

SME0340

Equações Diferenciais Ordinárias

Aula 27

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
 marialuisa @ icmc . usp . br
 Sala: 3-241

Página: <http://ae4.tidia-ae.usp.br>

21 de junho de 2018



TL em Solução de EDs



Como utilizar Transformada de Laplace para determinar a solução $y(t)$ de PVI com EDOs de ordem n ?
 Com o PVI de ordem 2 com coeficientes constantes

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = g(t) \\ y(0) = y_0, y'(0) = z_0 \end{cases}$$

se aplicarmos a Transformada de Laplace e a Propriedade 4 sobre a ED, e definirmos $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, para $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' + ay' + by] &= \mathcal{L}[g(t)] \Rightarrow \\ \mathcal{L}[y''] + a\mathcal{L}[y'] + b\mathcal{L}[y] &= G(s); \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s); \quad \mathcal{L}[y'(t)] = s\mathcal{L}[y(t)] - y(0) = sY(s) - y_0;$$

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s\mathcal{L}[y'(t)] - y'(0) = s^2 Y(s) - sy_0 - z_0.$$

Substituímos na equação e isolamos $Y(s)$.
 Finalmente calculamos $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$, para $t \geq 0$.

Aula Passada



Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, s > 0; \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0; \quad \mathcal{L}[e^{ct}] = \frac{1}{s-c}, s > c;$$

$$\mathcal{L}[\sin(wt)] = \frac{w}{s^2 + w^2}, s > 0; \quad \mathcal{L}[\cos(wt)] = \frac{s}{s^2 + w^2}, s > 0;$$

Com $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a), s > s_0 + a;$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s); \quad \mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Transformada Inversa $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$;

Frações Parciais.

TL em Solução de EDs (cont.)



Exemplo: Resolva o PVI $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t} \\ y(0) = 2, y'(0) = -1 \end{cases}$.

Solução: Aplicando TL,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] &= \mathcal{L}[6e^{-t}] \Rightarrow \\ \mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] &= 6\mathcal{L}[e^{-t}] \end{aligned}$$

com

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s), \quad \mathcal{L}[y'(t)] = s\mathcal{L}[y(t)] - y(0) = sY(s) - 2,$$

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s\mathcal{L}[y'(t)] - y'(0) = s^2 Y(s) - 2s + 1;$$

$$[s^2 Y(s) - 2s + 1] - 3[sY(s) - 2] + 2[Y(s)] = \frac{6}{s+1} \Rightarrow$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) - (2s - 7) = \frac{6}{s+1} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{6 + (2s - 7)(s + 1)}{(s + 1)(s^2 - 3s + 2)}$$

TL em Solução de EDs (cont.)



Exemplo (cont.):

$$Y(s) = \frac{6 + (2s - 7)(s + 1)}{(s + 1)(s^2 - 3s + 2)} = \frac{2s^2 - 5s - 1}{(s + 1)(s - 1)(s - 2)} =$$

$$= \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s - 1} + \frac{C}{s - 2} =$$

$$= \frac{A(s - 1)(s - 2) + B(s + 1)(s - 2) + C(s + 1)(s - 1)}{(s + 1)(s - 1)(s - 2)}$$

$$A(s - 1)(s - 2) + B(s + 1)(s - 2) + C(s + 1)(s - 1) = 2s^2 - 5s - 1$$

$$s = -1: 6A = 6 \Rightarrow \mathbf{A = 1}$$

$$s = 1: -2B = -4 \Rightarrow \mathbf{B = 2}$$

$$s = 2: 3C = -3 \Rightarrow \mathbf{C = -1}$$

$$\therefore Y(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{s - 1} - \frac{1}{s - 2}$$

TL em Solução de EDs (cont.)



E como determinar a **solução geral** de uma ED linear com coeficientes constantes

$$y'' + ay' + by = g(t)$$

aplicando Transformada de Laplace?

Resolver o PVI

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = g(t) \\ y(0) = c_1, y'(0) = c_2 \end{cases}$$

com c_1, c_2 sendo constantes reais arbitrárias.

TL em Solução de EDs (cont.)



Exemplo (cont.): $Y(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{s - 1} - \frac{1}{s - 2}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 1}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - 1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - 2}\right]$$

$$\therefore y(t) = e^{-t} + 2e^t - e^{2t}, \quad t \geq 0.$$

TL em Solução de EDs (cont.)



Exemplo: Determinar a solução geral de

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t}$$

usando Transformada de Laplace.

Solução: (partes na lousa)

Para resolver a ED, devemos resolver o PVI

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t} \\ y(0) = c_1, y'(0) = c_2 \end{cases}$$

Sendo

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s),$$

$$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s) - c_1,$$

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s[sY(s) - c_1] - y'(0) = s^2Y(s) - sc_1 - c_2,$$

temos $\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] = \mathcal{L}[6e^{-t}]$.

Exemplo (cont.): $\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] = \mathcal{L}[6e^{-t}]$

$$[s^2 Y(s) - s c_1 - c_2] - 3[sY(s) - c_1] + 2[Y(s)] = \frac{6}{s+1}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) - (c_1 s - 3c_1 + c_2) = \frac{6}{s+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(s) &= \frac{6}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)} + \frac{c_1 s - 3c_1 + c_2}{s^2 - 3s + 2} = \\ &= \frac{6}{(s+1)(s-1)(s-2)} + \frac{c_1 s - 3c_1 + c_2}{(s-1)(s-2)} = \\ &= \frac{1}{s+1} + \frac{k_1}{s-1} + \frac{k_2}{s-2}. \end{aligned}$$

$$\therefore y(t) = k_1 e^t + k_2 e^{2t} + e^{-t}, \quad t \geq 0, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercício: Resolva o PVI

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 10y = -7e^{-2t} \\ y(0) = -3, \quad y'(0) = -14 \end{cases}.$$

Solução:

$$y(t) = te^{-2t} - 3e^{5t}, \quad t \geq 0.$$

Como resolver um PVI da forma

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = g(t) \\ y(t_1) = y_0, \quad y'(t_1) = z_0 \end{cases}$$

onde $t_1 \neq 0$?

Fazer uma **mudança de variável** $\tau = t - t_1$, aplicar a Transformada de Laplace e resolver o PVI definido para τ , e finalmente fazer a mudança de variável inversa $t = \tau + t_1$ para obter a solução do PVI em t .

PVI definido para τ :

$$\begin{cases} z''(\tau) + az'(\tau) + bz(\tau) = f(\tau) \\ z(0) = y_0, \quad z'(0) = z_0 \end{cases}$$

com $z(\tau) = y(\tau + t_1)$ e $f(\tau) = g(\tau + t_1)$.