

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 11

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa@icmc.usp.br
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

10 de abril de 2018



Aula Anterior (cont.)



Método da Redução de Ordem (MRO):

Conhecendo uma solução $y_1(t)$ da ED

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0,$$

para determinar uma segunda solução $y_2(t)$, LI de $y_1(t)$,

1. Definir $y_2(t) = v(t)y_1(t)$ com $v(t)$ não constante;
2. Substituir $y_2(t)$, $y_2'(t)$ e $y_2''(t)$ na EDO e simplificar;
3. Assumir $z(t) = v'(t)$ e substituir na EDO;
4. Resolver EDO de ordem 1 para $z(t)$;
5. Calcular *um* $v(t) = \int z(t) dt$;
6. Calcular *uma* solução $y_2(t)$.

A *solução geral* da EDO será dada por

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in I.$$

Aula Anterior



EDs de Segunda Ordem

- ▶ Introdução;
- ▶ Definições;
- ▶ Teoremas;
- ▶ EDs Lineares Homogêneas:
Método da Redução de Ordem;

Exercício: MRO



Determine a solução geral de

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

com $y_1(t) = e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Solução:

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Método Geral



Vimos *Método da Redução de Ordem* para determinar soluções LI y_1, y_2 da ED linear homogênea

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0.$$

Vamos assumir agora que $a(t) = a$ e $b(t) = b$, com a e b sendo constantes, independentes de t :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

O **Método Geral** para EDs com Coeficientes Constantes (que *não está* em livros ou apostila) consiste em reescrever a ED de segunda ordem como um *conjunto* de EDs de primeira ordem.

Método Geral (cont.)



Exemplo: Determine a solução geral de

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Solução: Determinemos, primeiro, como decompor a ED em duas EDs de primeira ordem.

Sendo

$$y'' - 3y' + 2y = y'' - y' - 2y' + (-1)(-2)y = 0,$$

então

$$\frac{d}{dt}(y' - 2y) - (y' - 2y) = 0$$

Método Geral (cont.)



A ideia do **Método Geral** é decompor a ED linear de segunda ordem em duas EDs de primeira ordem, tal que, ao resolver o conjunto de equações, obtém-se a solução geral da EDO de segunda ordem.

Como fazer isso?

Se a, b constantes em

$$y'' + ay' + by = 0,$$

será que conseguimos achar constantes r_1, r_2 tal que escrevemos a ED como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} - r_1 y \right) - r_2 \left(\frac{dy}{dt} - r_1 y \right) = 0?$$

Se for possível, separamos em duas EDs lineares de ordem 1.

Método Geral (cont.)



Exemplo (cont.):

$$\frac{d}{dt}(y' - 2y) - (y' - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z(t) = y' - 2y & (I) \\ z' - z = 0 & (II) \end{cases}$$

Resolvendo (II):

$$z' - z = 0 \Rightarrow (\text{na lousa}) \Rightarrow z(t) = Ce^t, C, t \in \mathbb{R}.$$

Substituindo em (I):

$$y' - 2y = Ce^t \Rightarrow (\text{na lousa})$$

$$\Rightarrow y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Método Geral (cont.)



Exemplo: Determine a solução geral de

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Solução: Determinemos, inicialmente, como decompor a ED.

Sendo

$$y'' - 4y' + 4y = y'' - 2y' - 2y' + (-2)(-2)y = 0,$$

então

$$\frac{d}{dt}(y' - 2y) - 2(y' - 2y) = 0$$

Método Geral (cont.)



Vimos nos dois exemplos anteriores como decompor as EDs de segunda ordem

$$y'' + ay' + by = 0$$

quando os valores de r_1 e r_2 são reais, isto é, quando podemos decompor em duas EDs de primeira ordem com coeficientes constantes *reais*.

E se os valores de r_1 e r_2 são *complexos*?

Se os valores de a e b na ED de segunda ordem são reais, então a solução geral deve ser a combinação linear de soluções *reais* LI. Como obtê-las?

Vamos primeiro fazer uma **revisão de números complexos**, suas propriedades e ver algumas relações que serão úteis.

Método Geral (cont.)



Exemplo (cont.):

$$\frac{d}{dt}(y' - 2y) - 2(y' - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z(t) = y' - 2y & (I) \\ z' - 2z = 0 & (II) \end{cases}$$

Resolvendo (II):

$$z' - 2z = 0 \Rightarrow \text{(na lousa)} \Rightarrow z(t) = Ce^{2t}, C, t \in \mathbb{R}.$$

Substituindo em (I):

$$y' - 2y = Ce^{2t} \Rightarrow \text{(na lousa)}$$

$$\Rightarrow y(t) = C_1 te^{2t} + C_2 e^{2t}, C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Números Complexos



Revisão de Números Complexos: conjunto \mathbb{C}

Sendo $i = \sqrt{-1}$, para um número $z \in \mathbb{C}$ temos

$$z = a + ib \in \mathbb{C} \quad a = \text{Re}(z), \quad b = \text{Im}(z), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Propriedades: Para $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

- ▶ $z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + i(b \pm d)$;
- ▶ $\overline{z_1} = a - ib$;
- ▶ $z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$;
- ▶ $|z_1| = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- ▶ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$.

Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$.

$$e^{a \pm ib} = e^a e^{\pm ib} = e^a [\cos(b) \pm i\text{sen}(b)].$$

Método Geral (cont.)



Proposição: Se $z(t) = u(t) + iv(t)$ é uma solução a valores complexos da ED linear homogênea

$$y'' + ay' + by = 0,$$

então $u(t)$ e $v(t)$ são soluções reais da ED homogênea.

Quando resolvemos uma ED linear homogênea de segunda ordem com r_1, r_2 complexos, encontraremos uma *solução geral complexa* para a ED, mas desejamos uma *solução geral real*.

Para obtê-la, usamos a Proposição: basta *desenvolver* a solução complexa para a forma $u(t) + iv(t)$ e tomar $y_1(t) = u(t)$ e $y_2(t) = v(t)$ como as duas soluções reais LI da ED linear homogênea:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad y(t) \in \mathbb{R}.$$

Método Geral (cont.)



Exemplo: Determine a solução geral (real) de

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$