

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 22

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa@icmc.usp.br
Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

5 de junho de 2018



Sistemas Não Homogêneos



Vamos agora determinar a *solução particular* $\vec{x}_p(t)$ de

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{g}(t),$$

com $A(t)$, uma matriz $m \times m$, e $\vec{g}(t)$, sendo $m \times 1$, contínuas num intervalo J .

Teorema: Sejam $\vec{u}(t)$ e $\vec{v}(t)$ duas soluções de $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{g}(t)$. Então a sua diferença $\vec{\varphi}(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}(t)$ é solução de $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

Teorema: Seja $X(t) = [\vec{x}^1(t) \ \dots \ \vec{x}^m(t)]$ uma MF do sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Seja $\vec{x}_p(t)$ uma solução particular do sistema não homogêneo. Então

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t)$$

é a solução geral do sistema não homogêneo, com $\vec{c} = [c_1 \ \dots \ c_m]^T$ vetor de constantes arbitrárias.

Maria Luísa

SME0340 Aula 22

Aula Passada



Sistemas de EDs

Sistemas Lineares Homogêneos: $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$

- ▶ Autovalores reais (individuais):

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$$

- ▶ Autovalores complexos ($\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, $\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1}$):

$$\vec{z}^1(t) = \overline{\vec{z}^2(t)} = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = \vec{u}^R(t) + i\vec{u}^I(t), \quad \vec{z}^1(t) \in \mathbb{C}$$

↓

$$\vec{x}^1(t) = \vec{u}^R(t) \in \mathbb{R}, \quad \vec{x}^2(t) = \vec{u}^I(t) \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Autovalores com multiplicidade k :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda,$$

$$\vec{x}^j(t) = e^{\lambda t}\vec{v}_j(t), \quad j = 1, \dots, k$$

- ▶ Solução geral: $\vec{x}(t) = \sum_j C_j \vec{x}^j(t)$, $C_j \in \mathbb{R}$.

Maria Luísa

SME0340 Aula 22

Sistemas Não Homogêneos (cont.)



Para determinar uma solução particular do sistema não homogêneo

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{g}(t),$$

onde a matriz $A(t)$ pode ser constante ou função contínua de t em J , podemos aplicar dois métodos:

- ▶ **Método dos Coeficientes a Determinar (MCD)**, se A é constante e $\vec{g}(t)$ é composta por funções da forma *polinomial*, *exponencial* ou *trigonométrica* (seno ou cosseno), ou suas combinações.
- ▶ **Método da Variação dos Parâmetros (MVP)**, mais geral, se $A(t)$ e $\vec{g}(t)$ são quaisquer.

Maria Luísa

SME0340 Aula 22

Sistemas Não Homogêneos: MCD



A aplicação do *Método dos Coeficientes a Determinar* é semelhante à aplicação para EDs de ordem n , com apenas algumas pequenas modificações para sistemas lineares.

Vamos **Observar**, **Deduzir** e **Calcular** a solução particular $\vec{x}_p(t)$ do sistema não homogêneo.

Para o caso onde o vetor $\vec{g}(t)$ é da forma *polinomial*,

$$\vec{g}(t) = t^n \vec{z},$$

de grau n , onde \vec{z} é um vetor constante, vamos deduzir que a solução particular é um vetor polinomial, e seu grau vai depender do *determinante* da matriz A e da *multiplicidade* dos autovalores iguais de A .

MCD (cont.)



Similarmente aos casos de EDOs de ordem n , com vetor \vec{z} constante:

- ▶ se $\vec{g}(t) = e^{\alpha t} \vec{z}$ (caso *exponencial*), deduzimos que $\vec{x}_p(t) = e^{\alpha t} \vec{v}(t)$ e calculamos $\vec{v}(t)$ pelo caso polinomial;
- ▶ se $\vec{g}(t) = \cos(\beta t) \vec{z}$ ou $\vec{g}(t) = \sin(\beta t) \vec{z}$ (caso *trigonométrico*), modificamos o sistema para o caso *exponencial*, tomando a parte *real* ou *imaginária* correspondente da solução particular do sistema modificado;
- ▶ se $\vec{g}(t)$ é um caso *misto*, adaptamos para um sistema equivalente com caso misto composto por produto de casos polinomial e exponencial;
- ▶ se $\vec{g}(t)$ é composta pela *combinação linear vetorial* de casos anteriores, podemos aplicar o **Princípio da Superposição** para sistemas.

MCD (cont.)



A solução particular $\vec{x}_p(t)$ do sistema não homogêneo, quando $\vec{g}(t)$ é da forma *polinomial* de grau n , pode ser deduzida considerando o *determinante* da matriz A (se é nulo ou não nulo) e, se necessário, a *multiplicidade dos autovalores* e autovetores LI correspondentes:

- ▶ Se $\det(A) \neq 0$, então $\vec{x}_p(t) = t^n \vec{u}^n + \dots + t \vec{u}^1 + \vec{u}^0$, com \vec{u}^i constantes;
- ▶ Se $\det(A) = 0$ e $\lambda = 0$ é *autovalor simples* de A , então $\vec{x}_p(t)$ é vetor polinomial de grau $n + 1$ $\vec{x}_p(t) = t^{n+1} \vec{u}^{n+1} + t^n \vec{u}^n + \dots + t \vec{u}^1 + \vec{u}^0$;
- ▶ Se $\det(A) = 0$ e $\lambda = 0$ é *autovalor múltiplo* de A , então $\vec{x}_p(t)$ é vetor polinomial de grau: $n + 1$ mais a diferença entre a multiplicidade de λ e o número de autovetores.

Notas: 1) $\lambda = \alpha$ é autovalor de $A \Leftrightarrow \det(A - \alpha I) = 0$.

2) $\det(A - \alpha I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ é autovalor de $A - \alpha I$.

MCD (cont.)



Exemplo: Determine a solução particular $\vec{x}_p(t)$ de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} -8 + 7e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sabendo que a matriz A possui autovalores $\lambda = 0$ (multiplicidade 2) com autovetor $\vec{v} = a_1 [1 \ 2 \ 8]^T$, $a_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda = 8$ com autovetor $\vec{v} = a_2 [1 \ 2 \ 0]^T$, $a_2 \in \mathbb{R}$.

Solução: (partes na lousa) Vamos separar

$$\vec{g}(t) = \vec{g}_1(t) + \vec{g}_2(t) = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \vec{z}^1 + e^t \vec{z}^2$$

e aplicar o *Princípio da Superposição*. Como $\vec{g}_1(t)$ é da forma polinomial de grau 0, e como $\det(A) = 0$ com $\lambda = 0$ de mult. 2 e 1 autovetor, então deduzimos que

$$\vec{x}_{p1}(t) = t^2 \vec{u}^2 + t \vec{u}^1 + \vec{u}^0.$$

MCD (cont.)



Calculando \vec{u}^i : como $\dot{\vec{x}}_{P1}(t) = 2t\vec{u}^2 + \vec{u}^1$,

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{g}_1(t) \Rightarrow$$

$$2t\vec{u}^2 + \vec{u}^1 = t^2 A\vec{u}^2 + tA\vec{u}^1 + A\vec{u}^0 + 1\vec{z}^1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\vec{u}^2 = \vec{0} \\ A\vec{u}^1 = 2\vec{u}^2 \\ A\vec{u}^0 = \vec{u}^1 - \vec{z}^1 \end{cases}$$

$$\det(A) = 0 (?): A\vec{u}^2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}^2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{u}^1 = \begin{bmatrix} 2a \\ 4a \\ 16a \end{bmatrix} \dots \vec{u}^1 = \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 8a+2b \\ 14a+8b \end{bmatrix},$$

$b \in \mathbb{R}.$

MCD (cont.)



Para $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{g}_2(t)$, vamos determinar $\vec{x}_{P2}(t)$.

Sendo $\vec{g}_2(t) = e^t [7 \ 0 \ 0]^T = e^t \vec{z}^2$ da forma

exponencial, então $\vec{x}_{P2}(t) = e^t \vec{v}(t)$ e assim

$$\dot{\vec{x}}_{P2}(t) = (\dot{\vec{v}} + \vec{v})e^t \Rightarrow (\dot{\vec{v}} + \vec{v})e^t = A\vec{v}e^t + \vec{z}^2 e^t$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{v}} + \vec{v} = A\vec{v} + \vec{z}^2 \Rightarrow \dot{\vec{v}} = (A - I)\vec{v} + \vec{z}^2$$

Forma *polinomial* de grau 0. Como $\lambda = 1$ **não é** autovalor de A , $\det(A - I) \neq 0$ e então $\vec{v}(t) = \vec{u}^0$.

$$\Rightarrow \dot{\vec{v}}(t) = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} = (A - I)\vec{u}^0 + \vec{z}^2$$

$$\Rightarrow (A - I)\vec{u}^0 = -\vec{z}^2: \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{u}^0 = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dots \vec{u}^0 = -[1 \ 16 \ 28]^T = \vec{v}(t), t \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore \vec{x}_{P2}(t) = -e^t [1 \ 16 \ 28]^T, t \in \mathbb{R}.$$

MCD (cont.)



$$\vec{u}^2 = [a \ 2a \ 8a]^T; \vec{u}^1 = [b \ 8a+2b \ 14a+8b]^T, a, b \in \mathbb{R}.$$

$$A\vec{u}^0 = \vec{u}^1 - \vec{z}^1: \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{u}^0 = \begin{bmatrix} b+8 \\ 8a+2b \\ 14a+8b \end{bmatrix}$$

$$\dots a=2; \vec{u}^0 = \begin{bmatrix} f \\ h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 14+4b+2f \\ 20+7b+8f \end{bmatrix}, b, f \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x}_{P1}(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 + bt + f \\ 4t^2 + (2b+16)t + (14+4b+2f) \\ 16t^2 + (8b+28)t + (20+7b+8f) \end{bmatrix}, b, f \in \mathbb{R}$$

$$\therefore (b=f=0) \vec{x}_{P1}(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ 4t^2 + 16t + 14 \\ 16t^2 + 28t + 20 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

MCD (cont.)



Então, sendo

$$\vec{x}_{P1}(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ 4t^2 + 16t + 14 \\ 16t^2 + 28t + 20 \end{bmatrix}, \vec{x}_{P2}(t) = -e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \\ 28 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

a solução particular de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} -8 + 7e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é dada por

$$\vec{x}_P(t) = \vec{x}_{P1}(t) + \vec{x}_{P2}(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 - e^t \\ 4t^2 + 16t + 14 - 16e^t \\ 16t^2 + 28t + 20 - 28e^t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Observação: Ao aplicar o Método dos Coeficientes a Determinar, se $\vec{g}(t)$ é escrito como, por exemplo,

$$\vec{g}(t) = \begin{bmatrix} 3e^t + 2e^{-t} \\ -\cos(2t) \\ 4t - e^t \end{bmatrix},$$

então é necessário separar os tipos distintos

$$\vec{g}(t) = e^t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e aplicar o Princípio da Superposição.