

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 10

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

5 de abril de 2018



Aula Passada (cont.)



Definimos como o **Wronskiano** de $y_1(t)$ e $y_2(t)$

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Então, a *solução geral* da ED linear homogênea é dada por

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

quando $W[y_1, y_2] \neq 0$. Isto ocorre quando as funções y_1, y_2 são soluções *linearmente independentes* da ED.

Observação 1: Duas funções $f_1(t), f_2(t)$ não necessariamente possuem $W[f_1, f_2] \neq 0$ para $t \in I$, exceto se forem soluções da ED linear homogênea.

Exemplo: $f_1(t) = t, f_2(t) = t^2$ para $t \in \mathbb{R}$.

Observação 2: $W(t) = 0$ não implica que as funções são linearmente dependentes.

Aula Passada



EDs Lineares de Segunda Ordem

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = g(t),$$

$a(t), b(t), g(t)$ funções contínuas para $t \in I$.

- ▶ Introdução;
- ▶ Definições;
- ▶ Teoremas.
- ▶ EDs de Segunda Ordem Lineares Homogêneas:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)



Teorema: Sejam $y_1(t), y_2(t), t \in I$, soluções da ED linear homogênea e $t_0 \in I$ fixado. Seja $W(t)$ o wronskiano de y_1 e y_2 . Então

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}, \quad \forall t \in I.$$

Em particular, como a função exponencial nunca se anula, segue-se que se $W(t_0) \neq 0$, então $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Observação: O intervalo I é o intervalo onde as funções $a(t)$ e $b(t)$ da ED linear homogênea

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

são contínuas.

EDs Lineares de Ordem 2 (cont.)



Teorema: Suponhamos que $a(t)$ e $b(t)$ sejam funções contínuas no intervalo I . Então existem duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da equação

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

tais que $W[y_1, y_2] \neq 0$ para todo $t \in I$. Além disso, a solução geral desta equação é dada por $C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$, em que C_1, C_2 são constantes arbitrárias.

Isso nos garante que o espaço das soluções da ED é um espaço vetorial de dimensão 2.

Veremos em seguida métodos para determinar as soluções LI y_1, y_2 da ED linear homogênea:

- ▶ **Método da Redução de Ordem;**
- ▶ **Método Geral** para EDs com Coef. Constantes.

Redução de Ordem (cont.)



Sendo $y_2(t) = v(t)y_1(t)$, então temos:

$$y_2'(t) = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t);$$

$$y_2''(t) = v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t);$$

e assim, escrevendo $v = v(t)$ e $y_1 = y_1(t)$,

$$\begin{aligned} & [v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''] + \\ & + a(t)[v'y_1 + vy_1'] + b(t)[vy_1] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & v[y_1'' + a(t)y_1' + b(t)y_1] + \\ & + v'[2y_1' + a(t)y_1] + v''y_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_1 v'' + [2y_1' + a(t)y_1]v' = 0.$$

Substituindo $z(t) = v'(t)$,

$$y_1(t)z' + [2y_1'(t) + a(t)y_1(t)]z = 0. \quad (\text{ordem 1})$$

Método da Redução de Ordem



O **Método da Redução de Ordem** supõe que conhecemos uma solução $y_1(t)$ da ED e queremos achar uma outra solução $y_2(t)$ tal que a solução geral da ED é escrita como

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in I.$$

Se $y_1(t)$ é solução da ED linear

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0,$$

então $Cy_1(t)$, com C sendo uma constante real, também é, mas não é L.I. de $y_1(t)$.

Assim, para obter uma segunda solução $y_2(t)$ que seja *linearmente independente* da solução $y_1(t)$, deve-se assumir que

$$y_2(t) = v(t)y_1(t), \quad \text{com } v(t) \text{ não constante.}$$

Obs.: $W[y_1, y_2](t) = v'(t)y_1^2(t)$.

Redução de Ordem (cont.)



Resumindo:

Conhecendo uma solução $y_1(t)$ da ED

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0,$$

para determinar uma segunda solução $y_2(t)$, LI de $y_1(t)$,

1. Definir $y_2(t) = v(t)y_1(t)$ com $v(t)$ não constante;
2. Substituir $y_2(t)$, $y_2'(t)$ e $y_2''(t)$ na EDO e simplificar;
3. Assumir $z(t) = v'(t)$ e substituir na EDO;
4. Resolver EDO de ordem 1 para $z(t)$;
5. Calcular *um* $v(t) = \int z(t) dt$;
6. Calcular *uma* solução $y_2(t)$.

A *solução geral* da EDO será dada por

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in I.$$

Exemplo: Determine uma outra solução de

$$ty'' - 2y' = 0$$

sabendo-se que $y_1(t) = 1$, $t \neq 0$.

Solução: Para $t \neq 0$:

Verificando se $y_1(t) = 1$ é solução:

$$y_1(t) = 1 \Rightarrow y_1'(t) = y_1''(t) = 0$$

$$\Rightarrow t(0) - 2(0) = 0 \quad \therefore y_1 \text{ é solução}$$

Então: $y_2(t) = v(t)y_1(t) = v(t)$, $v \neq c$

$$y_2'(t) = v'(t), \quad y_2''(t) = v''(t)$$

$$tv'' - 2v' = 0 \Rightarrow z(t) = v'(t)$$

$$tz' - 2z = 0 \cdots z(t) = K_1 t^2, \quad t \neq 0 \cdots v(t) = K_1 \frac{t^3}{3} + K_2, \quad t \neq 0$$

(basta um $v(t)$): $v(t) = t^3 = y_2(t)$, $t \neq 0$.