

# SME0340

## Equações Diferenciais Ordinárias

### Aula 9

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira  
marialuisa @ icmc . usp . br  
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

3 de abril de 2018



## EDs de Segunda Ordem



Forma geral:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y'' = f(t, y, y')$$

com  $f$  sendo uma função definida em um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$ .

EDs de segunda ordem surgem com frequência em:

- ▶ problemas de Física (2a. Lei de Newton);
- ▶ problemas de Eletricidade (Leis de Kirchhoff).

Focaremos na solução de EDs **lineares de segunda ordem** e depois faremos uma generalização para EDs lineares de ordem  $n$ .

## Aula Passada



### EDs de Primeira Ordem

$$y' + a(t)y = b(t)$$

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0$$

- ▶ Aplicações de EDs de ordem 1 a problemas;
- ▶ Exemplos.

## EDs Lineares de Ordem 2



Forma geral:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = g(t),$$

com  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $g(t)$  funções contínuas em um intervalo  $I$ .

Quando  $g(t) \equiv 0$ , temos uma ED *linear homogênea*; senão, a ED é *não homogênea*.

**Teorema (Existência e Unicidade):** Se as funções  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $g(t)$  forem contínuas num intervalo  $I$ , então dados  $t_0 \in I$  e  $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ , o PVI

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$$

possui uma única solução  $y = y(t)$ , a qual está definida para todo  $t \in I$ .

## EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)



Vamos começar analisando as EDs lineares **homogêneas**.

Para a ED linear de segunda ordem

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0,$$

se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são duas soluções da ED *convenientemente escolhidas*, então podemos escrever a **solução geral** da ED linear de segunda ordem homogênea como

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in I.$$

**Princípio da Superposição:** Se  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$  são soluções da ED linear homogênea, e se  $c_1, c_2$  são constantes reais, então a função  $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$  também é solução.

## EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)



**Teorema:** Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções de

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

tais que

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \neq 0$$

para todo  $t \in I$ . Então toda solução da ED é dada por

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad t \in I.$$

Observe que, se tomarmos um  $t_0 \in I$  qualquer, e sendo  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = y'(t_0)$ , devemos ter

$$\begin{cases} C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(t_0) + C_2 y_2'(t_0) = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Para o sistema ter solução,  $\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0$ .

## EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)



**Exemplo:** A ED

$$t^2 y'' - t y' + y = 0, \quad t > 0$$

possui  $y_1(t) = t$  e  $y_2(t) = t \ln(t)$  como soluções (MOSTRE!)

Então podemos escrever a *solução (geral)* da ED como

$$y(t) = C_1 t + C_2 t \ln(t), \quad t > 0, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(MOSTRE!)

Como sabemos que essas soluções foram *apropriadamente escolhidas* para escrever a solução geral?

## EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)



Definimos como o **Wronskiano** de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Então, a *solução geral* da ED linear homogênea é dada por

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

quando  $W[y_1, y_2] \neq 0$ . Isto ocorre quando as funções  $y_1, y_2$  são soluções *linearmente independentes* da ED.

**Observação 1:** Duas funções  $f_1(t), f_2(t)$  não necessariamente possuem  $W[f_1, f_2] \neq 0$  para  $t \in I$ , exceto se forem soluções da ED linear homogênea.

**Exemplo:**  $f_1(t) = t$ ,  $f_2(t) = t^2$  para  $t \in \mathbb{R}$ .

**Observação 2:**  $W(t) = 0$  não implica que as funções são linearmente dependentes.