

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 14

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
 marialuisa @ icmc . usp . br
 Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

19 de abril de 2018



MCD (cont.)



Caso Trigonométrico: $y'' + ay' + by = \begin{cases} \text{sen}(\beta t) \\ \text{cos}(\beta t) \end{cases}$.

Observar: $g(t)$ é do tipo *trigonométrico*.

Deduzir: depende se $g(t) = \text{sen}(\beta t)$ ou $g(t) = \text{cos}(\beta t)$:

- ▶ Se $g(t) = \text{sen}(\beta t)$, como $g(t) = \text{Im}(e^{i\beta t})$, então $y_P(t) = \text{Im}(w_P(t))$ onde $w_P(t)$ é a solução particular de

$$w'' + aw' + bw = e^{i\beta t};$$

- ▶ Se $g(t) = \text{cos}(\beta t)$, como $g(t) = \text{Re}(e^{i\beta t})$, então $y_P(t) = \text{Re}(w_P(t))$ onde $w_P(t)$ é a solução particular de

$$w'' + aw' + bw = e^{i\beta t};$$

Calcular: determinar $w_P(t)$ aplicando o *caso exponencial* na nova ED.

Aula Passada



EDs de Segunda Ordem

- ▶ EDs Lineares Não Homogêneas:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = g(t)$$

- ▶ Teorema: $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$;
- ▶ Método dos Coeficientes a Determinar (MCD):
Observar, Deduzir, Calcular

$$y'' + ay' + by = g(t),$$

com $g(t)$ sendo *polinomial* (t^n), *exponencial* ($e^{\alpha t}$).

MCD (cont.)



Exemplo: Determine a solução particular $y_P(t)$ de $y'' - 3y' + 2y = \text{sen}(t)$.

Solução:

Observar: $g(t) = \text{sen}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é do tipo trig.

Deduzir: $\text{sen}(t) = \text{Im}(e^{it})$, então $y_P(t) = \text{Im}(w_P(t))$ com $w_P(t)$ sendo sol. particular de

$$w'' - 3w' + 2w = e^{it}.$$

Calcular: Determinar $w_P(t)$.

O: Caso exp. **D:** $w_P(t) = v(t)e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$

C: $P/t \in \mathbb{R}$:

$$w'_P(t) = (v' + iv)e^{it}; \quad w''_P(t) = (v'' + 2iv' - v)e^{it}$$

$$(v'' + 2iv' - v)e^{it} - 3(v' + iv)e^{it} + 2(v)e^{it} = e^{it}$$

$$\Rightarrow [v'' + (-3 + 2i)v' + (1 - 3i)v]e^{it} = e^{it}$$

$$\Rightarrow v'' + (-3 + 2i)v' + (1 - 3i)v = 1$$

Exemplo (cont.): $[w'' - 3w' + 2w = e^{it}; y_P(t) = \text{Im}(w_P(t))]$
 $v'' + (-3 + 2i)v' + (1 - 3i)v = 1$

O: caso poli de grau 0;

D: Menor derivada de ordem 0 $\Rightarrow v(t) = a_0, t \in \mathbb{R}$;

C: $P/t \in \mathbb{R}: v'(t) = v''(t) = 0 \Rightarrow (1 - 3i)a_0 = 1$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{1 - 3i} = \frac{1 + 3i}{10} = \frac{1}{10} + i\frac{3}{10} = v(t), t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow w_P(t) = \left(\frac{1}{10} + i\frac{3}{10} \right) e^{it}, t \in \mathbb{R}$$

$$= \left[\frac{\cos(t)}{10} - \frac{3\sin(t)}{10} \right] + i \left[\frac{\sin(t)}{10} + \frac{3\cos(t)}{10} \right]$$

$$\therefore y_P(t) = \frac{\sin(t)}{10} + \frac{3\cos(t)}{10}, t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Determine a solução particular de

$$y'' - 3y' + 2y = te^{3t}.$$

Solução: (na lousa)

$$y_P(t) = \frac{2t - 3}{4} e^{3t}, t \in \mathbb{R}.$$

Caso misto:

$$y'' + ay' + by = t^n e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{ou} \quad t^n e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Observar: Caso misto (poli, exp, trig);

Deduzir: Modificar $g(t)$ (e a ED), se *necessário*, para conter apenas caso misto com poli e exp e aplicar dedução com caso exponencial.

Exemplos:

- ▶ Se $g(t) = t^n e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, modificar a ED para

$$w'' + aw' + bw = t^n e^{(\alpha+i\beta)t}$$

e determinar $w_P(t)$ tal que $y_P(t) = \text{Im}(w_P(t))$, aplicando o caso *exponencial* (mesmo com o t^n).

- ▶ Se $g(t) = t^n e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, modificar a ED para

$$w'' + aw' + bw = t^n e^{(\alpha+i\beta)t}$$

e determinar $w_P(t)$ tal que $y_P(t) = \text{Re}(w_P(t))$, aplicando o caso *exponencial* (mesmo com o t^n).

Combinação Linear:

Aplicação do **Princípio da Superposição de Soluções** sobre a solução particular da ED:

Se $\varphi_1(t)$ é solução da equação

$$y'' + ay' + by = g_1(t)$$

e $\varphi_2(t)$ é solução da equação

$$y'' + ay' + by = g_2(t),$$

então a função $\varphi(t) = s_1 \varphi_1(t) + s_2 \varphi_2(t)$ é solução da equação

$$y'' + ay' + by = s_1 g_1(t) + s_2 g_2(t),$$

com s_1, s_2 constantes (fixas).

Exemplo: Determine a solução particular de

$$y'' - 3y' + 2y = 4t^2 + 12e^{-t} \quad (*)$$

Solução: Usando o Princípio da Superposição e sabendo, da aula 13, que a solução particular de

$$y'' - 3y' + 2y = t^2$$

é $y_{p1}(t) = (2t^2 + 6t + 7)/4$, $t \in \mathbb{R}$, e que a solução particular de

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$$

é $y_{p2}(t) = e^{-t}/6$, $t \in \mathbb{R}$, então temos que a solução particular $y_p(t)$ de (*) é dada por

$$\begin{aligned} y_p(t) &= 4y_{p1}(t) + 12y_{p2}(t) = 4 \frac{(2t^2 + 6t + 7)}{4} + 12 \frac{e^{-t}}{6} = \\ &= (2t^2 + 6t + 7) + 2e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$