SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 23

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

7 de junho de 2018

Sistemas Não Homogêneos: MVP

O segundo método para determinar a solução particular $\vec{x}_P(t)$ do sistema não homogêneo

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{g}(t)$$

é o **Método da Variação dos Parâmetros**.

Ele permite que $\vec{x}_P(t)$ seja determinado para *quaisquer* $A(t)$ e $\vec{g}(t)$, desde que as *soluções LI do sistema homogêneo correspondente sejam conhecidas*.

Vamos supor que temos uma *matriz fundamental* (MF) $X(t)$ do sistema homogêneo correspondente e vamos determinar $\vec{x}_P(t)$ tal que a *solução geral* do sistema não homogêneo será dada por

$$\vec{x}(t) = X(t)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} + \vec{x}_P(t), \quad c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, \ t \in J.$$

Aula Passada

Sistemas de EDs

Sistemas Lineares Não Homogêneos:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t) + \vec{g}(t)$$

- Teoremas;
- Método dos Coeficientes a Determinar (MCD).

MVP (cont.)

A solução geral do sistema homogêneo correspondente é dada por $\vec{x}_H(t) = X(t)\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_m \end{bmatrix}^T$. Então podemos supor que a solução particular do sistema não homogêneo será da forma

$$\vec{x}_P(t) = X(t)\vec{u}(t) = X(t)\begin{bmatrix} u_1(t) & \cdots & u_m(t) \end{bmatrix}^T$$

com $u_i(t)$ não sendo todas constantes.

Então, substituímos $\vec{x}_P(t)$ e $\dot{\vec{x}}_P(t)$ no sistema e determinamos $\vec{u}(t)$, substituindo-o de volta em $\vec{x}_P(t)$:

$$\dot{\vec{x}}_P(t) = \dot{X}(t)\vec{u}(t) + X(t)\dot{\vec{u}}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{X}\vec{u} + X\dot{\vec{u}} = AX\vec{u} + \vec{g}$$

$$\dot{X} = AX \quad (?)$$

$$\therefore \quad X(t)\dot{\vec{u}}(t) = \vec{g}(t) \quad \text{ou} \quad \dot{\vec{u}}(t) = X^{-1}(t)\vec{g}(t)$$

MVP (cont.)

Assim, conhecendo uma matriz fundamental $X(t)$ $m \times m$ do sistema homogêneo correspondente, determinamos a solução particular $\vec{x}_P(t)$ definindo

$$\vec{x}_P(t) = X(t)\,\vec{u}(t) = X(t)\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix},$$

resolvendo o sistema

$$X(t)\,\dot{\vec{u}}(t) = \vec{g}(t) \quad \text{ou} \quad \dot{\vec{u}}(t) = X^{-1}(t)\,\vec{g}(t)$$

e integrando $\dot{\vec{u}}(t)$ em t para obter $\vec{u}(t)$, substitundo-o em $\vec{x}_P(t)$.

MVP (cont.)

Então, definimos

$$\vec{x}_P(t) = X(t)\,\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \\ 2\,t^2-1 & 2\,t & 2 \\ 2-2\,t & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

com $u_i(t)$ determinados a partir de:

$$X(t)\,\dot{\vec{u}}(t) = \vec{g}(t) \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \\ 2\,t^2-1 & 2\,t & 2 \\ 2-2\,t & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cdots\; \dot{\vec{u}}(t) = \begin{bmatrix} 6 \\ 12\,(1-t) \\ 6t^2-12t+3 \end{bmatrix} \quad \cdots\; \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} 6t\ (+K_1) \\ 12t-6t^2\ (+K_2) \\ 2t^3-6t^2+3t\ (+K_3) \end{bmatrix}$$

$t \in \mathbb{R}$ para $\dot{\vec{u}}(t)$ e $\vec{u}(t)$

$$\therefore\quad \vec{x}_P(t) = {\color{blue} X(t)\,\vec{u}(t)} = \begin{bmatrix} 2\,t^3+6\,t^2+3\,t \\ 4\,t^3+12\,t^2 \\ -6\,t^2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

MVP (cont.)

Exemplo: Determine a solução particular $\vec{x}_P(t)$ de

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 8 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sabendo que

$$\vec{x}_H(t) = \begin{bmatrix} c_1\,t^2 + c_2\,t + c_3 \\ c_1\left(2\,t^2-1\right) + 2\,c_2\,t + 2\,c_3 \\ c_1\,(2-2\,t) - c_2 \end{bmatrix}, \quad t, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Solução: (partes na lousa) Para determinar $\vec{x}_P(t)$ vamos definir uma MF $X(t)$:

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \\ 2\,t^2-1 & 2\,t & 2 \\ 2-2\,t & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

MVP (cont.)

Para determinar a solução particular de

$$\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x} + \vec{g}(t),$$

precisamos resolver o sistema

$$X(t)\,\dot{\vec{u}}(t) = \vec{g}(t),$$

que possui apenas **uma** solução **não nula** se $\vec{g}(t) \not\equiv \vec{0}$ para $t \in J$.

Como sabemos isso?

$X(t)$ é uma matriz fundamental (MF) do sistema homogêneo, isto é, suas colunas são linearmente independentes e $\det(X(t)) \neq 0$ para qualquer valor de $t \in J$, e portanto pode ser invertida.

MVP (cont.)

Exercício: Determine a *solução geral* $\overrightarrow{x}(t)$ de

$$\dot{\overrightarrow{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \overrightarrow{x} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

conhecendo os autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$ da matriz e seus autovetores correspondentes, respectivamente $\overrightarrow{v}_1 = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $\overrightarrow{v}_2 = b\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^T$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Dica: $\displaystyle\int t\,e^{at}\,dt = \frac{(a\,t-1)}{a^2}e^{at} + C$

MVP (cont.)

Então a solução particular será dada por

$$\overrightarrow{x}_P(t) = X(t)\overrightarrow{u}(t)$$

com $\overrightarrow{u}(t)$ não constante, obtido da integral (em t) da solução do sistema $X(t)\dot{\overrightarrow{u}}(t) = \overrightarrow{g}(t)$,

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}'(t) \\ u_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

O sistema é *idêntico* ao obtido pelo MVP para EDs de ordem n!

MVP (cont.)

Se o sistema

$$\dot{\overrightarrow{x}}(t) = A(t)\overrightarrow{x}(t) + \overrightarrow{g}(t)$$

é obtido a partir de uma equação diferencial de ordem n não homogênea

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y = b(t)$$

($A(t)$, $\overrightarrow{x}(t)$, $\overrightarrow{g}(t)$?), a MF $X(t)$ será da forma

$$X(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

onde $y_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$ são as n soluções linearmente independentes em $t \in J$ da ED de ordem n homogênea correspondente.

$\det(X(t)) \neq 0$ em $t \in J$. (como sabemos disso?)