

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 19

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

17 de maio de 2018



Sistemas Homogêneos (cont.)



Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes

Vamos determinar a solução geral do sistema

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x}$$

onde A é uma matriz constante.

Se A é uma matriz diagonal, isto é, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m-1,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{mm} \end{bmatrix}$$

com a_{ij} constantes reais, qual a solução geral

$$\vec{x}(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_m(t)]^T?$$

Aula Passada



Sistemas de EDs

- ▶ Introdução;
- ▶ Definições, Teoremas;
- ▶ Transformação de EDs homogêneas de ordem m para sistemas de EDs;
- ▶ Sistemas Lineares:
$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t) \vec{x}(t) + \vec{g}(t)$$
- ▶ Sistemas Lineares Homogêneos.

Sistemas Homogêneos (cont.)



O sistema *diagonal*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

possui solução geral

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{a_{11}t} \\ \vdots \\ c_m e^{a_{mm}t} \end{bmatrix}, \quad c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então, para um sistema linear homogêneo com A sendo uma matriz constante qualquer, se conseguirmos transformar o sistema para um sistema *equivalente diagonal*, saberemos resolvê-lo. **Como?**

Sistemas Homogêneos (cont.)



Como encontrar um *sistema equivalente diagonal* de

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x},$$

com A sendo uma matriz constante qualquer?

Usaremos **diagonalização de matrizes**.

Toda matriz A *diagonalizável* possui uma matriz diagonal B *similar* que pode ser escrita na forma

$$B = P^{-1}AP.$$

Os elementos da diagonal de B são os *autovalores* de A e as colunas de P são *autovetores correspondentes* de A , tais que $A\vec{p}_j = b_{jj}\vec{p}_j$, com \vec{p}_j sendo a j -ésima coluna de P .

Como calcular os autovalores e autovetores correspondentes de A ?

Autovalores e Autovetores (cont.)



Exemplo: Determine os autovalores e autovetores correspondentes de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução: (na lousa)

$$\lambda_1 = 4, \quad \vec{v}_{\lambda_1} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \vec{v}_{\lambda_2} = b \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Autovalores e Autovetores



Para uma matriz A , os valores de λ que satisfazem a relação

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

são chamados de *autovalores* de A , e os vetores \vec{v} , com pelo menos um $\vec{v} \neq \vec{0}$, são os *autovetores correspondentes*.

Assim,

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} = \lambda I\vec{v}, \quad I: \text{matriz identidade}$$

$$\Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ só possui solução *não nula* quando $\det(A - \lambda I) = 0$. (**Por quê?**) Dessa equação tiramos os valores de λ possíveis. Então, para cada valor de λ , determinamos os valores de \vec{v} correspondentes.

Sistemas Homogêneos (cont.)



Como usar autovalores e autovetores correspondentes para resolver sistemas homogêneos

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

com matriz A constante?

Depende de três casos, para os autovalores:

- ▶ reais;
- ▶ complexos;
- ▶ com multiplicidade (algébrica) k .

O conjunto de m soluções $\vec{x}^j(t)$, $j = 1, \dots, m$ deve ser LI, e a solução geral (real) será

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}^1(t) + \dots + c_m \vec{x}^m(t), \quad t, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}.$$

Para autovalores **reais**, vamos supor, inicialmente, que todos os autovalores são *diferentes*, isto é, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_m$ e possuem autovetores correspondentes (LI) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$.

Então cada solução para o sistema é da forma

$$\vec{x}^j(t) = e^{\lambda_j t} \vec{v}_j, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Determine a solução geral $\vec{x}(t)$ de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Solução: Usando o exemplo anterior, com $a, c \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = 4$, $\vec{v}_1 = a[1 \ 1]^T$, $\lambda_2 = 1$, $\vec{v}_2 = c[1 \ -2]^T$, temos

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{4t} + c_2 e^t \\ c_1 e^{4t} - 2c_2 e^t \end{bmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$