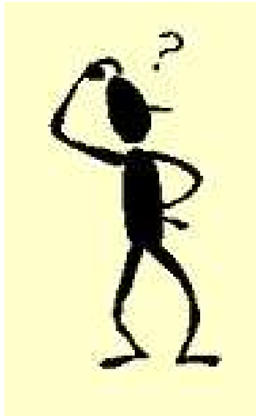
ANÁLISE EXPLORATÓRIA E ESTATÍSTICA DESCRITIVA

O que fazer com os dados coletados?



1ª etapa: Estatística Descritiva e

Análise Exploratória

Medidas resumo, tabelas e gráficos.

Obs. Se x representa uma variável, uma amostra com valores $x_1, x_2, ..., x_n$ é chamada de conjunto de dados.

n é o tamanho da amostra.

Variável

Qualquer característica de interesse associada aos elementos de uma população.

Classificação de variáveis

Qualitativa	Nominal	Cor, tipo de máquina
	Ordinal	Classe social, grau de desgaste
Quantitativa	Discreta	Número de acidentes, número de defeitos em um item
	Contínua	Peso, viscosidade, pressão

Exemplo. Estudo de resistência.

Observação	Espessura	Tipo de cola	Resistência
1	13	1	46,5
2	14	1	45,9
3	12	1	49,8
4	12	1	46,1
5	14	1	44,3
6	12	2	48,7
7	10	2	49,0
8	11	2	50,1
9	12	2	48,5
10	14	2	45,2
11	15	3	46,3
12	14	3	47,1
13	11	3	48,9
14	11	3	48,2
15	10	3	50,3
16	16	4	44,7
17	15	4	43,0
18	10	4	51,0
19	12	4	48,1
20	11	4	48,6

Fonte: Montgomery, D. C. (2005), Design and Analysis of Experiments, 6th Edition, Wiley: New York

Medidas resumo

Medidas de posição: moda, média, mediana, percentis, quartis.
(medidas de tendência central: três primeiras)

Medidas de dispersão: amplitude, intervalo interquartil, variância, desvio padrão, coeficiente de variação.

Medidas de posição

Moda (Mo): É o valor (ou atributo) que ocorre com maior freqüência.

Ex. Dados: 4,5,4,6,5,8,4,4
mo = 4

Obs. 1. Nem sempre a moda existe.
2. Pode haver mais de uma moda.

Média: $$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Ex. Dados: 2,5,3,7,11

$\bar{x}$ = (2+5+3+7+11)/5 = 5,6

Mediana (Md)

A mediana é o valor que ocupa a posição central de um conjunto de n valores ordenados.

Posição da mediana: pm = (n+1)/2

Ex. Dados: 2,26,3,7,8 (n = 5)

Dados ordenados: 2,3,7,8, 26 => pm = (5+1)/2=3

=> Md = 7

Ex. Dados: 2,15,2,1,8,5 (n = 6)

Dados ordenados: 1,2,2,5,8,15 => pm = (6+1)/2=3,5 => Md = (2+5) / 2 = 3,5 (média dos elementos nas posições 3 e 4).

Quantis (*quantiles*)

O quantil de ordem p ($0 < p < 1$), em um conjunto de dados com n observações, é o valor que ocupa a posição p x (n+1) nos dados ordenados.

O quantil de ordem p deixa px100% das observações abaixo dele na amostra ordenada.

Casos particulares:

Quantil 0,5 = mediana ou segundo quartil (md)

Quantil 0,25 = primeiro quartil (Q1)

Quantil 0,75 = terceiro quartil (Q3)

Exemplos

Ex. 1. 1,9 2,0 2,1 2,5 3,0 3,1 3,3 3,7 6,1 7,7 (n = 10)

Posição da Md: 0,5(n+1)=0,5x11=> Md =(3+3,1)/2 = 3,05

Posição de Q1: 0,25(11)=2,75 => Q1 = (2+2,1)/2 = 2,05

Posição de Q3: 0,75(11)=8,25 => Q3 = (3,7+6,1)/2 = 4,9

Ex. 2. 0,9 1,0 1,7 2,9 3,1 5,3 5,5 12,2 12,9 14,0 33,6 (n = 11)

Md = 5,3

Q1 = 1,7

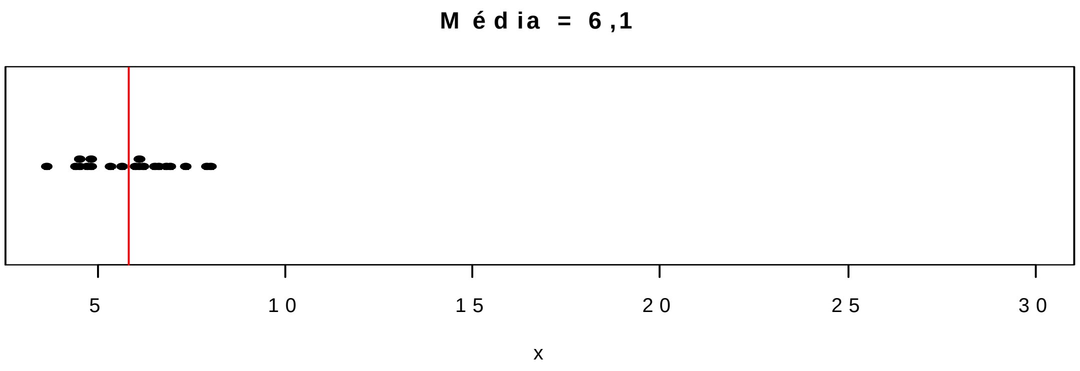
Q3 = 12,9

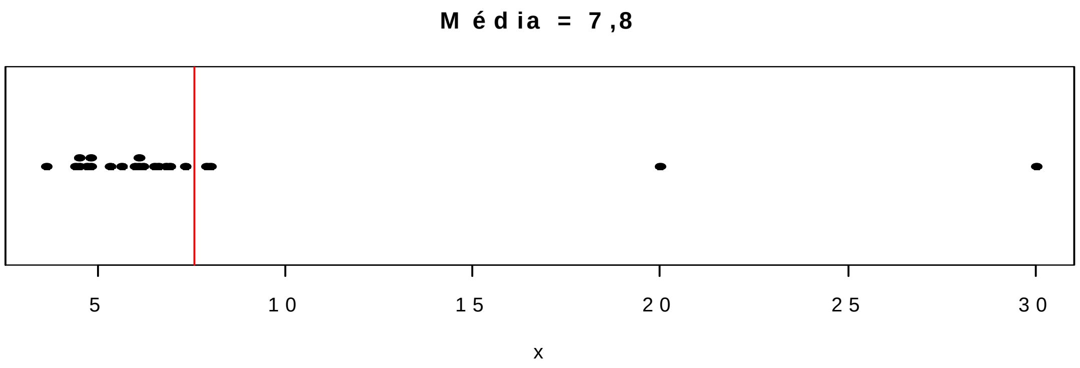
Moda, mediana e média (*mode, median and mean*)

A moda não é muito utilizada com variáveis quantitativas.

Se a variável for qualitativa nominal, a moda é a única medida de posição.

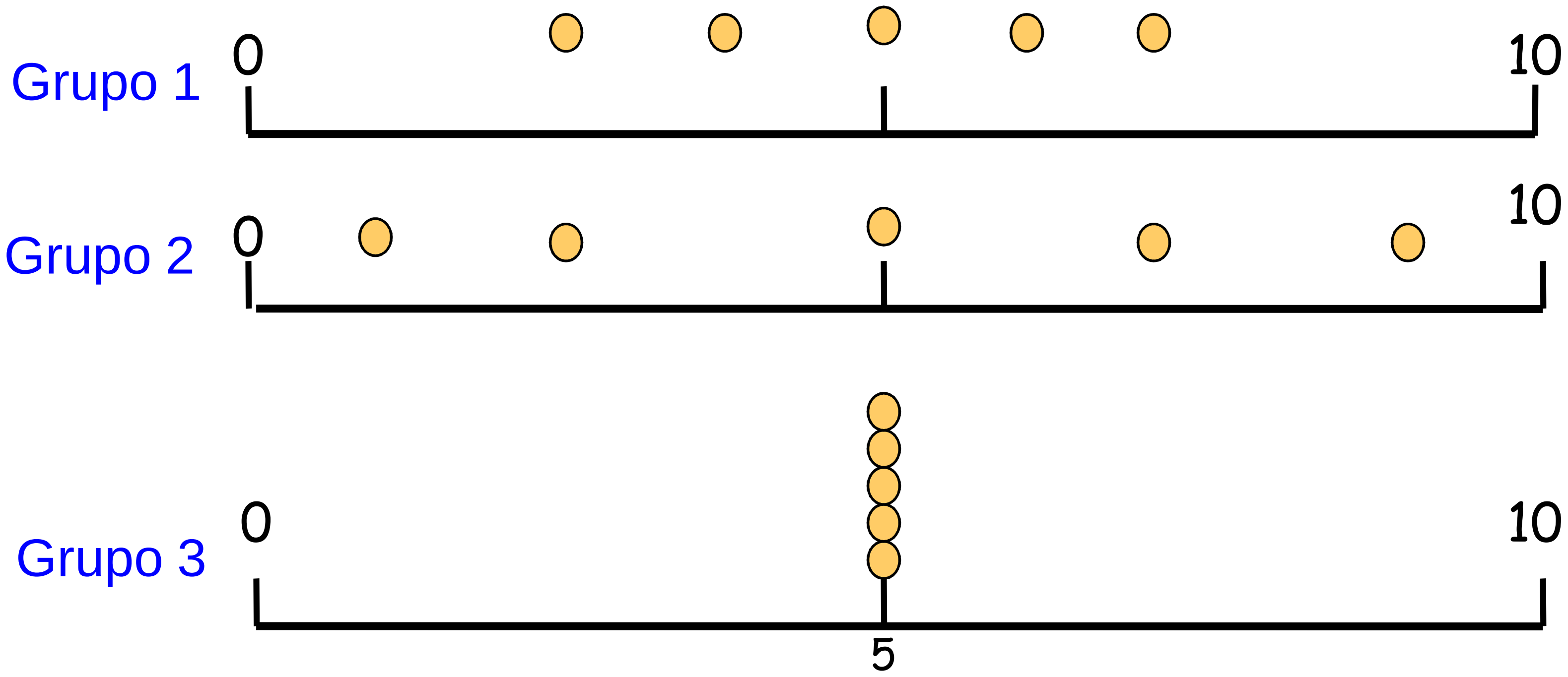
A mediana é mais resistente do que a média. É menos afetada pela presença de valores extremos.





Obs. Os quantis também são chamados de separatrizes.

Considere as notas de uma prova aplicada a três grupos de alunos:
Grupo 1: 3, 4, 5, 6, 7; Grupo 2: 1, 3, 5, 7,9; e Grupo 3: 5,5,5,5,5.



$$\overline{x}_1 = \overline{x}_3 = \overline{x}_3 = 5; \; Md_{\,1} = Md_{\,3} = Md_{\,3} = 5$$

Medidas de dispersão

Finalidade: encontrar um valor que resuma a variabilidade de um conjunto de dados.

Amplitude (A): A = MAX - min

Para os grupos anteriores (lâmina 24), temos

Grupo 1: A = 4

Grupo 2: A = 8

Grupo 3: A = 0

Intervalo ou amplitude interquartil (d_q) (*interquartile range*)

É a diferença entre o terceiro quartil e o primeiro quartil: $d_q = Q3 - Q1$.

Ex. 1,9 2,0 2,1 2,5 3,0 3,1 3,3 3,7 6,1 7,7

Q1 = 2,05 e Q3 = 4,9.

$d_q = Q3 - Q1 = 4{,}9 - 2{,}05 = 2{,}85$.

Obs. d_q é uma medida mais resistente do que A.

Variância (s^2) (*variance*)

$$S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

Desvio padrão (s) (*standard deviation*)

$$s = \sqrt{S^2}$$

Obs. O desvio padrão tem a mesma unidade da variável *x*.

Cálculo da variância para o grupo 1 (lâmina 24):

Grupo 1: 3, 4, 5, 6, 7: Vimos que $\bar{x} = 5$

$$S^2 = \frac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2}{5-1} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

Desvio padrão:

$$\text{Grupo 1}: s^2 = 2{,}5 \Rightarrow s = 1{,}58$$

$$\text{Grupo 2}: s^2 = 10 \Rightarrow s = 3{,}16$$

$$\text{Grupo 3}: s^2 = 0 \Rightarrow s = 0$$

Propriedades:

$x_1, \ldots, x_n$ uma amostra com média $\bar{x}$ e variância s_x^2.

Transformação (posição e escala): $y_i = a + b\, x_i$, $i = 1,...,n$.

$$\bar{y} = a + b\bar{x},$$

$$s_y^2 = b^2 s_x^2 \quad \text{e} \quad s_y = |b| s_x.$$

Coeficiente de variação (CV)

É uma medida de dispersão relativa.

Exprime a variabilidade em relação à média.

$$CV = \frac{S}{|\bar{x}|} \times 100,$$

se $\bar{x} \neq 0$.

Exemplo. Altura e peso de alunos

	Média	Desvio padrão	Coeficiente de variação
Altura	1,143m	0,063m	5,5%
Peso	50Kg	6kg	12%

Conclusão**.** O peso dos alunos apresenta variabilidade relativa aproximadamente duas vezes maior do que a altura.

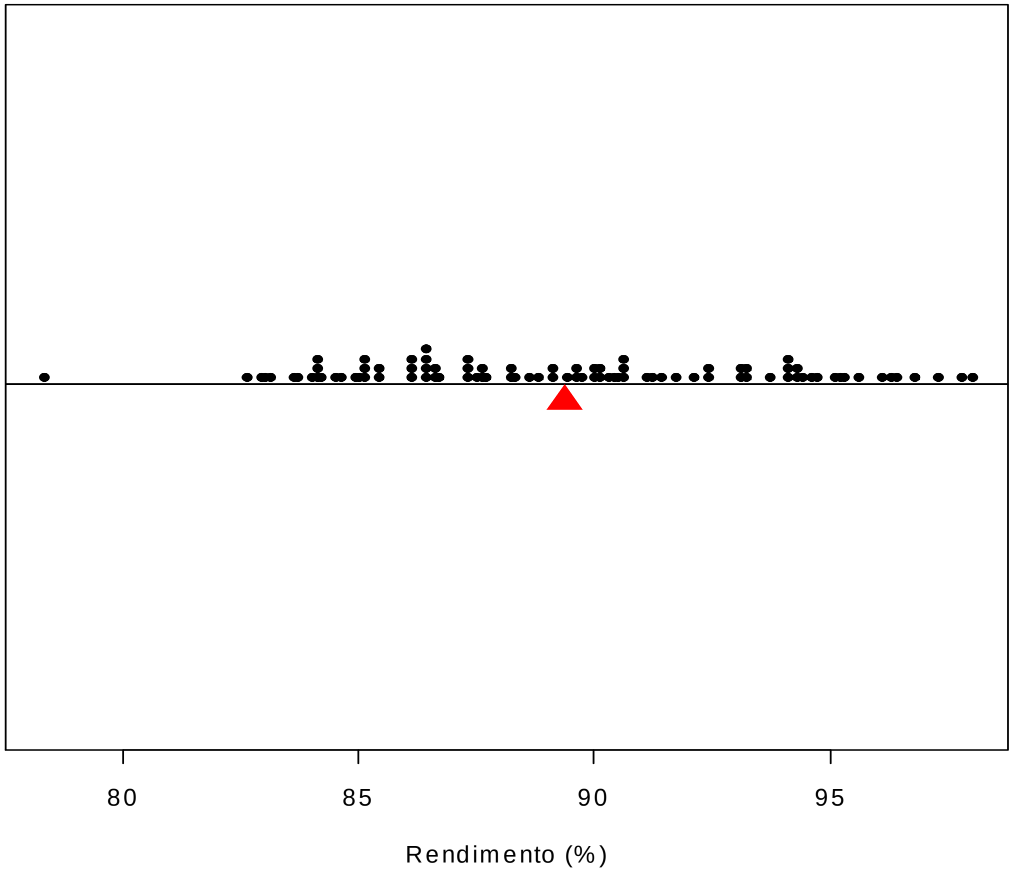
Um exemplo em R

Rendimento (em %) de 90 bateladas de um substrato de cerâmica no qual um revestimento metálico foi aplicado.

```
> dados = scan("dados2-11-Mont.txt")
Read 90 items
> summary(dados)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  78.30   86.10   89.25   89.38   93.10   98.00
> sd(dados)
[1] 4.315905
> quantile(dados, c(0.1, 0.4, 0.7, 0.9))
  10%   40%   70%   90%
84.10 87.60 91.82 95.21
```

Exemplo em R (Gráfico de pontos)

```
> stripchart(dados, xlab="Rendimento (%)", pch= 20, method = "stack")
> abline(h = 0.98)
> points(mean(dados), 0.93, pch = 17, col = "red", cex = 2)
```



Propriedade:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0.$$

Organização e representação dos dados

Uma das formas de organizar e resumir a informação contida em dados observados é por meio de tabelas de frequências e gráficos.

A frequencia de um valor da variável é o número de vezes que este valor ocorre no conjunto de dados.

Tabela de frequências. Tabela com os diferentes valores de uma variável (ou intervalos de valores) e suas respectivas frequencias.

1. Variáveis qualitativas. Tabela de frequências dos diferentes valores da variável.
Representação gráfica: gráfico de barras, de Pareto e gráfico de setores (“de pizza”).

Exemplo. Variável “Grau de instrução” (variável qualitativa ordinal)

	Grau de instrução	Contagem	f_i	f_{r_i}
	1º Grau		12	0,3333
	2º Grau		18	0,5000
	Superior		6	0,1667
	Total		n = 36	1,0000

f_i : frequência absoluta do valor i (número de indivíduos com grau de instrução i), $i \in$ {1º Grau, 2º Grau, Superior}.

$f_{r_i} = \dfrac{f_i}{n}$: frequência relativa do valor I.

Elementos de um gráfico

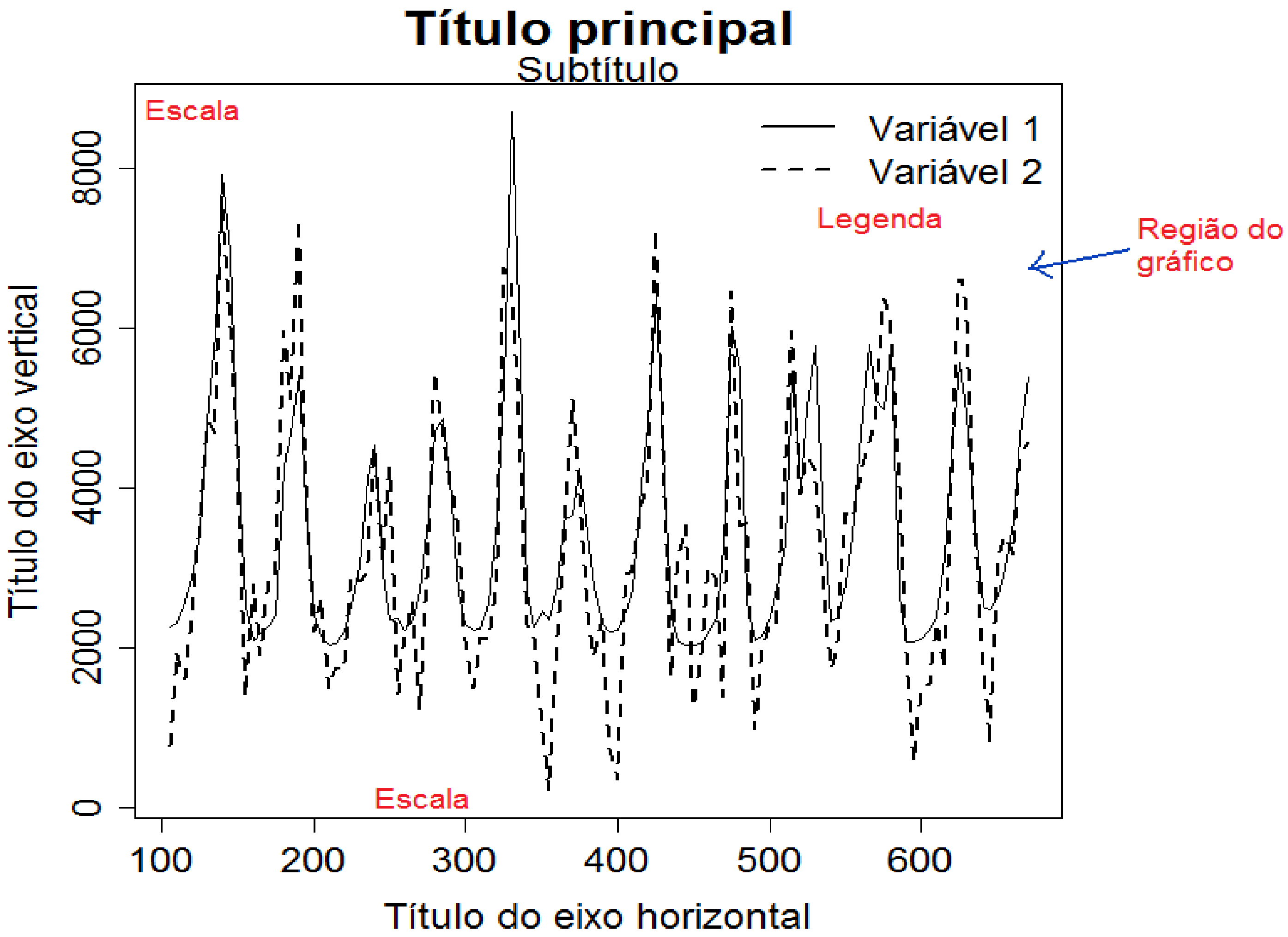
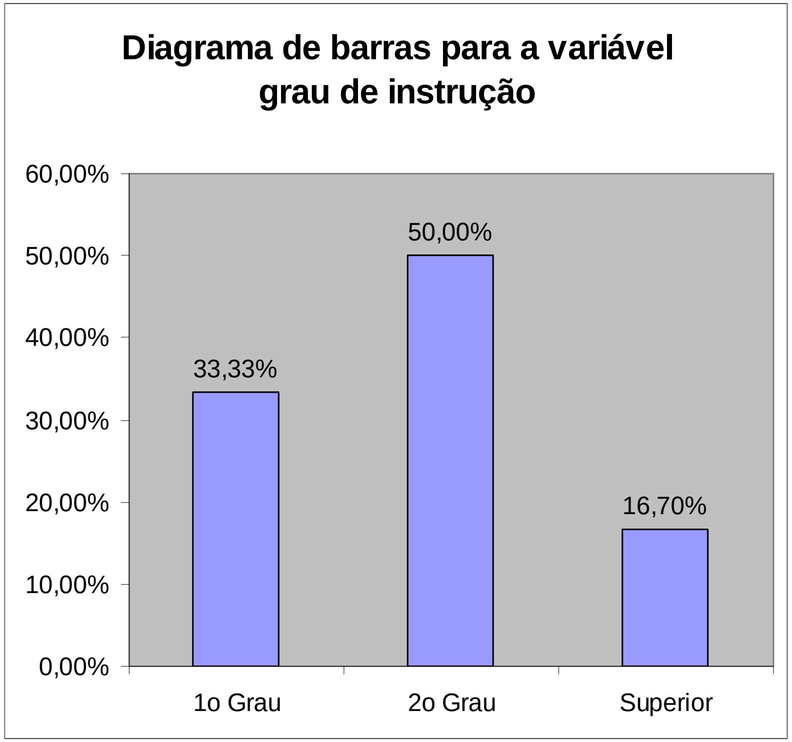


Figura 1. Descrição do gráfico.

Representação gráfica de variáveis qualitativas

Gráfico de barras: retângulos verticais (ou horizontais) espaçados com alturas (ou bases) iguais às frequencias dos valores da variável.



Grau de instrução

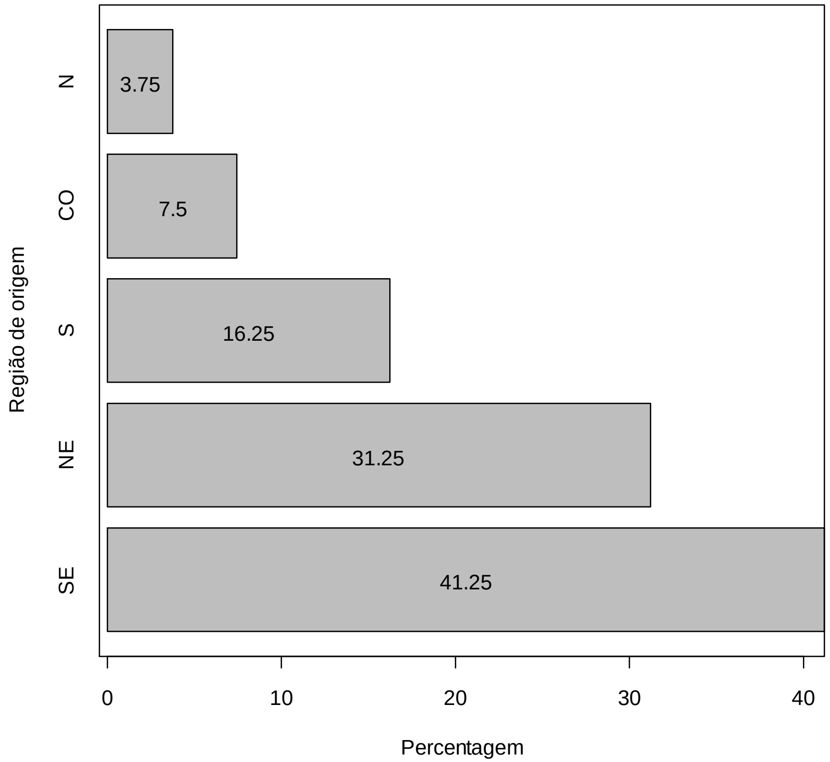
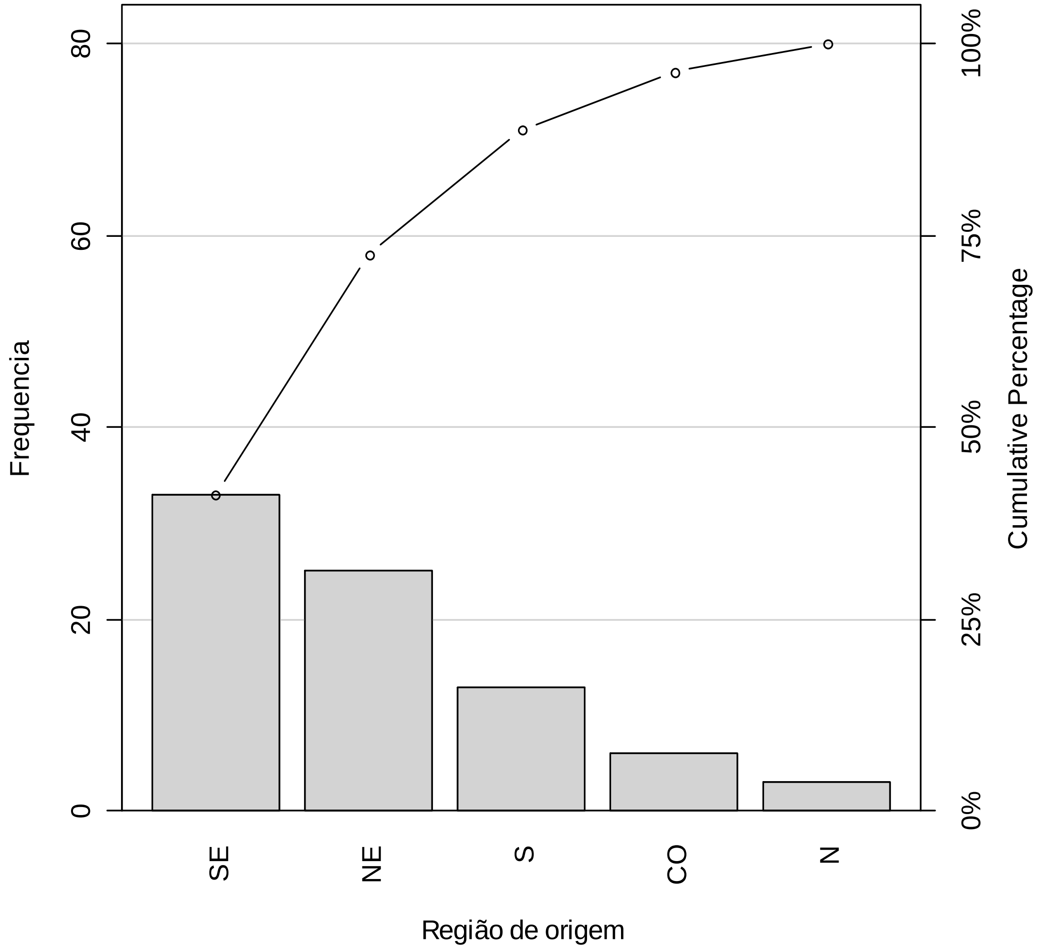


Gráfico de Pareto

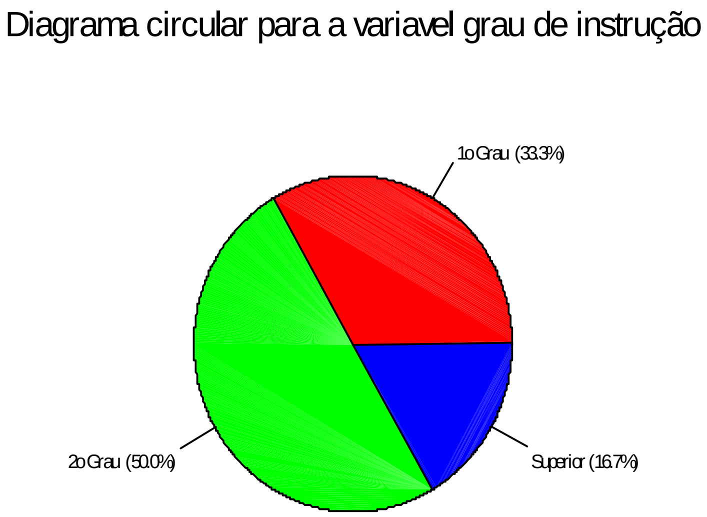
Gráfico de barras com os valores da variável em ordem decrescente de frequencias e com as frequencias relativas acumuladas no segundo eixo vertical.

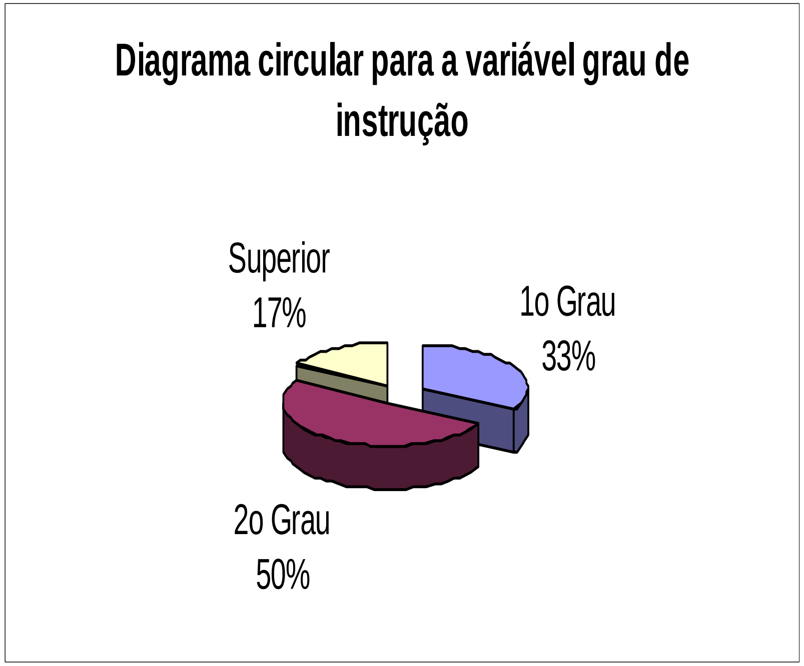


Gráficos de setores (“de pizza”)

Gráfico circular utilizado para destacar a composição das partes de um todo.

O ângulo central de cada setor é proporcional à frequencia representada (usualmente em %).





2.1 Discretas. Organizam-se mediante tabelas de frequências e a representação gráfica é mediante gráfico de pontos, de barras ou de linha.

Frequência relativa do valor x_i : $f_{ri} = f_i / n$.

Frequência acumulada do valor x_i:

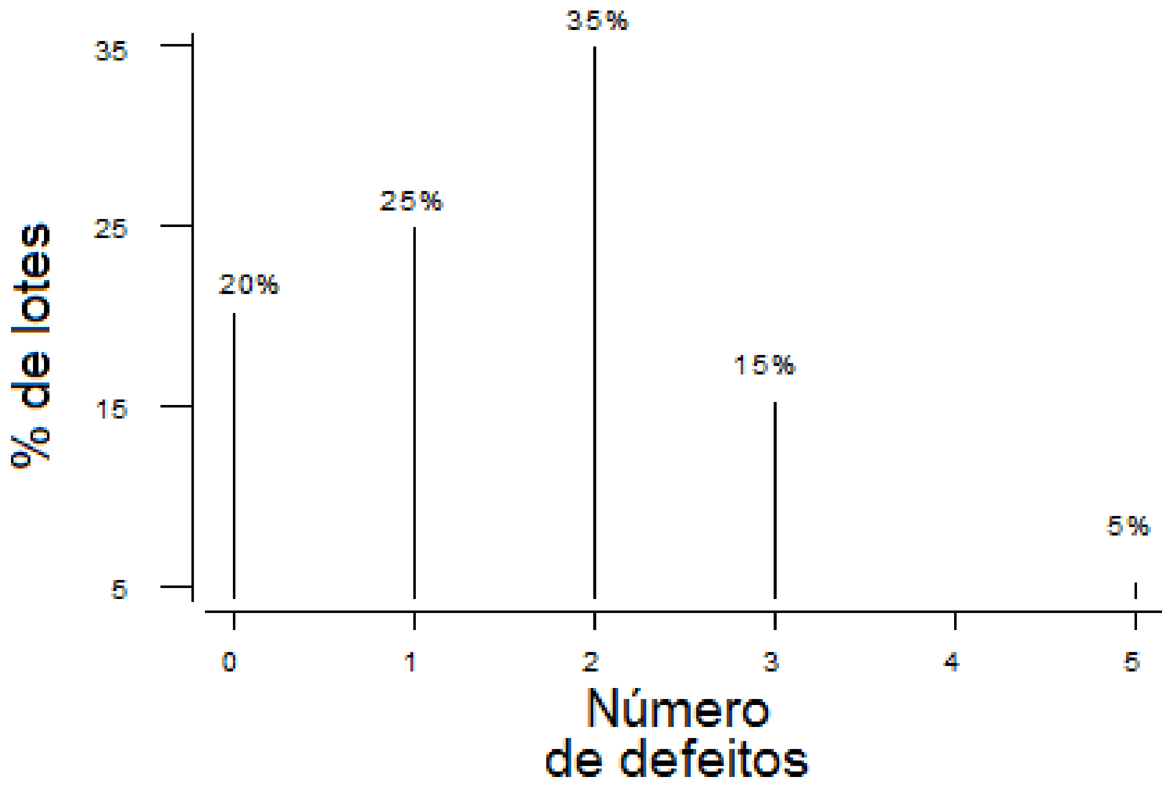
$$F_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$$

Exemplo. Número de defeitos em lotes de produtos.

Distribuição de frequências do número de defeitos por lote.

i	Número de defeitos (X_i)	Número de lotes (f_i)	% de lotes (f_{ri})
1	0	4	20%
2	1	5	25%
3	2	7	35%
4	3	3	15%
5	5	1	5%
Total		20	100%

Representação gráfica



Medidas de posição e dispersão para variáveis quantitativas discretas agrupados em tabela de freqüências:

Média:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{n}$$

Exemplo. Determine o número médio de defeitos por lote.

$$\bar{x} = \frac{0 \times 4 + 1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 3 + 5 \times 1}{20} = \frac{33}{20} = 1{,}65$$

Mediana:

n = 20: pm = (20+1) / 2 = 10,5 =>

Md = média dos valores com frequencias acumuladas iguas a 10 e 11

= (2 + 2) / 2 = 2 (lâmina 40).

Moda = ?

Variância:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \cdots + (x_k - \bar{x})^2 f_k}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n-1}$$

Exemplo.

$$s^2 = \frac{4(0-1,65)^2 + 5(1-1,65)^2 + 7(2-1,65)^2 + 3(3-1,65)^2 + (5-1,65)^2}{19}$$

$$= \frac{16,3125}{19} = 0,859$$

Desvio padrão: $s = \sqrt{s^2} = 0,927$

Coeficiente de variação: $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \times 100\% = \frac{0,92}{1,65} \times 100\% = 55,8\%$

2.2 Construção de tabelas de frequências para variáveis contínuas

- Escolha o número de intervalos de classe (k)
- Identifique o menor valor (min) e o valor máximo (MAX) dos dados.
- Calcule a amplitude (A): A = MAX – min.
- Calcule a amplitude de classe (h): h = A / k.
- Obtenha os limites inferior (LI) e superior (LS) de cada classe.

$1^{\underline{o}}$ intervalo:

$$\text{Limite inferior}: \mathrm{LI}_1 = \min$$

$$\text{Limite superior}: \mathrm{LS}_1 = LI_1 + h$$

$2^{\underline{o}}$ intervalo:

$$\text{Limite inferior}: \mathrm{LI}_2 = LS_1$$

$$\text{Limite superior}: \mathrm{LS}_2 = LI_2 + h$$

...

i-ésimo intervalo:

$$\text{Limite inferior}: \mathrm{LI}_i = LS_{i-1}$$

$$\text{Limite superior}: \mathrm{LS}_i = LI_i + h$$

Prossiga até que seja obtido um intervalo que contenha o valor máximo (MAX).

Obs. Muitas vezes, por conveniência, arrredondamos os valores de h e/ou LI_1.

Tabela de de frequências com as colunas:

- Número de ordem de cada intervalo (i)
- Limites de cada intervalo. Os intervalos são fechados à esquerda e abertos à direita. Notação: $\vdash$

Ponto médio (ou marca de classe) de cada classe:

$$x_i^* = \frac{LS_i + LI_i}{2}.$$

Frequência absoluta de uma classe (f_i): número de observações pertencentes à classe i.

Frequência relativa de uma classe: $f_{ri} = f_i / n$.

Frequência acumulada absoluta de uma classe:

$$F_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_i = \sum_{j=1}^{i} f_j .$$

Frequência acumulada relativa de uma classe:

$$F_{r_i} = f_{r_1} + f_{r_2} + \cdots + f_{r_i} = \sum_{j=1}^{i} f_{r_j} \quad \text{ou } F_{r_i} = \frac{F_i}{n}.$$

Exemplo

Variável: viscosidade (em u.v.) de um líquido a uma certa temperatura.

```
13.9 14.9 15.9 15.8 14.8 15.1 15.8 15.0 15.1 14.6 14.7 16.6 13.6 15.9 13.1
15.2 14.7 16.0 15.6 17.4 15.3 14.2 15.9 15.1 15.9 16.1 16.2 13.8 14.6 16.0
15.8 15.5 16.5  17.1 15.3 15.5 17.8  15.4 15.4  14.6
```

Amostra ordenada:

```
13.1 13.6 13.8 13.9 14.2 14.6 14.6 14.6 14.7 14.7 14.8 14.9 15.0 15.1 15.1
15.1 15.2 15.3 15.3 15.4 15.4 15.5 15.5 15.6 15.8 15.8 15.8 15.9 15.9 15.9
15.9 16.0  16.0 16.1 16.2  16.5 16.6 17.1 17.4  17.8
```

```
n = 40
  Min.   Median    Mean    Max.
 13.10    15.40   15.39   17.80
```

Procedimento:

Adotamos $k = 5$.

min = 13,10 e MAX = 17,80.

A = MAX – min = 17,8 – 13,10 = 4,7.

h = 4,7 / 5 = 0,94.

Adotamos $h = 1$ e $LI_1 = 13$.

Limites das classses: $LI_1 = 13$, $LS_1 = LI_1 + h = 14$, $LI_2 = LS_1 = 14$, $LS_2 = LI_2 + h = 15$, …, $LI_5 = LS_4 = 17$ e $LS_5 = LI_5 + h = 18$.

Pontos médios: $x_1^* = \dfrac{13+14}{2} = 13{,}5; \quad x_2^* = \dfrac{14+15}{2} = 14{,}5; \quad \ldots; x_5^* = \dfrac{17+18}{2} = 17{,}5.$

Tabela. Distribuição de frequências da variável viscosidade.

Ordem	Classe	Ponto médio	Frequência	Frequência relativa	Frequência acumulada	Frequência relativa acumulada
1	13 |-- 14	13,5	4	0,1	4	0,1
2	14 |-- 15	14,5	8	0,2	12	0,3
3	15 |-- 16	15,5	19	0,475	31	0,775
4	16 |-- 17	16,5	6	0,15	37	0,925
5	17 |-- 18	17,5	3	0,075	40	1
		Total	40	1	-	-

Nesta organização de dados temos perda de informação.
Em um gráfico de pontos não há perda de informação, mas se n for "grande", pode haver perda de clareza.

Densidade de freqüência (ou densidade): $f_{d_i} = \dfrac{f_{r_i}}{h}.$

Representação gráfica:

Histograma

Gráfico de barras adjacentes com bases iguais às amplitudes das classes e alturas iguais às densidades.

Obs. Se as classes tiverem amplitude constante, as alturas das barras usualmente são iguais às frequencias.

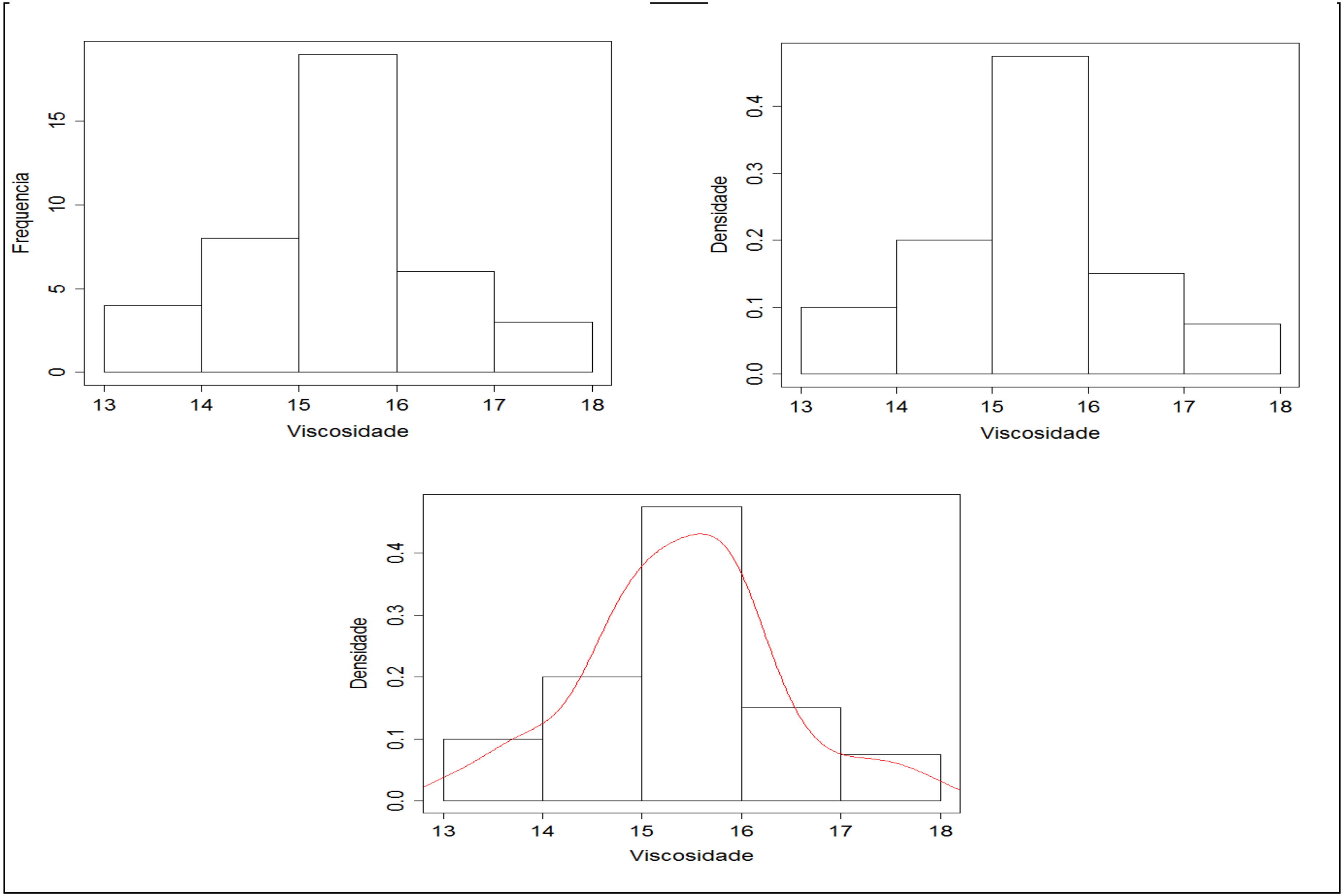
Propriedade. Se utilizarmos densidades, soma das áreas dos retângulos = 1, pois

$$\sum_{i=1}^{k} h\, f_{d_i} = \sum_{i=1}^{k} h \frac{f_{r_i}}{h} = \sum_{i=1}^{k} f_{r_i} = 1.$$

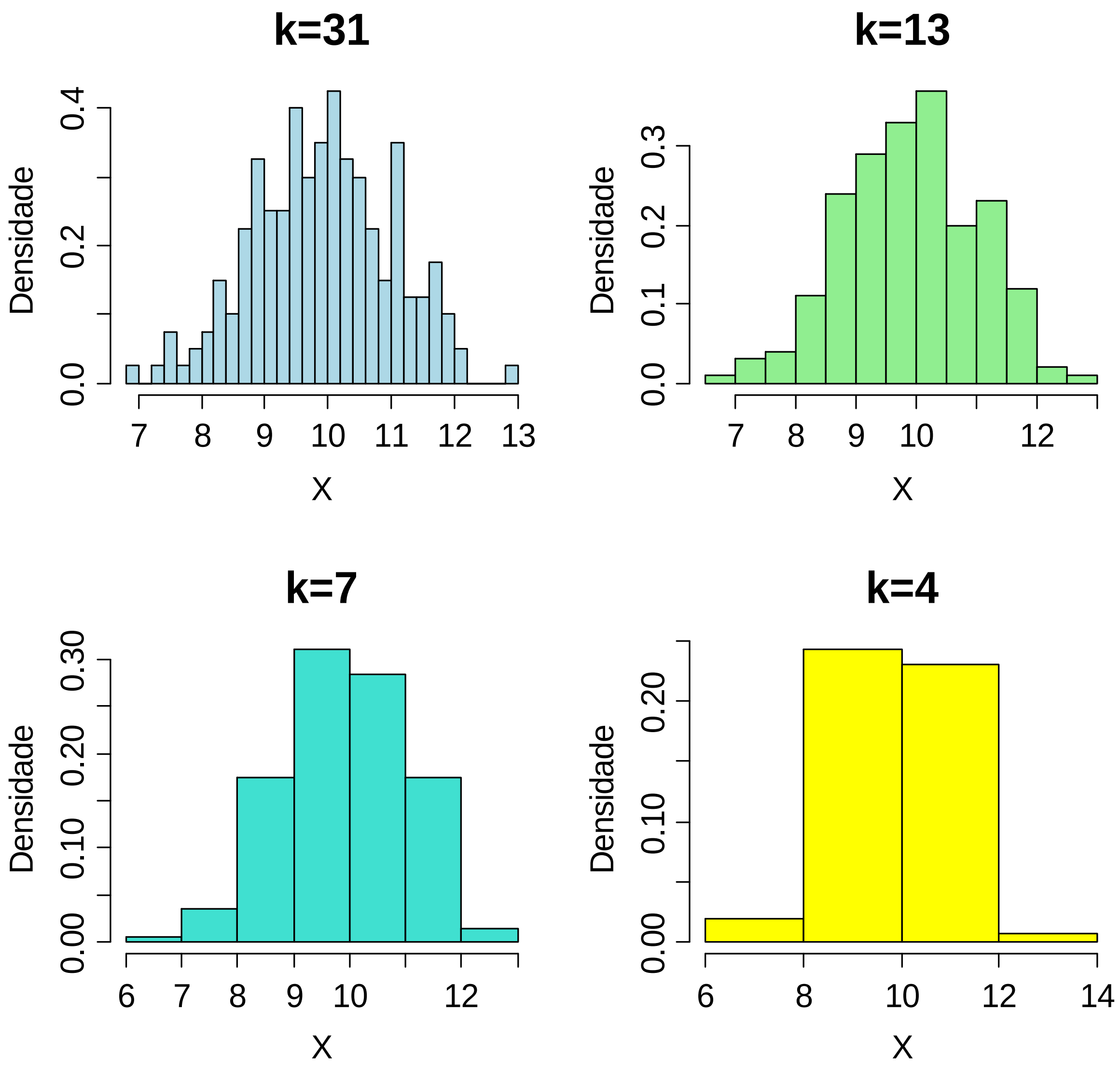
Obs. 1. A amplitude das classes pode variar.

2. Na construção de um histograma, quanto maior for n, melhor.

Exemplo. Variável viscosidade.



Escolha do número de classes (geralmente, $5 \leq k \leq 15$).



Média e variância para variáveis contínuas agrupadas em classes

Média:

$$\bar{x} \cong \frac{x_1^* f_1 + x_2^* f_2 + \cdots x_k^* f_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^* f_i}{n}$$

Variância:

$$s^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \left(x_i^* - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$

Exemplo. Variável viscosidade (lâmina 47)

$$\bar{x} \cong \frac{13{,}5 \times 4 + 14{,}5 \times 8 + 15{,}5 \times 19 + 16{,}5 \times 6 + 17{,}5 \times 3}{40}$$

$$= \frac{616}{40} = 15{,}4.$$

$$s^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i \left(x_i^* - \bar{x}\right)^2}{40-1} = \frac{41{,}6}{39} = 1{,}067.$$

$$\Rightarrow s = 1{,}033 \text{ (desvio padrão).}$$

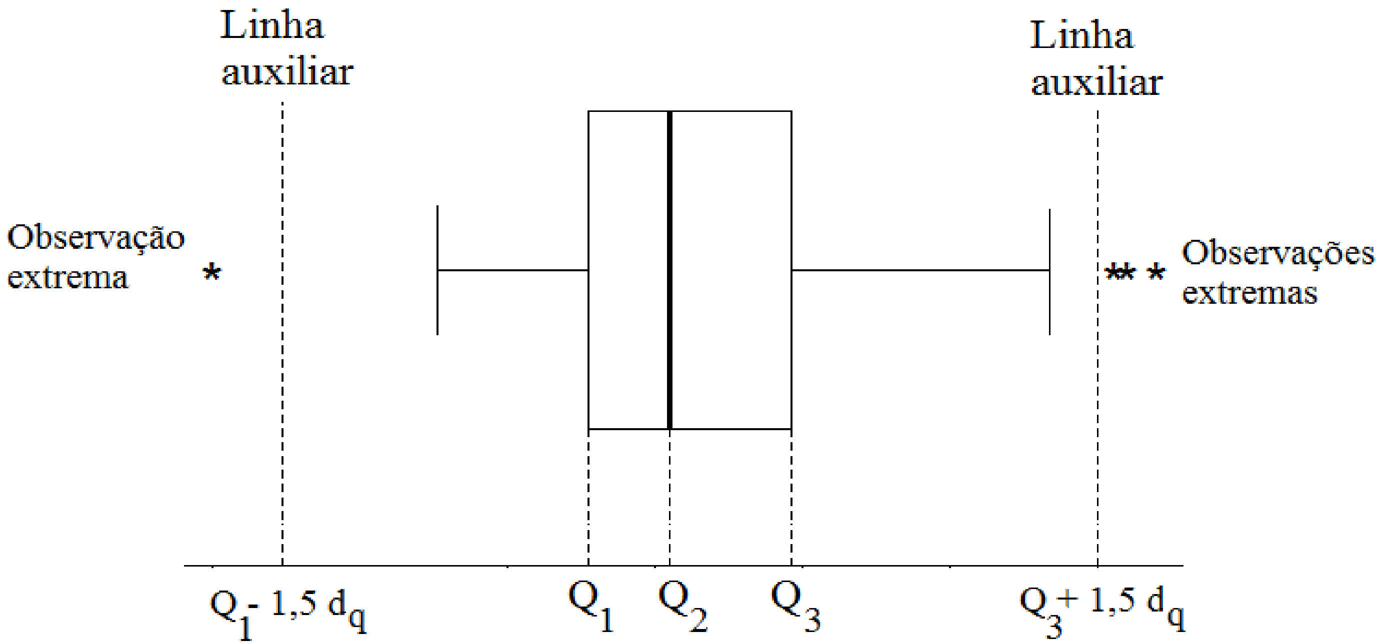
Média dos dados não agrupados (dados brutos) :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{36}}{40} = \frac{13{,}9 + 14{,}9 + \cdots + 14{,}6}{40} = 15{,}39.$$

Este resultado difere do valor obtido anteriormente. Por quê?

Gráfico de caixas (*boxplot*)

Representação dos dados por meio de um retângulo construído com os quartis. Fornece informação sobre a variabilidade ($d_q = Q_3 - Q_1$) e valores extremos.



Vertical à esquerda ├ : menor valor na amostra que não é extremo.

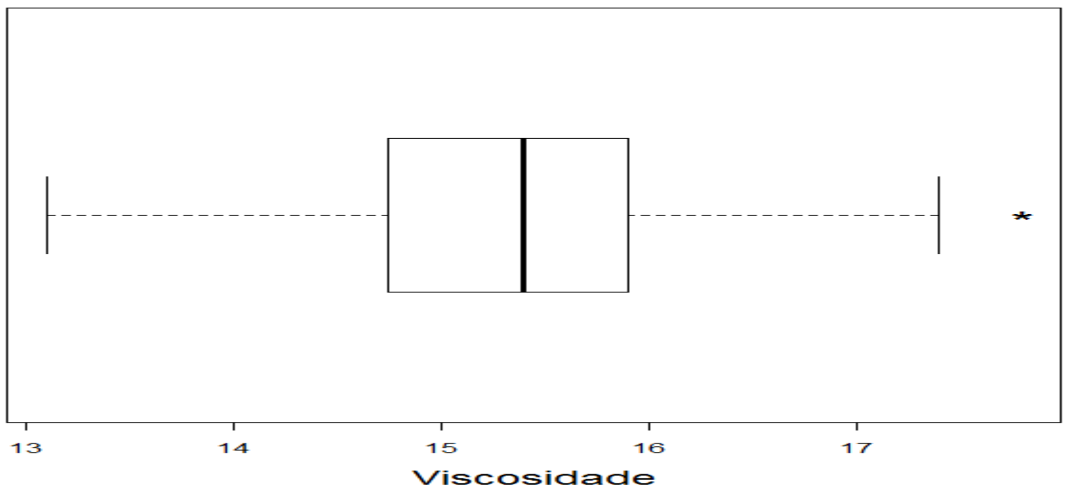
Vertical à direita ┤ : maior valor na amostra que não é extremo.

Exemplo. Variável viscosidade.

1º quartil (Q1) = 14,775. Em R: `quantile(dados, 0.25)`
Mediana (Md ou Q2) = 15,4. Em R: `quantile(dados, 0.5)`
3º quartil (Q3) = 15,9. Em R: `quantile(dados, 0.75)`

d_q = intervalo interquartil = Q3 – Q1 = 1,125.
Lnhas auxiliares passam por Q1 – 1,5d_q = 13,0875 e
Q3 +1,5d_q = 17,5875.

```
> boxplot(viscosidade, xlab = “Viscosidade", horizontal = TRUE)
```



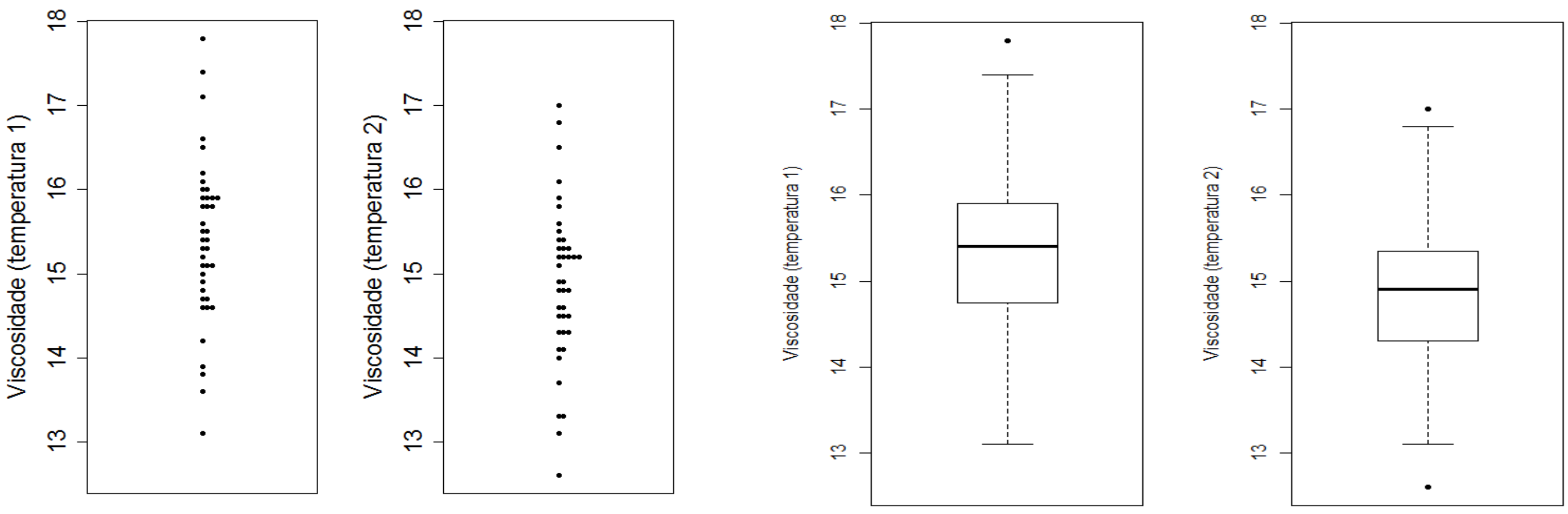
Exemplo. Variável viscosidade medida em duas temperaturas.

Temperatura 1 (lâmina 47).

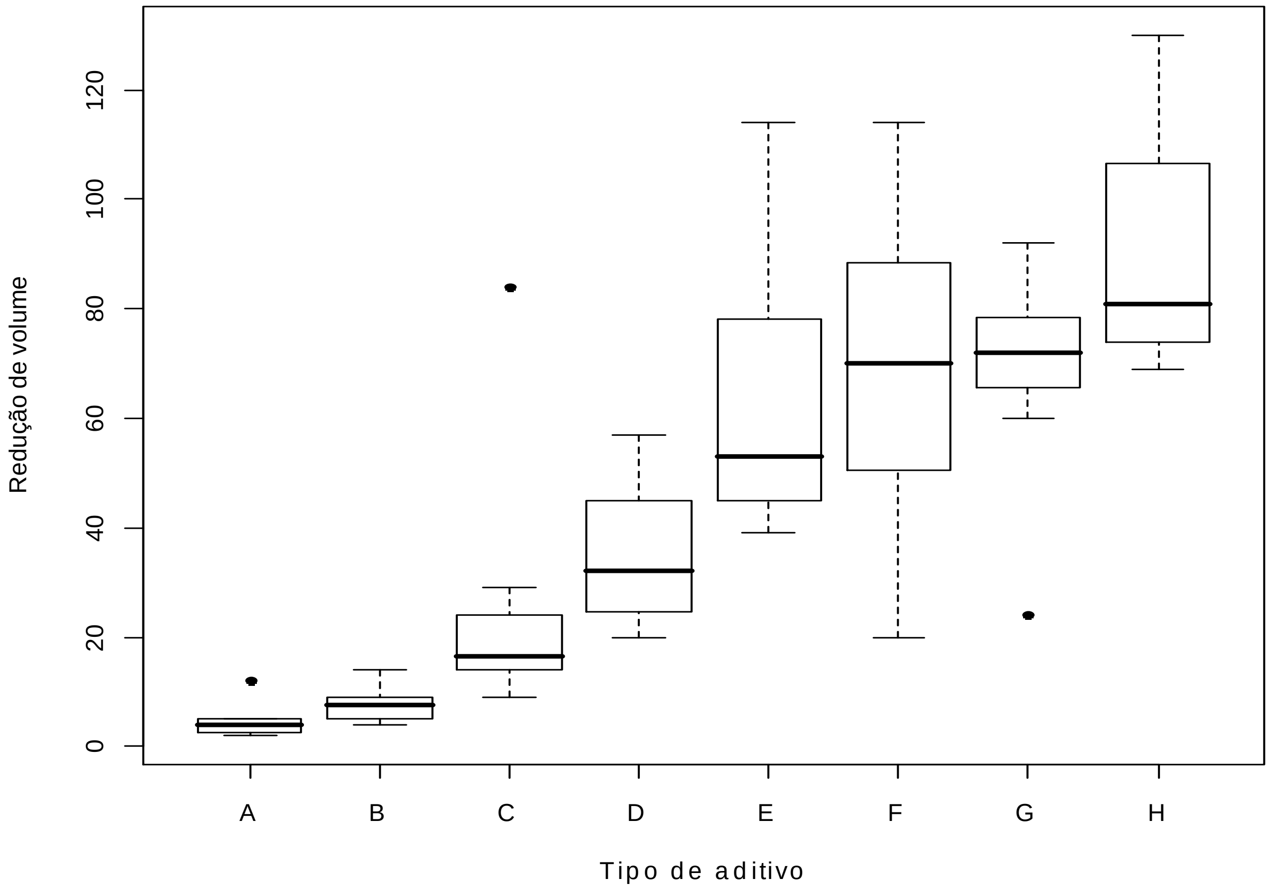
13.9 14.9 15.9 15.8 14.8 15.1 15.8 15.0 15.1 14.6 14.7 16.6 13.6 15.9 13.1
15.2 14.7 16.0 15.6 17.4 15.3 14.2 15.9 15.1 15.9 16.1 16.2 13.8 14.6 16.0
15.8 15.5 16.5 17.1 15.3 15.5 17.8 15.4 15.4 14.6

Temperatura 2 ($n = 40$).

13.3 14.5 15.3 15.3 14.3 14.8 15.2 14.5 14.6 14.1 14.3 16.1 13.1 15.5 12.6
14.6 14.3 15.4 15.2 16.8 14.9 13.7 15.2 14.5 15.3 15.6 15.8 13.3 14.1 15.4
15.2 15.2 15.9 16.5 14.8 15.1 17.0 14.9 14.8 14.0



Boxplot em R



Análise exploratória. Redução *versus* tipo. Variabilidade. Simetria. Valores extremos.

Gráfico de linha

O Estado de S. Paulo, 28/2/2010.

Associação entre variáveis quantitativas

(x_1,y_1), ..., (x_n,y_n): amostra bivariada.

Representação gráfica: gráfico de dispersão (*scatter plot*)

Medida de associação: coeficiente de correlação linear de Pearson.

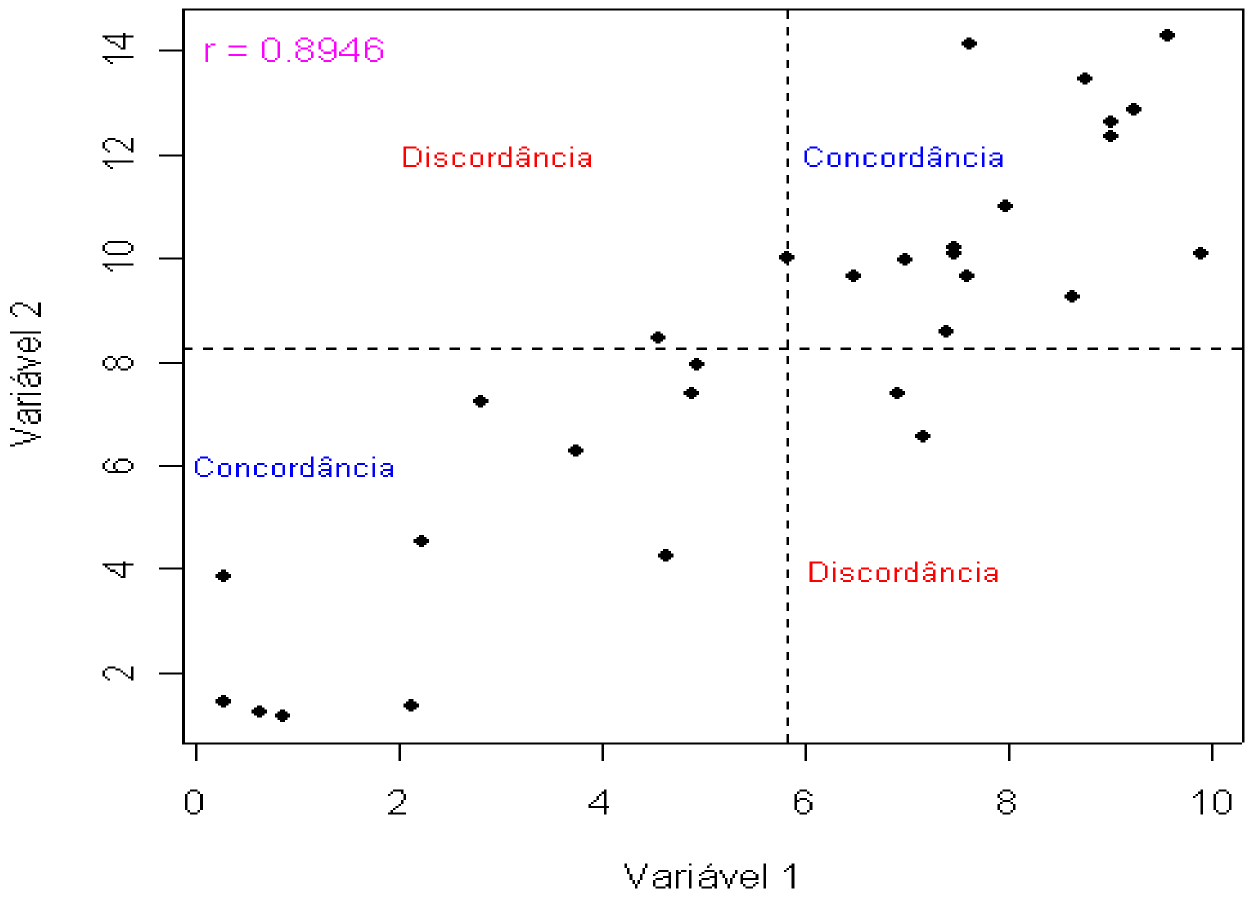
$$r = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}$$

Numerador: covariância entre x e y.

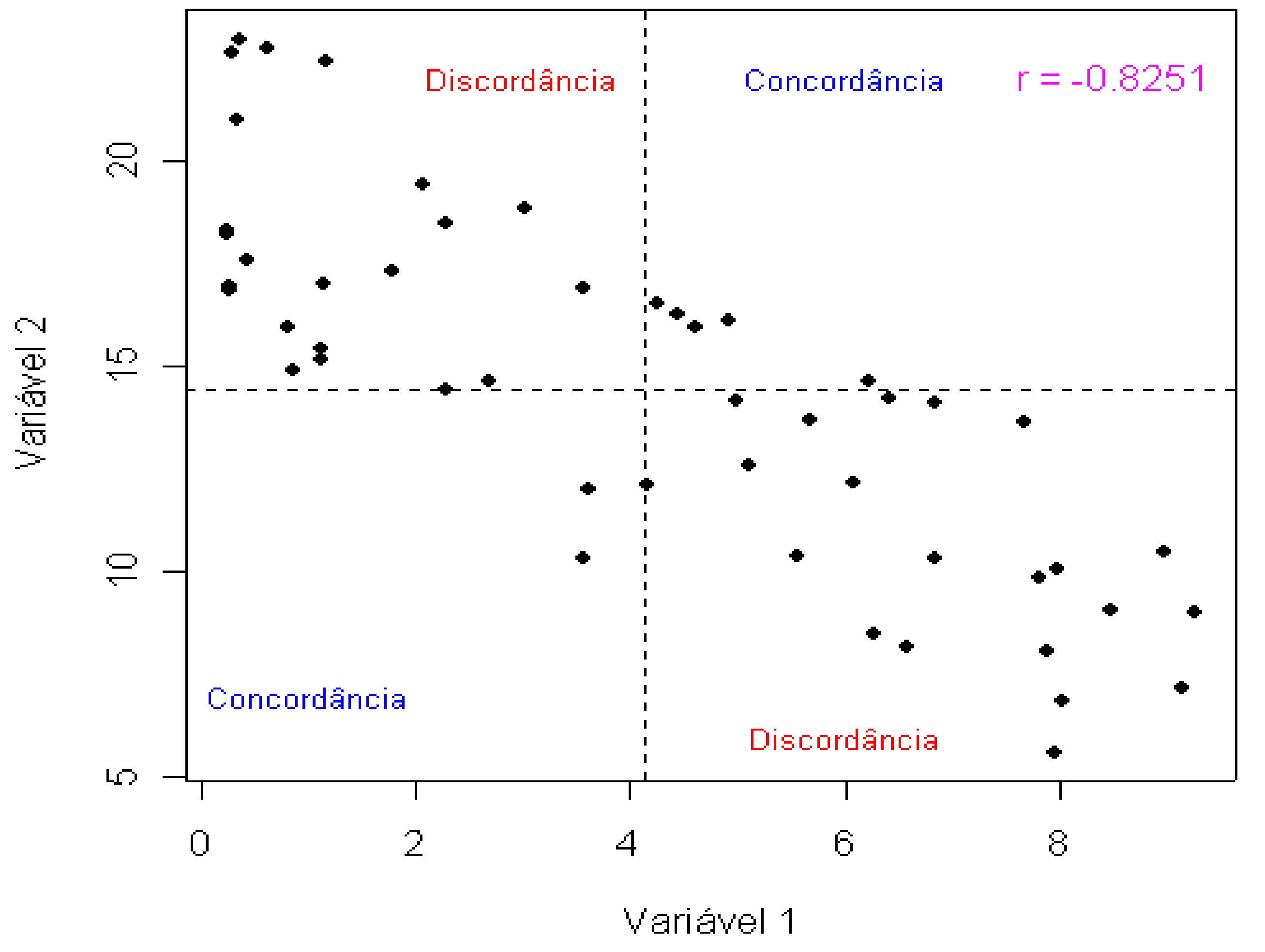
Propriedades: (1) $-1 \leq r \leq 1$ e

(2) $|r| = 1$ se, e somente se, a relação entre x e y for linear
($y = a + bx$, $b \neq 0$ e o sinal de r é o sinal de b.

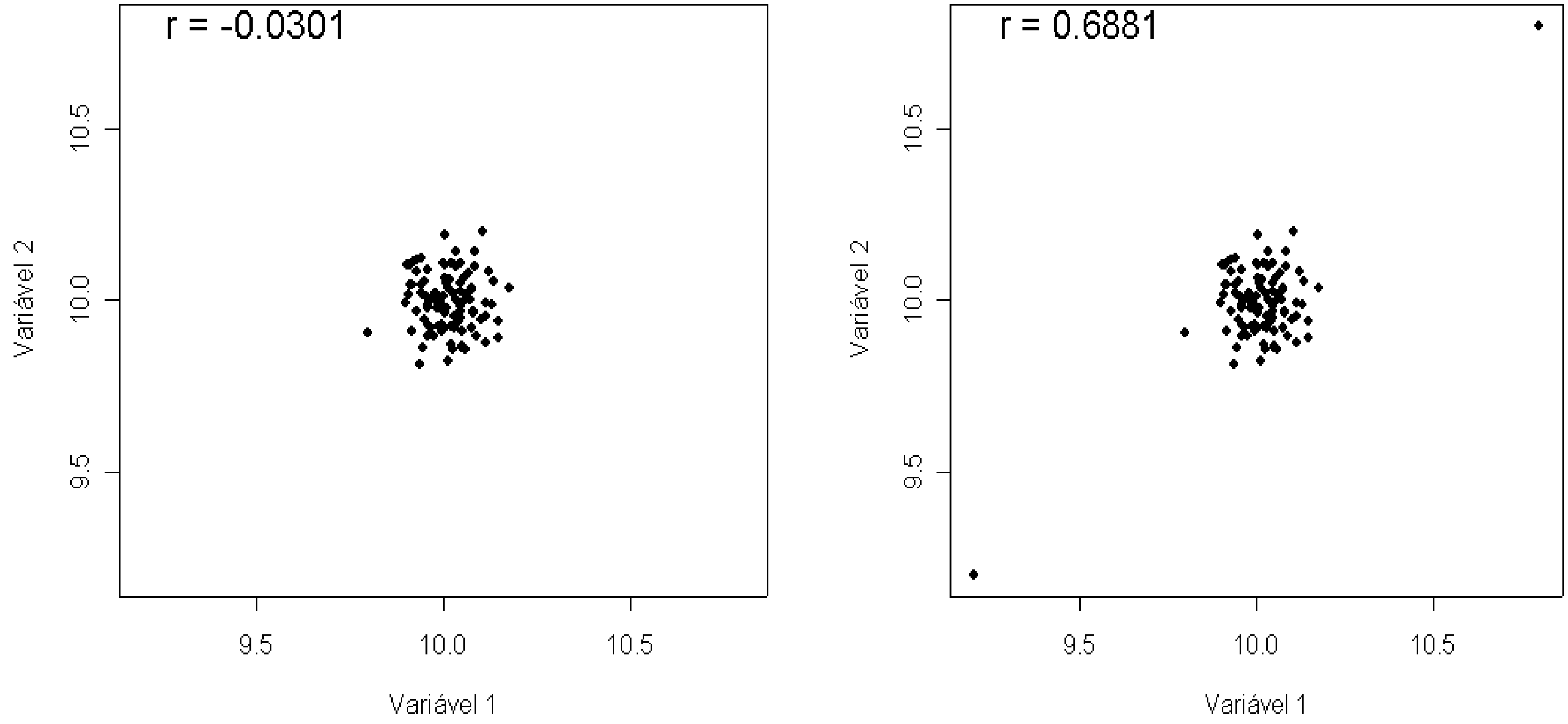
Associação entre variáveis quantitativas



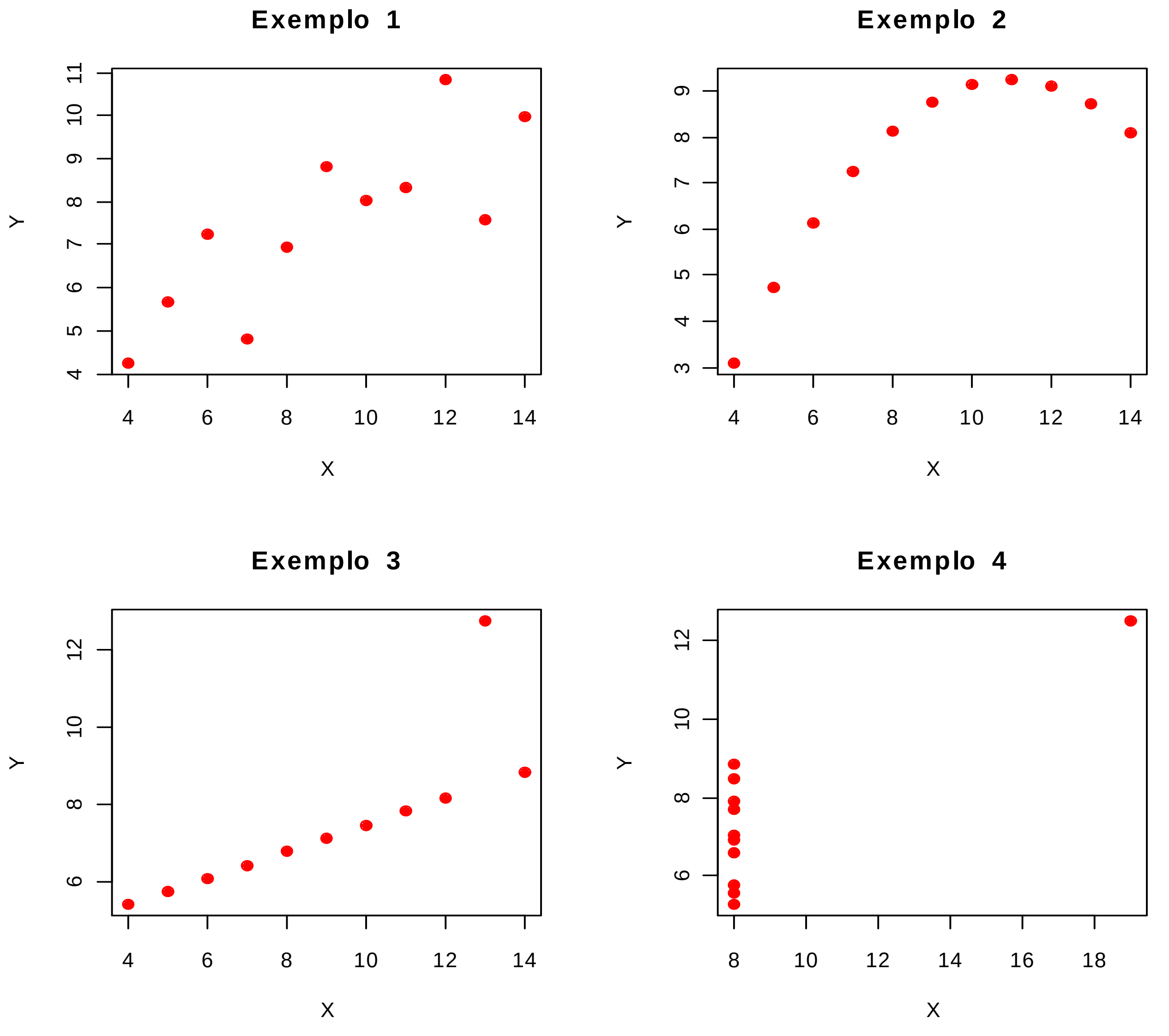
Associação entre variáveis quantitativas



Associação entre variáveis quantitativas



Associação entre variáveis quantitativas



Correlações:

Exemplo 1: 0,8164

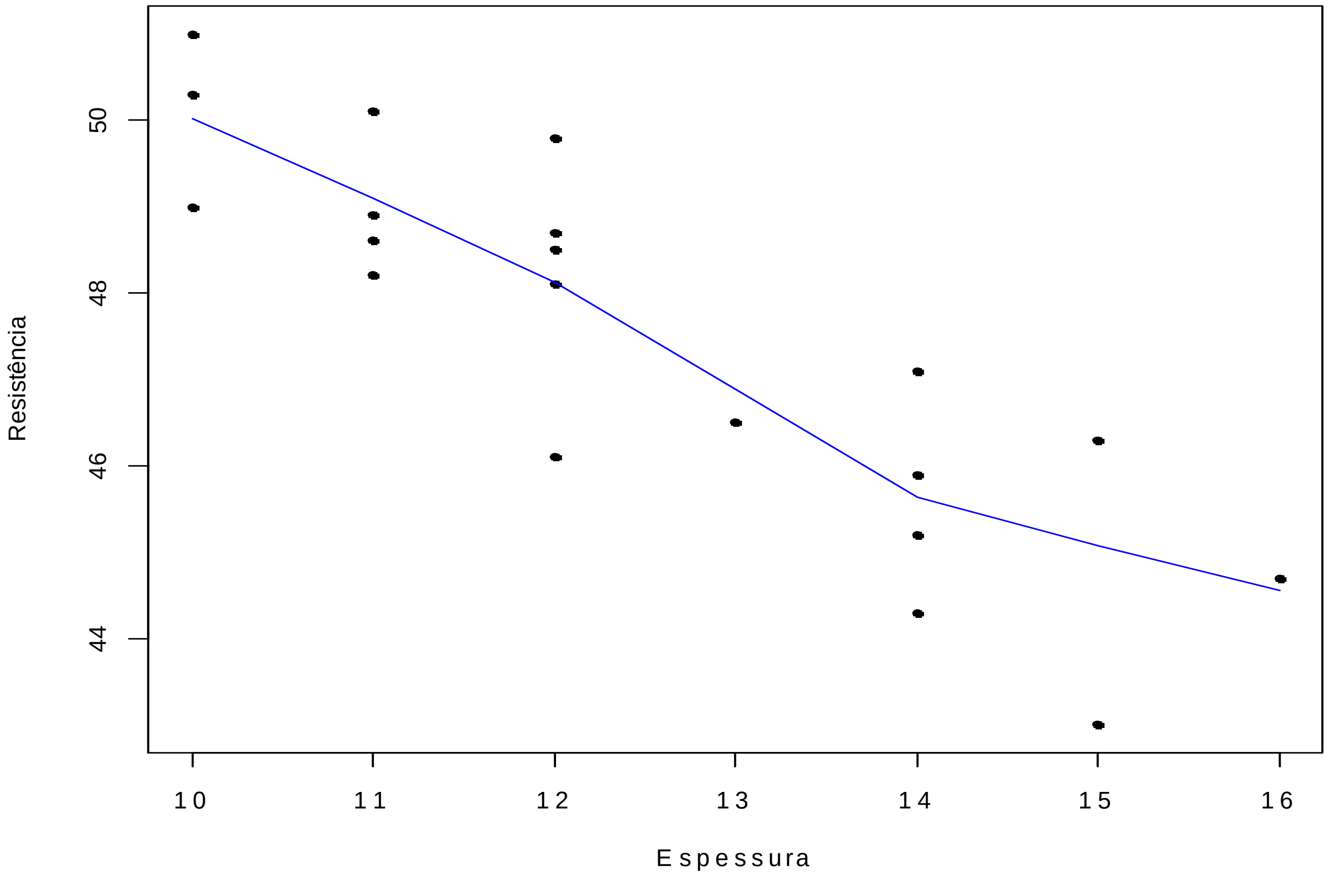
Exemplo 2: 0,8162

Exemplo 3: 0,8163

Exemplo 4: 0,8165

Exemplo em R. Dados na lâmina 17.

```
> plot(espessura, resistencia, xlab = "Espessura", ylab =
"Resistência", pch = 20)
> lines(lowess(espessura, resistencia), col = "blue")
```



Exemplo em R. Dados na lâmina 17.

```
> cores = rainbow(length(levels(cola)))
> plot(espessura, resistencia, xlab = "Espessura", ylab =
"Resistência", pch = 20, col = cores[cola])
> legend("topright", levels(cola), pch = 20, col = cores)
```