SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 7

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

20 de março de 2018

Aula Passada

- Se $u(t,y) = u(t)$:
$$\frac{\partial}{\partial y}[u(t)\,M(t,y)] = \frac{\partial}{\partial t}[u(t)\,N(t,y)]$$
$$\Rightarrow \quad u(t)\,M_y(t,y) = u'(t)\,N(t,y) + u(t)\,N_t(t,y)$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{u'(t) = \frac{M_y(t,y) - N_t(t,y)}{N(t,y)}u(t)}$$
- Se $u(t,y) = u(y)$:
$$\frac{\partial}{\partial y}[u(y)\,M(t,y)] = \frac{\partial}{\partial t}[u(y)\,N(t,y)]$$
$$\Rightarrow \quad u'(y)\,M(t,y) + u(y)\,M_y(t,y) = u(y)\,N_t(t,y)$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{u'(y) = \frac{N_t(t,y) - M_y(t,y)}{M(t,y)}u(y)}$$

Aula Passada

EDs Não Lineares

$$M(t,y) + N(t,y)\,y' = 0 \quad \text{ou} \quad M(t,y)\,\mathrm{d}t + N(t,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

- EDs *não exatas*: encontrar $u(t,y) \not\equiv 0$ tal que
$$u\,(t,y)\,M\,(t,y) + u\,(t,y)\,N\,(t,y)\,y' = 0$$
seja exata.
- Formas do fator integrante $u(t,y)$:
  - $u(t,y) = u(t)$;
  - $u(t,y) = u(y)$;
  - $\cdots$

Aula Passada (cont.)

Exemplo: Determine a solução da ED
$$2\,e^t\,y - y^2 + \left(e^t - 2\,y\right)y' = 0.$$

Solução:
$$M(t,y) = 2\,e^t\,y - y^2; \quad N(t,y) = e^t - 2\,y;$$
$$M_y(t,y) = 2\,e^t - 2\,y; \quad N_t(t,y) = e^t$$
$$(M_y \neq N_t \Rightarrow \textit{Não exata})$$

$$u'(t) = \frac{M_y(t,y) - N_t(t,y)}{N(t,y)}u(t) \;\Rightarrow\; u'(t) = \frac{e^t - 2\,y}{e^t - 2\,y}u(t) = u(t)$$
$$\cdots \quad \Rightarrow \quad u(t) = e^t.$$

ED equivalente:
$$2\,e^{2t}\,y - e^t\,y^2 + \left(e^{2t} - 2\,e^t\,y\right)y' = 0.$$

EDs Não Exatas (cont.)

Exemplo (cont.):

$$2\,e^{2t}y - e^t y^2 + (e^{2t} - 2\,e^t y)\,y' = 0.$$

Verificando se ela é exata:

$$M^*(t,y) = 2\,e^{2t}y - e^t y^2; \quad N^*(t,y) = e^{2t} - 2\,e^t y$$

$$\Rightarrow \quad M^*_y(t,y) = 2\,e^{2t} - 2\,e^t y; \quad N^*_t(t,y) = 2\,e^{2t} - 2\,e^t y.$$

Como $M^*_y(t,y) = N^*_t(t,y)$, então a ED é exata. Vamos encontrar $V(t,y)$.

$$V(t,y) = \int M^*(t,y)\,dt = \int \left(2\,e^{2t}y - e^t y^2\right)\,dt =$$

$$= e^{2t}y - e^t y^2 + h(y)$$

$$\Rightarrow \quad V_y(t,y) = e^{2t} - 2\,e^t y + h'(y) = N^*(t,y) = e^{2t} - 2\,e^t y$$

$$\Rightarrow \quad h'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(y) = K$$

$$\Rightarrow V(t,y) = e^{2t}y - e^t y^2 + K = C_1 \;\therefore\; \boxed{e^{2t}y - e^t y^2 = C, \; C \in \mathbb{R}}$$

EDs Homogêneas

Uma equação diferencial na forma

$$M(t,y) + N(t,y)\,y' = 0$$

é dita ser **homogênea** (de primeira ordem) se M e N são *funções homogêneas de mesmo grau*, isto é, para qualquer $\lambda > 0$,

$$M(\lambda t, \lambda y) = \lambda^s M(t,y) \quad \text{e} \quad N(\lambda t, \lambda y) = \lambda^s N(t,y).$$

Neste caso M e N são funções homogêneas *de grau s*.

Exemplo: A ED

$$(2\,t + y)\,y - t^2 y' = 0$$

é homogênea. (Por quê?)

EDs Não Exatas (cont.)

Exemplo: Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} t\,y^3 - e^t y\,y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Solução: (na lousa)

$$y(t) = \frac{e^t}{t+1}, \quad t > -1.$$

Note que a ED *não é exata* (por quê?), mas é *separável* (por quê?).

EDs Homogêneas (cont.)

Como resolver uma ED homogênea

$$M(t,y) + N(t,y)\,y' = 0?$$

Para resolver uma ED homogênea, vamos *transformá-la* em uma ED com *variáveis separáveis*.

Fazemos a *mudança de variável* $y = t\,u$ onde $u = u(t)$.

Como

$$y' = \frac{dy}{dt} = u + t\frac{du}{dt} = u + t\,u'$$

e

$$M(t,y) = M(t,t\,u) = t^s M(1,u),$$
$$N(t,y) = N(t,t\,u) = t^s N(1,u),$$

substituímos na ED e a transformamos em uma ED com variáveis separáveis dependente de t e u.

Resolvendo para u, obtemos y.

EDs Homogêneas (cont.)

Exemplo: Resolver a ED

$$(2t + y)\,y - t^2\,y' = 0.$$

Solução: Já mostramos que a ED é homogênea. Vamos determinar $y(t)$.
Usando $y = t\,u$, $u = u(t)$, e com $y' = u + t\,u'$, temos

$$(2t + t\,u)\,t\,u - t^2\left(u + t\,u'\right) = 0$$

$$(2 + u)\,u - \left(u + t\,u'\right) = 0, \quad t \neq 0$$

$$u^2 + u = t\,u' \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{u + u^2} = \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad u \notin \{0, -1\}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u + u^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{u}{1+u}\right| = \ln|t| + C$$

$$\cdots \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{t+y}\right| = \ln|t| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

EDs Homogêneas (cont.)

Exemplo: Resolver

$$\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right) + 3\,x\,y\,y' = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

Solução: (na lousa)

$$3\ln\left|4\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right| = -8\ln|x|$$