac{N_t(t,y) - M_y(t,y)}{M(t,y)} u(y)}$$

tenha solução, $\dfrac{N_t(t,y) - M_y(t,y)}{M(t,y)}$ deve ser função *apenas* de y.

EDs Não Exatas (cont.)

Exemplo: Determine a solução da ED

$$2\,e^t y - y^2 + \left(e^t - 2\,y\right) y' = 0.$$

Solução: Vamos primeiro verificar se ela é exata.
Sendo $M(t,y) = 2\,e^t y - y^2$ e $N(t,y) = e^t - 2\,y$, então

$M_y(t,y) = 2\,e^t - 2\,y$; $\quad N_t(t,y) = e^t \quad (M_y \neq N_t \Rightarrow$ *Não exata*$)$

Como $M_y(t,y) - N_t(t,y) = e^t - 2\,y$, assumimos que o fator integrante é função só de t: $u(t)$. (Por quê?)
Obtemos então

$$u'(t) = \frac{M_y(t,y) - N_t(t,y)}{N(t,y)} u(t) \;\Rightarrow\; u'(t) = \frac{e^t - 2\,y}{e^t - 2\,y} u(t) = u(t)$$

$$\cdots \quad \Rightarrow \quad u(t) = e^t.$$

Assim, vamos trabalhar com a *nova* ED equivalente

$$2\,e^{2t} y - e^t y^2 + \left(e^{2t} - 2\,e^t y\right) y' = 0.$$