SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 13

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

17 de abril de 2018

Afirmação

A partir de agora, podemos usar a seguinte afirmação:

Afirmação A:

Considerando a ED $\left[\frac{dw}{dt} + r\,w = g(t)\right]$ com $w = w(t)$, e sendo r uma constante (real ou complexa), podemos reescrever a ED como

$$\frac{d}{dt}\left[w(t)\,e^{rt}\right] = g(t)\,e^{rt}$$

após multiplicar por e^{rt}, pois $\frac{d}{dt}\left(e^{rt}\right) = r\,e^{rt}$.

Aula Passada

EDs de Segunda Ordem

- EDs Lineares Homogêneas:
  Método Geral para Coeficientes Constantes
  $$y'' + a\,y' + b\,y = 0$$
- Exemplos;
- **Afirmação**.

ED Não Homogênea

Vamos considerar agora

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = g(t),$$

com $a(t), b(t), g(t)$ funções contínuas em um intervalo I e $g(t) \neq 0$ (isto é, a ED é **não homogênea**).

Teorema: Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções linearmente independentes da equação homogênea correspondente

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0,$$

e seja $\varphi(t)$ a solução particular da ED não homogênea. Então toda solução $y(t)$ da **ED não homogênea** é da forma

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = C_1\,y_1(t) + C_2\,y_2(t) + \varphi(t)$$

para alguma escolha conveniente de C_1 e C_2.

ED Não Homogênea (cont.)

Exemplo: Uma equação diferencial linear não homogênea de segunda ordem possui as seguintes soluções para $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_1(t) = 3 + 2t + e^{3t},$$
$$\varphi_2(t) = 2t - 5\,\text{sen}(t) + 3,$$
$$\varphi_3(t) = 3 + \text{sen}(t) - 2e^{3t} + 2t.$$

Determine a solução geral $y(t)$ desta equação.

Solução:

$$y_P(t) = 3 + 2t, \quad y_H(t) = C_1 e^{3t} + C_2\,\text{sen}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore \quad y(t) = y_P(t) + y_H(t) = 3 + 2t + C_1 e^{3t} + C_2\,\text{sen}(t), \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

MCD

Objetivo: determinar $y_P(t)$ (solução particular) de

$$y'' + ay' + by = g(t),$$

com a, b constantes reais e $g(t)$ do tipo

- polinomial (forma t^n);
- exponencial (forma $e^{\alpha t}$);
- trigonométrico (formas $\text{sen}(\beta t)$ ou $\cos(\beta t)$);
- produto dos tipos anteriores (*misto*);
- combinação linear.

Procedimento: *Observar, Deduzir, Calcular*.

ED Não Homogênea (cont.)

Para determinar a *solução geral* da ED não homogênea de segunda ordem, determinamos a *solução geral* $y_H(t)$ da ED homogênea correspondente e *uma solução particular* $y_P(t)$ da ED não homogênea.

Já vimos métodos para determinar a solução geral $y_H(t)$.

Vamos ver métodos para determinar $y_P(t)$:

- Método dos Coeficientes a Determinar (MCD);
- Método de Variação dos Parâmetros (MVP).

MCD (cont.)

Para ED não homogênea

$$y'' + ay' + by = g(t),$$

Observar: observar o tipo de $g(t)$, se é *polinomial*, *exponencial*, *trigonométrico* ou *misto* (produto). Combinação linear será discutida mais adiante.

Deduzir: baseado no tipo observado de $g(t)$, uma forma geral da solução $y_P(t)$ será deduzida (ou a ED será reescrita e o processo reiniciado).

Calcular: a forma geral de $y_P(t)$ deduzida anteriormente deve possuir *coeficientes* ou *funções* desconhecidas. Como $y_P(t)$ deve ser solução da ED não homogênea, substituir na ED e resolver para os indeterminados.

MCD (cont.)

Caso Polinomial: $y'' + a\,y' + b\,y = t^n$.

Observar: $g(t) = t^n$ é do tipo *polinomial de grau n*.

Deduzir: $y_P(t)$ depende da *menor ordem da derivada de y* presente na ED (y é derivada de ordem zero).

Então

- Se o coeficiente que multiplica y é não nulo,
$$y_P(t) = a_n\,t^n + a_{n-1}\,t^{n-1} + \ldots + a_1\,t + a_0 \quad \text{(grau } n\text{)}$$
- Se a menor ordem da derivada é um,
$$y_P(t) = a_n\,t^{n+1} + a_{n-1}\,t^n + \ldots + a_1\,t^2 + a_0\,t \quad \text{(grau } n+1\text{)}$$
- Se a menor ordem da derivada é dois,
$$y_P(t) = a_n\,t^{n+2} + \ldots + a_1\,t^3 + a_0\,t^2 \quad \text{(grau } n+2\text{)}$$

Calcular: calcular os coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

MCD (cont.)

Caso Exponencial: $y'' + a\,y' + b\,y = e^{\alpha t}$.

Observar: $g(t) = e^{\alpha t}$ é do tipo *exponencial*.

Deduzir: $y_P(t)$ será da forma
$$y_P(t) = v(t)\,e^{\alpha t}.$$

Calcular: determinar a função $v(t)$.

Quando substituímos $y_P(t)$ na ED e simplificamos, obtemos uma ED não homogênea em $v(t)$, com o novo $g(t)$ sendo do tipo polinomial. Então *reiniciamos* o processo do método para o caso *polinomial*.

MCD (cont.)

Exemplo: Determine a solução particular $y_P(t)$ de
$$y'' - 3\,y' + 2\,y = t^2.$$

Solução:
Observar: $g(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, tipo poli de grau 2.
Deduzir: Menor ordem da derivada de y é zero, então
$$y_P(t) = a_2\,t^2 + a_1\,t + a_0, \;\; t \in \mathbb{R}.$$
Calcular: Determinar a_0, a_1, a_2: para $t \in \mathbb{R}$,
$$y_P'(t) = 2\,a_2\,t + a_1; \quad y_P''(t) = 2\,a_2;$$
$$(2\,a_2) - 3\,(2\,a_2\,t + a_1) + 2\,\big(a_2\,t^2 + a_1\,t + a_0\big) = t^2 + 0\,t + 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\,a_2 = 1 \\ 2\,a_1 - 6\,a_2 = 0 \\ 2\,a_0 - 3\,a_1 + 2\,a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1/2 = 2/4 \\ a_1 = 3\,a_2 = 3/2 = 6/4 \\ a_0 = (3\,a_1 - 2\,a_2)/2 = 7/4 \end{cases}$$
$$\therefore \quad y_P(t) = \big(2\,t^2 + 6\,t + 7\big)/4, \quad t \in \mathbb{R}.$$

MCD (cont.)

Exemplo: Determine a solução particular $y_P(t)$ de
$$y'' - 3\,y' + 2\,y = e^{-t}.$$

Solução:
Observar: $g(t) = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, tipo exp.
Deduzir: $y_P(t) = v(t)\,e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.
Calcular: Determinar $v(t)$: para $t \in \mathbb{R}$,
$$y_P'(t) = (v' - v)\,e^{-t}; \quad y_P''(t) = (v'' - 2\,v' + v)\,e^{-t};$$
$$\big(v'' - 2\,v' + v\big)e^{-t} - 3\,\big(v' - v\big)e^{-t} + 2\,(v)\,e^{-t} = e^{-t}$$
$$\Rightarrow \quad v'' - 5\,v' + 6\,v = 1$$

O: caso poli de grau 0; **D:** menor ordem, $0 \Rightarrow v(t) = a_0, t \in \mathbb{R}$

C: $v'(t) = v''(t) = 0, t \in \mathbb{R} \Rightarrow 6(a_0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1/6 = v(t), t \in \mathbb{R}$
$$\therefore \quad y_P(t) = \frac{e^{-t}}{6}, \quad t \in \mathbb{R}$$

MCD (cont.)

Exemplo: Determine a solução particular $y_P(t)$ de

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = e^t.$$

Solução: (na lousa)

$$y_P(t) = -t\,e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

MCD (cont.)

Exemplo: Determine a solução particular $y_P(t)$ de

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = \mathrm{sen}(t).$$

Solução:
Observar: $g(t) = \mathrm{sen}(t), t \in \mathbb{R}$, é do tipo trig.
Deduzir: $\mathrm{sen}(t) = \mathrm{Im}(e^{it})$, então $y_P(t) = \mathrm{Im}(w_P(t))$ com $w_P(t)$ sendo sol. particular de

$$w'' - 3\,w' + 2\,w = e^{it}.$$

MCD (cont.)

Caso Trigonométrico: $y'' + a\,y' + b\,y = \begin{cases} \mathrm{sen}(\beta\,t) \\ \cos(\beta\,t) \end{cases}.$

Observar: $g(t)$ é do tipo *trigonométrico*.

Deduzir: depende se $g(t) = \mathrm{sen}(\beta\,t)$ ou $g(t) = \cos(\beta\,t)$:

- Se $g(t) = \mathrm{sen}(\beta\,t)$, como $g(t) = \mathrm{Im}\left(e^{i\beta t}\right)$, então $y_P(t) = \mathrm{Im}(w_P(t))$ onde $w_P(t)$ é a solução particular de
$$w'' + a\,w' + b\,w = e^{i\beta t};$$
- Se $g(t) = \cos(\beta\,t)$, como $g(t) = \mathrm{Re}\left(e^{i\beta t}\right)$, então $y_P(t) = \mathrm{Re}(w_P(t))$ onde $w_P(t)$ é a solução particular de
$$w'' + a\,w' + b\,w = e^{i\beta t};$$

Calcular: determinar $w_P(t)$ aplicando o *caso exponencial* na nova ED.