SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 21

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

24 de maio de 2018

Aulas Passadas

Sistemas de EDs

- Sistemas Lineares Homogêneos:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$$

- Autovalores λ e autovetores corresp. $\vec{v}$;
- Autovalores reais (individuais):

$$\vec{x}^{\,j}(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j$$

- Autovalores complexos (pares):

$$\vec{z}^{\,1}(t) = \overline{\vec{z}^{\,2}(t)} = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = \vec{u}^{\,R}(t) + i\,\vec{u}^{\,I}(t), \quad \vec{z}^{\,1}(t) \in \mathbb{C}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{x}^{\,1}(t) = \vec{u}^{\,R}(t) \in \mathbb{R}, \quad \vec{x}^{\,2}(t) = \vec{u}^{\,I}(t) \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Vamos supor que há autovalores **repetidos**, com **multiplicidade (algébrica) k**, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \lambda$. Sabemos que precisamos encontrar k soluções LI relativas aos k autovalores repetidos λ.

As soluções serão da forma geral

$$\vec{x}^{\,j}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{v}_j(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

com a estrutura de $\vec{v}_j(t)$ dependendo do número de autovetores LI correspondentes aos autovalores λ (**multiplicidade geométrica**).

Se a multiplicidade geométrica é igual à multiplicidade algébrica (o número de autovetores LI correspondentes é igual a k), então cada $\vec{v}_j(t)$ será um autovetor correspondente, constante, e obtemos k soluções LI.

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}(t).$$

Solução: (na lousa)

$$\lambda_1 = -1; \ \lambda_2 = \lambda_3 = 1;$$

$$\vec{v}_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}; \ \vec{v}_2 = b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R}, \ \vec{v}_3 = c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} \\ c_3 e^{t} \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Se o número de autovetores LI (n) for menor que k, então precisamos encontrar outras $k-n$ soluções linearmente independentes tais que $\vec{v}_j(t)$, $j=n+1,\ldots,k$ são *vetores polinomiais* em t com grau maior ou igual a 1.

Fazemos isso aumentando *gradativamente* o grau de $\vec{v}_j(t)$ até encontrarmos as k soluções LI. **Como?**

Exemplo: Determine os autovalores e autovetores correspondentes da matriz A de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \vec{x} = A\,\vec{x}.$$

Solução: (na lousa)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4,$$

$$\vec{v} = a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Se não encontramos todas as k soluções LI, tentamos encontrar as p soluções LI restantes da forma

$$\vec{x}^{\,j}(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{com } \vec{v}_j(t) = \frac{t^2}{2}\vec{u}_0 + t\,\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad j = 1,\ldots,p$$

$$\text{tais que } \begin{cases} (A-\lambda_j I)\,\vec{u}_0 = \vec{0} \\ (A-\lambda_j I)\,\vec{u}_1 = \vec{u}_0 \\ (A-\lambda_j I)\,\vec{u}_2 = \vec{u}_1 \end{cases}.$$

Obs.: Note que $\vec{u}_0$ e $\vec{u}_1$ foram obtidos no passo anterior.

E assim sucessivamente, aumentando o grau do polinômio de $\vec{v}_j(t)$ até encontrar todas as k soluções LI para os k autovalores iguais λ_j.

Sistemas Homogêneos (cont.)

Baseado em Forma Canônica de Jordan e Autovetores Generalizados:

Tentamos encontrar as $r=k-n$ soluções LI restantes da forma

$$\vec{x}^{\,j}(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{com } \vec{v}_j(t) = t\,\vec{u}_0 + \vec{u}_1, \quad j = 1,\ldots,r$$

tais que $\dot{\vec{x}}^{\,j}(t) = A\,\vec{x}^{\,j}(t)$, ou seja,

$$\left[\lambda_j \vec{v}_j(t) + \dot{\vec{v}}_j(t)\right] e^{\lambda_j t} = A\,\vec{v}_j(t)\,e^{\lambda_j t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{v}}_j(t) = (A-\lambda_j I)\,\vec{v}_j(t)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (A-\lambda_j I)\,\vec{u}_0 = \vec{0} \\ (A-\lambda_j I)\,\vec{u}_1 = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Obs.: Note que $\vec{u}_0$ é o conjunto de autovetores obtidos no passo anterior.

Sistemas Homogêneos (cont.)

Forma Geral das k soluções LI para **autovalores repetidos λ com multiplicidade k**:

$$\vec{x}^{\,j}(t) = e^{\lambda_j t}\vec{v}_j(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{com } \vec{v}_j(t) = \frac{t^n}{n!}\vec{u}_0 + \ldots + \frac{t^2}{2}\vec{u}_{n-2} + t\,\vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n$$

$$\text{tais que } \begin{cases} (A-\lambda_j I)\vec{u}_0 = \vec{0} \\ (A-\lambda_j I)\vec{u}_1 = \vec{u}_0 \\ \vdots \\ (A-\lambda_j I)\vec{u}_{n-1} = \vec{u}_{n-2} \\ (A-\lambda_j I)\vec{u}_n = \vec{u}_{n-1} \end{cases},$$

aplicando a partir de $n=0$ ($\vec{v}_j(t)$ constante) e aumentando n *unitariamente* até encontrar as k soluções LI.

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral $\vec{x}(t)$ de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \vec{x} = A\,\vec{x}.$$

Solução: No exemplo anterior vimos que os autovalores $\lambda_{1,2}$ e os autovetores correspondentes $\vec{v}$ da matriz A são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4,$$
$$\vec{v} = a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; a \in \mathbb{R}.$$

Então temos *uma* solução,

$$\vec{x}^{\,1}(t) \overset{(a=1)}{=} e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo (cont.):

Então, com

$$\vec{x}^{\,1}(t) = e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^{\,2}(t) = e^{4t}\begin{bmatrix} -2t \\ 2t+1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

temos

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{bmatrix} -2t \\ 2t+1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2, t \in \mathbb{R}$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo (cont.): $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\vec{v} = a\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $a \in \mathbb{R}$

$\vec{x}^{\,1}(t) \overset{(a=1)}{=} e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Vamos encontrar uma $\vec{x}^{\,2}(t)$ que seja **LI** de $\vec{x}^{\,1}(t)$:

Sendo $\vec{x}^{\,2}(t) = e^{4t}\vec{v}_2(t)$ com $\vec{v}_2(t) = t\,\vec{u}_0 + \vec{u}_1$, temos

$$\begin{cases} (A-4I)\,\vec{u}_0 = \vec{0} \\ (A-4I)\,\vec{u}_1 = \vec{u}_0 \end{cases} \qquad \vec{u}_0 = \vec{v} = b\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; b \in \mathbb{R}.$$

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \, c, d \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \begin{cases} -2c - 2d = b \\ 2c + 2d = -b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad d = -\frac{b}{2} - c$$

$$\Rightarrow \; \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} c \\ -\frac{b}{2} - c \end{bmatrix} = -\frac{b}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; b, c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_2(t) \overset{\substack{(b=-2,\\ c=0)}}{=} \begin{bmatrix} -2t \\ 2t+1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogêneos (cont.)

Exemplo: Determine a solução geral de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = A\,\vec{x}.$$

Solução: (na lousa)

$$\vec{x}(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} C_1 + tC_3 \\ C_1 + C_2 + (t-1)C_3 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3, t \in \mathbb{R}.$$