SME0340
Equações Diferenciais Ordinárias
Aula 28

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241

Página: http://ae4.tidia-ae.usp.br

26 de junho de 2018

Solução de Sistemas de EDs

Assim como é possível resolver EDs de ordem n com coeficientes constantes, também podemos aplicar a Transformada de Laplace para resolver PVIs de **sistemas de EDs** de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}\,x_1(t) + \cdots + a_{1n}\,x_n(t) + g_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}\,x_1(t) + \cdots + a_{nn}\,x_n(t) + g_n(t) \\ x_1(0) = x_1^0, \ \cdots, x_n(0) = x_n^0 \end{cases}.$$

COMO?

Aplicamos a Transformada de Laplace a cada ED do sistema (considerando a condição inicial dada), resolvemos o *sistema algébrico* resultante, e aplicamos a Transformada Inversa de Laplace para determinar a solução do sistema.

Aula Passada

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, s > 0; \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0; \quad \mathcal{L}\left[e^{ct}\right] = \frac{1}{s-c}, s > c;$$

$$\mathcal{L}[\text{sen}(w\,t)] = \frac{w}{s^2+w^2}, s > 0; \quad \mathcal{L}[\cos(w\,t)] = \frac{s}{s^2+w^2}, s > 0;$$

Com $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$:

$$\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,\mathcal{L}[f(t)] + b\,\mathcal{L}[g(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a), s > s_0 + a;$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s); \quad \mathcal{L}\left[f'(t)\right] = s\,\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Aplicação em EDs:

- PVI;
- Solução Geral;
- Condição Inicial $t_1 \neq 0$.

Sistemas de EDs (cont.)

Exemplo: Solução $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ de

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2\,x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 9\,x_1(t) + 2\,x_2(t) \\ x_1(0) = 3, \ x_2(0) = -3 \end{cases}.$$

Solução: (partes na lousa) Sendo

$$X_1(s) = \mathcal{L}[x_1(t)], \quad X_2(s) = \mathcal{L}[x_2(t)],$$

$$\mathcal{L}\left[x_1'(t)\right] = s\,X_1(s) - 3, \quad \mathcal{L}\left[x_2'(t)\right] = s\,X_2(s) + 3,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s\,X_1 - 3 = 2\,X_1 + X_2 \\ s\,X_2 + 3 = 9\,X_1 + 2\,X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-2)\,X_1 - X_2 = 3 & (I) \\ -9\,X_1 + (s-2)\,X_2 = -3 & (II) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(s) = \dfrac{3\,s-9}{s^2-4\,s-5} \\ X_2(s) = \dfrac{33-3\,s}{s^2-4\,s-5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{5t} + 2\,e^{-t} \\ x_2(t) = 3\,e^{5t} - 6\,e^{-t} \end{cases}, \ t \geq 0$$

Sistemas de EDs (cont.)

Exemplo: Solução $\overrightarrow{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ de

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2\,x_1(t) + x_2(t) + e^{-t} \\ x_2'(t) = 9\,x_1(t) + 2\,x_2(t) - 3\,e^{-t} \\ x_1(0) = 3,\; x_2(0) = -3 \end{cases}.$$

Solução: (na lousa)

$$\overrightarrow{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} + 2\,e^{-t} + t\,e^{-t} \\ 3\,e^{5t} - 6\,e^{-t} - 3\,t\,e^{-t} \end{bmatrix},\; t \geq 0$$

Sistemas de EDs (cont.)

Assim como para solução de equações diferenciais ordinárias usando Transformada de Laplace:

- Se quisermos a **solução geral** de um sistema de EDs, assumimos constantes arbitrárias para as condições iniciais.
- Se as condições iniciais são fornecidas em $t_1 \neq 0$, fazemos uma **mudança de variável** para t, $\tau = t - t_1$.

Sistemas de EDs (cont.)

Exemplo: Solução $\overrightarrow{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ de

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(0) = 0,\; x_2(0) = -1 \end{cases}$$

Solução: (na lousa)

$$\overrightarrow{x}(t) = \begin{bmatrix} -e^{t}\,\mathrm{sen}(t) \\ -e^{t}\cos(t) \end{bmatrix},\; t \geq 0.$$