SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 15

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

24 de abril de 2018

Método de Variação dos Parâmetros

Objetivo: determinar $y_P(t)$ (solução particular) de

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = g(t),$$

com $a(t), b(t), g(t)$ funções contínuas para todo t em um intervalo I.

Conhecendo-se as soluções $y_1(t)$, $y_2(t)$ LI da ED homogênea correspondente

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0,$$

podemos calcular a solução particular

$$y_P(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t),$$

com $u_1(t)$, $u_2(t)$ funções ambas *não constantes*.

Aula Passada

EDs de Segunda Ordem

- EDs Lineares Não Homogêneas:

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = g(t)$$

- Método dos Coeficientes a Determinar (MCD): *Observar, Deduzir, Calcular*

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(t),$$

com $g(t)$ sendo *trigonométrico* (sen$(\beta\,t)$ ou $\cos(\beta\,t)$), *misto* (poli,trig,exp) e *combinação linear*.

MVP (cont.)

Se $y_P(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t)$ é a solução da ED

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = g(t),$$

então:

$$y_P'(t) = u_1'\,y_1 + u_1\,y_1' + u_2'\,y_2 + u_2\,y_2'.$$

Supondo $\boxed{u_1'\,y_1 + u_2'\,y_2 = 0}$, $\quad y_P'(t) = u_1\,y_1' + u_2\,y_2'$

$$\Rightarrow \quad y_P''(t) = u_1'\,y_1' + u_1\,y_1'' + u_2'\,y_2' + u_2\,y_2''$$

$$u_1'\,y_1' + u_1\,y_1'' + u_2'\,y_2' + u_2\,y_2'' + a(t)\left[u_1\,y_1' + u_2\,y_2'\right] + \\ + b(t)\left[u_1\,y_1 + u_2\,y_2\right] = g(t)$$

$$u_1\left[y_1'' + a(t)\,y_1' + b(t)\,y_1\right] + u_2\left[y_2'' + a(t)\,y_2' + b(t)\,y_2\right] + \\ + \left[u_1'\,y_1' + u_2'\,y_2'\right] = g(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_1'\,y_1' + u_2'\,y_2' = g(t)}$$

MVP (cont.)

Então, para determinar a solução particular $y_P(t)$ de

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = g(t),$$

conhecendo duas soluções $y_1(t), y_2(t)$ LI da ED homogênea correspondente, assumimos que

$$y_P(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t)$$

e determinamos $u_1(t), u_2(t)$, ambos não constantes, tais que $u_1'(t), u_2'(t)$ são soluções de

$$\begin{cases} u_1'(t)\,y_1(t) + u_2'(t)\,y_2(t) = 0 \\ u_1'(t)\,y_1'(t) + u_2'(t)\,y_2'(t) = g(t) \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}.$$

MVP (cont.)

Exemplo: Determine a solução particular $y_P(t)$ de

$$t\,y'' - 2\,y' = 4\,t^3$$

sabendo que $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = t^3, t > 0$, são soluções da ED homogênea correspondente.

Solução: Reescrevemos a ED:

$$y'' - \frac{2}{t} y' = 4\,t^2, \quad t > 0.$$

Definimos

$$y_P(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t) = u_1 + u_2\,t^3, \quad t > 0,$$

tais que $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ são soluções de

$$\begin{cases} u_1'\,(1) + u_2'\,(t^3) = 0 \\ u_1'\,(0) + u_2'\,(3\,t^2) = 4\,t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' + t^3\,u_2' = 0 & (I) \\ 3\,t^2\,u_2' = 4\,t^2 & (II) \end{cases}$$

MVP (cont.)

Exemplo (cont.): Vamos resolver o sistema, para $t > 0$:

$$\begin{cases} u_1' + t^3\,u_2' = 0 & (I) \\ 3\,t^2\,u_2' = 4\,t^2 & (II) \end{cases}$$

$$(II): \quad u_2'(t) = 4/3, \ t > 0;$$

$$(I): \quad u_1'(t) = -t^3\,u_2'(t) = -4\,t^3/3, \ t > 0$$

$$\Downarrow$$

$$u_1(t) = \int u_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(-4\,t^3/3\right)\mathrm{d}t = -\frac{t^4}{3} \ (+K_1), \ t > 0$$

$$u_2(t) = \int u_2'(t)\,\mathrm{d}t = \int (4/3)\,\mathrm{d}t = \frac{4t}{3} \ (+K_2), \ t > 0$$

$$\therefore \quad y_P(t) = u_1(t) + u_2(t)\,t^3 = -\frac{t^4}{3} + \frac{4\,t^4}{3} = t^4, \ t > 0.$$

MVP (cont.)

Exemplo: Determinar a solução particular $y_P(t)$ de

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = \mathrm{e}^t$$

sabendo que $y_1(t) = \mathrm{e}^t$, $y_2(t) = \mathrm{e}^{2\,t}$, $t \in \mathbb{R}$, são soluções da ED homogênea correspondente.